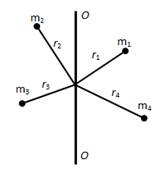
**ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.**

**§1 Момент инерции. Теорема Штейнера**

**Момент инерции материальной точки равен**

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image002.png

   **Моментом инерции системы** относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведения масс *n* материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.

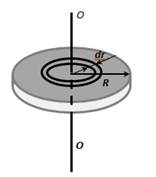
http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image006.png

Момент инерции тела в случае непрерывного распределения массы равен

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image008.png

-интегрируется по всему объёму.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image010.png

1. Найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Разобьем диск на кольцевые слои толщиной d*r*. Все точки слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном*r*. Объем такого слоя равен Элемент объема

Площадь кольца

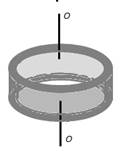
http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image016.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image018.png

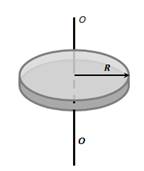
http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image020.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image024.png

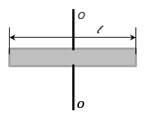
2. Полый тонкостенный цилиндр радиуса *R* (обруч, велосипедное колесо и тому подобное).

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image028.png

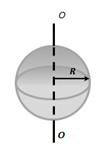
3. Сплошной цилиндр или диск радиуса R

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image030.png

4. Прямой тонкий длиной  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image034.png  стержень, ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image036.png

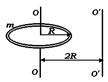
5. Шар радиуса R, относительно оси, проходящей через его центр.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image040.png

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, момент инерции относительно любой другой оси параллельной данной, определяется с помощью **теоремы Штейнера**: момент инерции тела *І* относительно параллельной оси вращения равен моменту инерции *І*с относительно параллельной оси, проходящей через центр масс *С* тела, сложенному с произведением массы *m* тела на квадрат расстояния а между осями

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image042.png

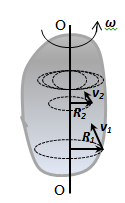
Например, для обруча на рисунке момент инерции относительно оси *O’O’,*равен

Момент инерции обруча по теореме Штейнера

6. Момент инерции прямого стержня длиной http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image034_0000.png, ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image046.png

**§2 Кинетическая энергия вращения**

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Z, проходящей через него, с угловой скоростью ω. Так как тело является абсолютно твердым, следовательно, все точки тела будут вращатьсяс одинаковой угловой скоростью

    Если разбить тело на малые объёмы с элементарными массами *m*1,*m*2… находящиеся на расстоянии*r*1,*r*2…, от оси вращения, то кинетическую энергию тела можно записать в виде

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image048.png

Известно, что http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image050.png или http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image052.png    http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image054.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image056.png

   Из сравнения Wk. вр. с  Wk. поступательного движения (http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image058.png) следует, что момент инерции вращательного движения заменяет массу во вращательном движении и является мерой инертности тела.

   Если тело участвует в поступательном и вращательном движении одновременно, то его кинетическая энергия

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image060.png

Например, цилиндр катиться без скольжения по плоскости.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image062.png

**§3 Момент силы.**

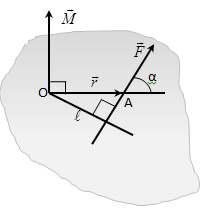
**Уравнение динамики вращательного движения твердого тела**

**Моментом силы http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image002_0000.png относительно неподвижной точки*O*** называется псевдовекторная величина http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image004.png равная векторному произведению радиус-вектора http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image006_0000.png*,* проведенному из точки *O* в точку приложения силы, на силу http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image008_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image010_0000.png

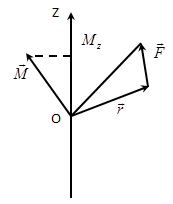
**Модуль момента силы:**

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image012.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image004_0000.png- псевдовектор, его направление совпадает с направлением плоскости движения правого винта при его вращении от http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image006_0001.png к http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image002_0001.png. **Направление момента силы** можно также определить по правилу левой руки: четыре пальца левой руки поставить по направлению первого сомножителя http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image006_0002.png, второй сомножитель http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image002_0002.png входит в ладонь, отогнутый под прямым углом большой палец укажет направления момента силы  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image004_0001.png. Вектор момента силы всегда перпендикулярен плоскости, в котоой лежат векторы http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image006_0003.png и http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image002_0003.png.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image015.png -где  кратчайшее расстояния между линией действия силы и точкой *О*называется плечом силы.

Момент силы

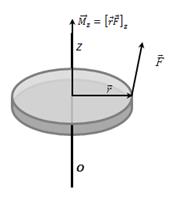
**Моментом силы http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image002_0004.png относительно неподвижной оси** *Z* называется скалярная величина равнаяпроекции на эту ось вектора момента силы http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image004_0002.png, определённого относительно произвольной точки O данной оси Z. Если ось *Z*перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image022.png и http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image008_0001.png, т.е. совпадает с направлением вектора http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image004_0003.png, то момент силыпредставляется в виде вектора совпадающего с осью.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image024_0000.png

Ось, положение которой в пространстве остается неизменнымпривращении вокруг тела в отсутствие внешних сил,называется свободной осью тела.

  Для тела любой формы и с произвольным распределением массы существует 3 взаимно перпендикулярных, проходящих через центр инерции тела оси, которые могут служить свободными осями:они называются главными осями инерции тела.

   Найдем выражение для **работы при вращательном движении** тела. Пусть на массу *m* твердого тела действует внешняя сила http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image026.png. Тогда работа этой силы за время d*t* равна    http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image028_0000.png



  Осуществим в смешанном произведении векторов циклическую перестановку сомножителей, воспользовавшись правилом

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image030_0000.png

Тогда

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image032.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image034_0001.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image036_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image038.png

     Работа при вращении тела равна произведению момента действия силы на угол поворота http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image040_0000.png. Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image042_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image044_0000.png

Поэтому

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image046_0000.png

или

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image048_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image050_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image052_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image054_0000.png

Следовательно,

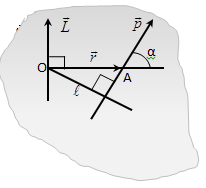
http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image056_0000.png

*- уравнение динамики вращательного движения*

      Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то выполняется векторное равенствоhttp://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image058_0000.png

*І* - главный момент инерции (момент инерции относительно главной оси)

**§4 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса**

   **Моментом импульса материальной точки** *А* относительно неподвижной точки *О*называется физическая величина, определяемая векторным произведением

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image061.png;

**Модуль момента импульса**:

Модуль момента импульса

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image022_0000.png- радиус-вектор, проведённый из точки ***O*** в точку *А, ?* - плечо импульса (кратчайшее расстояние от точки *О* до линии действия импульса)

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image065.png- импульс материальной точки.

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image067.png - псевдовектор, его **направление определяется по правилу левой руки**.

**Моментом импульса твердого тела относительно неподвижной оси**  Z  называется скалярная величина равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки ***O*** данной оси. Значение момента импульса  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image069.png не зависит от положения точки ***O*** на оси Z.

   Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image071.png

Продифференцируем по  *dt*   http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image073.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image075.png

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image077.png

- **основное уравнение динамики вращательного движения**.

Вообще выполняется векторное равенство

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image079.png

В замкнутой системе момент внешних сил равен нулю

http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image081.png

   Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени

**§5 Величины, характеризующие поступательное и вращательное движение и связь между ними:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Поступательное движение | Вращательное движение | Связь |
| 1 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image083.png - путь | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image085.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image087.png |
| 2 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image089.png - cкорость;  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image091.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image093.png http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image095.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image097.png |
| 3 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image099.png - ускорение; http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image101.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image103.png – угловое ускорение  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image105.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image107.png |
| 4 | m - масса | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image109.png  - момент инерции | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image111.png |
| 5 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image113.png - uмпульс;  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image115.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image069_0000.png – момент импульса | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image117.png |
| 6 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image119.png;  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image121.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image123.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image125.png |
| 7 | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image127.png;  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image129.png | http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image131.png – кин. энергия вращательного движения  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image133.png |  |
| 8 | d*A*-элементарная  работа;  http://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image135.png | d*A* -  элементарная работа вращательного движенияhttp://www.bog5.in.ua/lection/mechanics_lect/image_mech/lect8_meh_clip_image137.png |  |