№10 D = A∙B-2∙C

$$ = \left(\begin{matrix}2&-1\\4&0\end{matrix}\right)$$

$$B = \left(\begin{matrix}2&3&4\\1&-2&5\end{matrix}\right)$$

$$C = \left(\begin{matrix}0&1&3\\5&4&-6\end{matrix}\right)$$

Умножим матрицы: D = A x B

$$\left(\begin{matrix}2&-1\\4&0\end{matrix}\right) x \left(\begin{matrix}2&3&4\\1&-2&5\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}3&8&3\\8&12&16\end{matrix}\right)$$

Умножим матрицу на число: E = 2C

$$E = 2∙\left(\begin{matrix}0&1&3\\5&4&-6\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}0&2&6\\10&8&-12\end{matrix}\right)$$

Вычитание матриц: D = D - E

$$\left(\begin{matrix}3&8&3\\8&12&16\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}0&2&6\\10&8&-12\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}3&6&-3\\-2&4&28\end{matrix}\right)$$

Ответ: D = A∙B-2∙C = $\left(\begin{matrix}3&6&-3\\-2&4&28\end{matrix}\right)$

№30 Запишем матрицу в виде:

$$\left(\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-1\\2&4&5\end{matrix}\right)$$

Главный определитель

∆=1•(1•5-4•(-1))-0•(2•5-4•3)+2•(2•(-1)-1•3)=-1

Определитель отличен от нуля, следовательно, матрица является невырожденной и для нее можно найти обратную матрицу A-1.

Обратная матрица будет иметь следующий вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\left(\begin{matrix}A\_{11}&A\_{21}&A\_{31}\\A\_{12}&A\_{22}&A\_{32}\\A\_{13}&A\_{23}&A\_{33}\end{matrix}\right)$$

**Транспонированная матрица**.

$$A^{T}=\left(\begin{matrix}1&0&2\\2&1&4\\3&-1&5\end{matrix}\right)$$

Найдем **алгебраические дополнения** матрицы AT.

$$A\_{11}^{T}=(-1)^{1+1}\left|\begin{matrix}1&4\\-1&5\end{matrix}\right|$$

∆11=(1•5-(-1•4))=9

$$A\_{12}^{T}=(-1)^{1+2}\left|\begin{matrix}2&4\\3&5\end{matrix}\right|$$

∆12=-(2•5-3•4)=2

$$A\_{13}^{T}=(-1)^{1+3}\left|\begin{matrix}2&1\\3&-1\end{matrix}\right|$$

∆13=(2•(-1)-3•1)=-5

$$A\_{21}^{T}=(-1)^{2+1}\left|\begin{matrix}0&2\\-1&5\end{matrix}\right|$$

∆21=-(0•5-(-1•2))=-2

$$A\_{22}^{T}=(-1)^{2+2}\left|\begin{matrix}1&2\\3&5\end{matrix}\right|$$

∆22=(1•5-3•2)=-1

$$A\_{23}^{T}=(-1)^{2+3}\left|\begin{matrix}1&0\\3&-1\end{matrix}\right|$$

∆23=-(1•(-1)-3•0)=1

$$A\_{31}^{T}=(-1)^{3+1}\left|\begin{matrix}0&2\\1&4\end{matrix}\right|$$

∆31=(0•4-1•2)=-2

$$A\_{32}^{T}=(-1)^{3+2}\left|\begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix}\right|$$

∆32=-(1•4-2•2)=0

$$A\_{33}^{T}=(-1)^{3+3}\left|\begin{matrix}1&0\\2&1\end{matrix}\right|$$

∆33=(1•1-2•0)=1

**Обратная матрица**.

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\left(\begin{matrix}9&2&-5\\-2&-1&1\\-2&0&1\end{matrix}\right)$$

$$A^{-1}=\left(\begin{matrix}-9&-2&5\\2&1&-1\\2&0&-1\end{matrix}\right)$$

**Союзная матрица**

C=

9 2 -5

-2 -1 1

-2 0 1

Проверим правильность нахождения обратной матрицы путем умножения исходной матрицы на обратную. Должны получить единичную матрицу *E*.

$$E=A∙A^{-1}=\left(\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-1\\2&4&5\end{matrix}\right)\frac{1}{-1}\left(\begin{matrix}9&2&-5\\-2&-1&1\\-2&0&1\end{matrix}\right)$$

E=A∙A-1=

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (1•9)+(2•(-2))+(3•(-2)) | (1•2)+(2•(-1))+(3•0) | (1•(-5))+(2•1)+(3•1) |
| (0•9)+(1•(-2))+(-1•(-2)) | (0•2)+(1•(-1))+(-1•0) | (0•(-5))+(1•1)+(-1•1) |
| (2•9)+(4•(-2))+(5•(-2)) | (2•2)+(4•(-1))+(5•0) | (2•(-5))+(4•1)+(5•1) |

$$=\frac{1}{-1}\left(\begin{matrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{matrix}\right)$$

$$A∙A^{-1}=\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$$

№50

Запишем систему в виде:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 | -1 | 3 |
| 3 | 2 | 4 |
| 2 | -2 | 4 |

 |  |

 |  |
|  |  |  |

BT = (1,8,0)
Система совместна тогда и только тогда, когда системный (главный) определитель не равен нулю.
**Определитель:**
∆ = 4\*(2\*4-(-2)\*4)-3\*((-1)\*4-(-2)\*3)+2\*((-1)\*4-2\*3) = 38
**Заменим 1-й столбец матрицы А на вектор результата В**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1** | -1 | 3 |
| **8** | 2 | 4 |
| **0** | -2 | 4 |

Найдем определитель полученной матрицы.
∆1 = (-1)1+1a11∆11 + (-1)2+1a21∆21 + (-1)3+1a31∆31 = 1\*(2\*4-(-2)\*4)-8\*((-1)\*4-(-2)\*3)+0\*((-1)\*4-2\*3) = 0

**Заменим 2-й столбец матрицы А на вектор результата В**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 | **1** | 3 |
| 3 | **8** | 4 |
| 2 | **0** | 4 |

Найдем определитель полученной матрицы.
∆2 = (-1)1+1a11∆11 + (-1)2+1a21∆21 + (-1)3+1a31∆31 = 4\*(8\*4-0\*4)-3\*(1\*4-0\*3)+2\*(1\*4-8\*3) = 76

**Заменим 3-й столбец матрицы А на вектор результата В**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 | -1 | **1** |
| 3 | 2 | **8** |
| 2 | -2 | **0** |

Найдем определитель полученной матрицы.
∆3 = (-1)1+1a11∆11 + (-1)2+1a21∆21 + (-1)3+1a31∆31 = 4\*(2\*0-(-2)\*8)-3\*((-1)\*0-(-2)\*1)+2\*((-1)\*8-2\*1) = 38

**Выпишем отдельно найденные переменные Х**



**Проверка**.
4\*0-1\*2+3\*1 = 1
3\*0+2\*2+4\*1 = 8
2\*0-2\*2+4\*1 = 0

№70

2x1 –x2+x3+2x4+3x5+2,

6x1-3x2+2x3+4x4+5x5=3,

6x1-3x2+4x3+8x4+13x5=9,

X1-2x2+x3+x4+2x5=1.

Исследуем эту систему по теореме Кронекера-Капелли.
Выпишем расширенную и основную матрицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **2** | **-1** | **1** | **2** | **3** | 2 |
| **6** | **-3** | **2** | **4** | **5** | 3 |
| **6** | **-3** | **4** | **8** | **13** | 9 |
| **1** | **-2** | **1** | **1** | **2** | 1 |

Здесь матрица А выделена жирным шрифтом.
Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.
Умножим 1-ую строку на (-3). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | -1 | -2 | -4 | -3 |
| 6 | -3 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| 6 | -3 | 4 | 8 | 13 | 9 |
| 1 | -2 | 1 | 1 | 2 | 1 |

Умножим 2-ую строку на (-1). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | -1 | -2 | -4 | -3 |
| 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 6 |
| 6 | -3 | 4 | 8 | 13 | 9 |
| 1 | -2 | 1 | 1 | 2 | 1 |

В матрице *B* 1-ая и 2-ая строки пропорциональны, следовательно, одну из них, например 1-ю, можно вычеркнуть. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы, так как оно является следствием 2-го.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **0** | **0** | **2** | **4** | **8** | 6 |
| **6** | **-3** | **4** | **8** | **13** | 9 |
| **1** | **-2** | **1** | **1** | **2** | 1 |

Умножим 2-ую строку на (-1). Умножим 3-ую строку на (6). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 6 |
| 0 | -9 | 2 | -2 | -1 | -3 |
| 1 | -2 | 1 | 1 | 2 | 1 |

Определим ранг основной системы системы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **0** | **0** | **2** |  | 4 |  | 8 |
| **0** | **-9** | **2** |  | -2 |  | -1 |
| **1** | **-2** | **1** |  | 1 |  | 2 |

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля. Ранг этой системы равен rangA=3.
Определим ранг расширенной системы системы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **0** | **0** | **2** | 4 | 8 | 6 |
| **0** | **-9** | **2** | -2 | -1 | -3 |
| **1** | **-2** | **1** | 1 | 2 | 1 |

Ранг этой системы равен rangB=3.
rang(A) = rang(B) = 3. Поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной, то **система является совместной**.
Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных x1,x2,x3, значит, неизвестные x1,x2,x3 – зависимые (базисные), а x4,x5 – свободные.
Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **0** | **0** | **2** | 6 | -4 | -8 |
| **0** | **-9** | **2** | -3 | 2 | 1 |
| **1** | **-2** | **1** | 1 | -1 | -2 |
| x1 | x2 | x3 |  | x4 | x5 |

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:

2x3 = 6 - 4x4 - 8x5
- 9x2 + 2x3 = - 3 + 2x4 + x5
x1 - 2x2 + x3 = 1 - x4 - 2x5
Получили соотношения, выражающие зависимые переменные x1,x2,x3 через свободные x4,x5, то есть нашли **общее решение**:
x3 = 3 - 2x4 - 4x5
x2 = 1 - 2/3x4 - x5
x1 = - 1/3x4
Придавая свободным неизвестным любые значения, получим сколько угодно частных решений. Система является **неопределенной**, т.к. имеет более одного решения.