**ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.**

**§1 Момент инерции. Теорема Штейнера**

**Момент инерции материальной точки равен**



   **Моментом инерции системы** относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведения масс *n* материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.



Момент инерции тела в случае непрерывного распределения массы равен



-интегрируется по всему объёму.



1. Найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Разобьем диск на кольцевые слои толщиной d*r*. Все точки слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном*r*. Объем такого слоя равен 

Площадь кольца









2. Полый тонкостенный цилиндр радиуса *R* (обруч, велосипедное колесо и тому подобное).



3. Сплошной цилиндр или диск радиуса R



4. Прямой тонкий длиной    стержень, ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину.



5. Шар радиуса R, относительно оси, проходящей через его центр.



Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, момент инерции относительно любой другой оси параллельной данной, определяется с помощью **теоремы Штейнера**: момент инерции тела *І* относительно параллельной оси вращения равен моменту инерции *І*с относительно параллельной оси, проходящей через центр масс *С* тела, сложенному с произведением массы *m* тела на квадрат расстояния а между осями



Например, для обруча на рисунке момент инерции относительно оси *O’O’,*равен



6. Момент инерции прямого стержня длиной , ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец.



**§2 Кинетическая энергия вращения**

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Z, проходящей через него, с угловой скоростью ω. Так как тело является абсолютно твердым, следовательно, все точки тела будут вращатьсяс одинаковой угловой скоростью

    Если разбить тело на малые объёмы с элементарными массами *m*1,*m*2… находящиеся на расстоянии*r*1,*r*2…, от оси вращения, то кинетическую энергию тела можно записать в виде



Известно, что  или     



   Из сравнения Wk. вр. с  Wk. поступательного движения () следует, что момент инерции вращательного движения заменяет массу во вращательном движении и является мерой инертности тела.

   Если тело участвует в поступательном и вращательном движении одновременно, то его кинетическая энергия



Например, цилиндр катиться без скольжения по плоскости.



**§3 Момент силы.**

**Уравнение динамики вращательного движения твердого тела**

   **Моментом силы  относительно неподвижной точки*O*** называется псевдовекторная величина  равная векторному произведению радиус-вектора *,* проведенному из точки *O* в точку приложения силы, на силу 



**Модуль момента силы:**



- псевдовектор, его направление совпадает с направлением плоскости движения правого винта при его вращении от  к . **Направление момента силы** можно также определить по правилу левой руки: четыре пальца левой руки поставить по направлению первого сомножителя , второй сомножитель  входит в ладонь, отогнутый под прямым углом большой палец укажет направления момента силы  . Вектор момента силы всегда перпендикулярен плоскости, в котоой лежат векторы  и .

 -где  кратчайшее расстояния между линией действия силы и точкой *О*называется плечом силы.



**Моментом силы  относительно неподвижной оси** *Z* называется скалярная величина равнаяпроекции на эту ось вектора момента силы , определённого относительно произвольной точки O данной оси Z. Если ось *Z*перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы  и , т.е. совпадает с направлением вектора , то момент силыпредставляется в виде вектора совпадающего с осью.



Ось, положение которой в пространстве остается неизменнымпривращении вокруг тела в отсутствие внешних сил,называется свободной осью тела.

  Для тела любой формы и с произвольным распределением массы существует 3 взаимно перпендикулярных, проходящих через центр инерции тела оси, которые могут служить свободными осями:они называются главными осями инерции тела.

   Найдем выражение для **работы при вращательном движении** тела. Пусть на массу *m* твердого тела действует внешняя сила . Тогда работа этой силы за время d*t* равна    



  Осуществим в смешанном произведении векторов циклическую перестановку сомножителей, воспользовавшись правилом



Тогда









     Работа при вращении тела равна произведению момента действия силы на угол поворота . Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:





Поэтому



или









Следовательно,



*- уравнение динамики вращательного движения*

      Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то выполняется векторное равенство

   *І* - главный момент инерции (момент инерции относительно главной оси)

**§4 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса**

   **Моментом импульса материальной точки** *А* относительно неподвижной точки *О*называется физическая величина, определяемая векторным произведением

;

**Модуль момента импульса**:



- радиус-вектор, проведённый из точки ***O*** в точку *А, ?* - плечо импульса (кратчайшее расстояние от точки *О* до линии действия импульса)

- импульс материальной точки.

 - псевдовектор, его **направление определяется по правилу левой руки**.

**Моментом импульса твердого тела относительно неподвижной оси**  Z  называется скалярная величина равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки ***O*** данной оси. Значение момента импульса   не зависит от положения точки ***O*** на оси Z.

   Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:



Продифференцируем по  *dt*   





- **основное уравнение динамики вращательного движения**.

Вообще выполняется векторное равенство



В замкнутой системе момент внешних сил равен нулю



   Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени

**§5 Величины, характеризующие поступательное и вращательное движение и связь между ними:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   | Поступательное движение | Вращательное движение | Связь |
| 1 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image083.png - путь | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image085.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image087.png |
| 2 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image089.png - cкорость; http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image091.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image093.png http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image095.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image097.png |
| 3 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image099.png - ускорение; http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image101.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image103.png – угловое ускорениеhttp://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image105.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image107.png |
| 4 | m - масса | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image109.png  - момент инерции | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image111.png |
| 5 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image113.png - uмпульс; http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image115.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image069_0000.png – момент импульса | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image117.png |
| 6 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image119.png;http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image121.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image123.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image125.png |
| 7 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image127.png;http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image129.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image131.png – кин. энергия вращательного движенияhttp://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image133.png |   |
| 8 | d*A*-элементарная  работа;http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image135.png | d*A* -  элементарная работа вращательного движенияhttp://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image137.png |   |