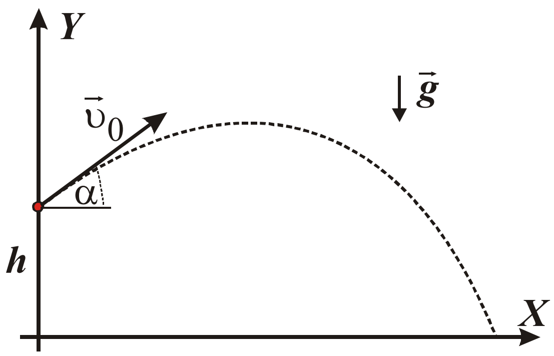
Пример. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Тело, брошенное с некоторой высоты под углом к горизонту с известной начальной скоростью, совершает движение в плоскости. Для описания данного движения потребуется две координаты, которые связаны лишь тем, что изменяются одновременно. Оси координат выбираются из соображений удобства, но в данном случае сложилось так, что ось $\boldsymbol{X}$ выбирают горизонтально вдоль поверхности земли, а ось $\boldsymbol{Y}$ вертикально.



В общем виде можно записать:

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2};\ \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t;$$

$$y(t) = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2};\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t.$$

Ускорение, с которым движется тело — это ускорение свободного падения, направленное вертикально вниз. Проекция ускорения на ось X будет равна нулю, поэтому движение по оси будет равномерным.

Движение по оси Y будет неравномерным. Вектор скорости также необходимо спроектировать на оси координат. Тогда окончательно получим.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = y_0 + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Из начальных условий, т.е. при $t = 0$, найдем начальные значения координат: $x_0 = 0$, $y_0 = h$ — тело брошено с высоты $\boldsymbol{h}$.

Тогда окончательно получим:

$$\begin{cases} x(t) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = h + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Уравнение траектории, легко получить из уравнений для координат. Выразив время из выражения ***x(t)*** и подставив его в уравнение для координат ***y(t)***, получим

$$t = \frac{x(t)}{\upsilon_0 \cos\alpha}; \qquad y(t) = h + \upsilon_0 \sin\alpha \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha} - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} = C + Ax - Bx^2,$$

где $A = tg\alpha$, $B = \dfrac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}$.

Это уравнение параболы.

Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к траектории и легко определяется как векторная сумма горизонтальной $\vec{\upsilon}_x$ и вертикальной $\vec{\upsilon}_y$ составляющих скоростей. Вектор полной скорости

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_x(t) + \vec{\upsilon}_y(t); \quad \left|\vec{\upsilon}(t)\right| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2}.$$