УДК 51
ББК 22.1
Б74

Богомолов Н. В.

Б 74 Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних спец. учеб. заведений/Н. В. Богомолов.— 6-е изд., стер.— М.: Высш. шк., 2003.— 495 с.

ISBN 5-06-003940-4

Настоящее пособие (5-е изд.— 2002 г.) представляет собой руководство к решению задач по всем разделам программы по математике для техникумов на базе неполной и полной средней школы.

Основное назначение пособия — помочь студенту самостоятельно, без помощи преподавателя, изучить приемы решения задач по математике, закрепить и углубить навыки, приобретенные при решении этих задач.

Для студентов средних специальных учебных заведений. Может быть испальзовано студентами колледжей.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 5-06-003940-4 © ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2003

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа» и его репродуцирование (воспроизведенне) любым способом без согласия издательства запрещается.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

Раздел I

Элементы вычислительной математики

Глава 1. Погрешности приближенных значений чисел 10
§ 1. Абсолютная погрешность приближенного значения числа. Граница абсолютной погрешности 10
§ 2. Верные цифры числа. Запись приближенного значения числа. Округление приближенных значений чисел 11
§ 3. Относительная погрешность приближенного значения числа 13

Глава 2. Действия над приближенными значениями чисел 14
§ 1. Сложение приближенных значеиий чисел 14
§ 2. Вычитание приближенных значений чисел 15
§ 3. Умножение приближенных значений чисел 16
§ 4. Деление приближенных значений чисел 17
§ 5. Возведение в степень приближенных значений чисел и извлечение из них корня 18
§ 6. Вычисления с наперед заданной точностью 18
§ 7. Решение прямоугольных треугольников с применением микрокалькулятора 19
§ 8. Решение косоугольных треугольников 21
§ 9. Смешаниые задачи 24

Раздел II

Алгебра и начала анализа

Глава 3. Системы уравнений и неравенств 25
§ 1. Решение линейных уравиений с одной переменной 25
§ 2. Решение линейных неравенств с одной переменной 28
§ 3. Системы и совокупности неравенств с одной переменной 29
§ 4. Неравенства с одной переменной, содержащие переменную под зиаком модуля 33
§ 5. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными... 34
§ 6. Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными... 37
§ 7. Решение квадратных уравнений 39
§ 8. Свойства корней квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители 41
§ 9. Решение уравнений, приводимых к квадратным 43
§ 10. Задачи на составление квадратных уравнений 45
§ 11. Графическое решение квадратных неравенств 46
§ 12. Иррациональные уравнения 48
§ 13. Иррациональные неравенства с одной переменной 51
§ 14. Нелинейные системы уравнений и неравенств с двумя переменными 52
§ 15. Задачи на составление систем уравнений 55
§ 16. Простейшие задачи линейного программирования с двумя переменными 55

Глава 4. Функция. Логарифмическая и показательная функции 58
§ 1. Функция. Область определения и множество зиачений функции 58
§ 2. Логарифмическая функция 60
§ 3. Показательные уравнения 62

§ 4. Системы показательных уравнений ... 64
§ 5. Показательные неравенства ... 65
§ 6. Логарифмические уравнения ... 66
§ 7. Системы логарифмических уравнений ... 68
§ 8. Логарифмические неравенства ... 68
§ 9. Смешанные задачи ... 69

Глава 5. Бесконечная числовая последовательность. Предел последовательности ... 71

§ 1. Бесконечная числовая последовательность ... 71
§ 2. Предел числовой последовательности ... 73

Глава 6. Предел функции ... 76

§ 1. Вычисление предела функции ... 76
§ 2. Число *e*. Натуральные логарифмы ... 81
§ 3. Смешанные задачи ... 82
§ 4. Приращение аргумента и приращение функции ... 83
§ 5. Непрерывность функции ... 84
§ 6. Точки разрыва функции ... 86
§ 7. Асимптоты ... 87
§ 8. Решение дробно-рациональных неравенств методом промежутков ... 89

Глава 7. Производная ... 92

§ 1. Скорость изменения функции ... 92
§ 2. Производная ... 94
§ 3. Основные правила дифференцирования. Производные степени и корня ... 95
§ 4. Производная сложной функции ... 98
§ 5. Физические приложения производной ... 100
§ 6. Производные логарифмических функций ... 102
§ 7. Производные показательных функций ... 103
§ 8. Смешанные задачи ... 104

Глава 8. Приложения производной к исследованию функций ... 105

§ 1. Возрастание и убывание функции ... 105
§ 2. Исследование функции на экстремум с помощью первой производной ... 107
§ 3. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной ... 110
§ 4. Наименьшее и наибольшее значения функции ... 111
§ 5. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин ... 111
§ 6. Направление выпуклости графика функции ... 113
§ 7. Точки перегиба ... 114
§ 8. Построение графиков функций ... 115

Глава 9. Тригонометрические функции ... 118

§ 1. Радианное измерение дуг и углов ... 118
§ 2. Единичная числовая окружность ... 121
§ 3. Тригонометрические функции числового аргумента ... 123
§ 4. Знаки, числовые значения и свойства четности и нечетности тригонометрических функций ... 124
§ 5. Основные тригонометрические тождества ... 128
§ 6. Периодичность тригонометрических функций ... 132
§ 7. Обратные тригонометрические функции ... 134
§ 8. Построение дуги (угла) по данному значению тригоиометрической функции ... 135
§ 9. Тригонометрические уравнения ... 140
§ 10. Тригонометрические неравенства ... 145
§ 11. Свойство полупериода синуса и косинуса ... 147

§ 12. Формулы приведения ... 148
§ 13. Смешанные задачи ... 149
§ 14. Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения) ... 150
§ 15. Смешанные задачи ... 154
§ 16. Тригонометрические функции удвоенного аргумента ... 155
§ 17. Тригонометрические функции половинного аргумента ... 157
§ 18. Смешанные задачи ... 169
§ 19. Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму ... 162
§ 20. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение ... 163
§ 21. Преобразования с помощью вспомогательного аргумента ... 166
§ 22. Смешанные задачи ... 168
§ 23. Вычисление пределов тригонометрических функций. Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ ... 169

§ 24. Производные тригонометрических функций ... 171
§ 25. Производные обратных тригонометрических функций ... 173
§ 26. Вторая производная и ее приложения ... 174
§ 27. Гармонические колебания ... 175
§ 28. Основные свойства тригонометрических функций ... 177
§ 29. Построение графиков тригонометрических функций ... 177
§ 30. Смешанные задачи ... 178

Глава 10. Дифференциал функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям ... 180

§ 1. Вычисление дифференциала функции ... 180
§ 2. Абсолютная и относительная погрешности ... 181
§ 3. Вычисление приближенного числового значения функции ... 182
§ 4. Формулы для приближенных вычислений ... 183
§ 5. Вычисления по способу строго учета погрешностей ... 184
§ 6. Смешанные задачи ... 187

Глава 11. Неопределенный интеграл ... 188

§ 1. Основные формулы интегрирования. Непосредственное интегрирование ... 188
§ 2. Геометрические приложения неопределенного интеграла ... 194
§ 3. Физические приложения неопределенного интеграла ... 196
§ 4. Интегрирование методом замены переменной ... 198
§ 5. Интегрирование по частям ... 201
§ 6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций ... 203
§ 7. Смешанные задачи ... 204

Глава 12. Определенный интеграл ... 205

§ 1. Определенный интеграл и его непосредственное вычисление ... 205
§ 2. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной ... 208
§ 3. Интегрирование по частям в определенном интеграле ... 210
§ 4. Приближенное вычисление определенных интегралов ... 211

Глава 13. Приложения определенного интеграла ... 212

§ 1. Применение определенного интеграла к вычислению различных величин. Площадь плоской фигуры ... 212
§ 2. Вычисление пути, пройденного точкой ... 219
§ 3. Вычисление работы силы ... 221
§ 4. Вычисление работы, производимой при поднятии груза ... 223
§ 5. Вычисление силы давления жидкости ... 225
§ 6. Длина дуги плоской кривой ... 227

Глава 14. Комплексные числа 229
§ 1. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация 229
§ 2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме 233
§ 3. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме 235
§ 4. Показательная функция с комплексным показателем. Формулы Эйлера 239
§ 5. Смешанные задачи 242

Глава 15. Дифференциальные уравнения 243
§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными 243
§ 2. Задачи на составление дифференциальных уравнений 245
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 248
§ 4. Неполные дифференциальные уравнения второго порядка 250
§ 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 253
§ 6. Смешанные задачи 256

Глава 16. Элементы комбинаторики и теории вероятностей 257
§ 1. Элементы комбинаторики 257
§ 2. Случайные события. Вероятность события 260
§ 3. Теоремы сложения вероятностей 262
§ 4. Теоремы умножения вероятностей 264
§ 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса 265
§ 6. Повторение испытаний. Формула Бернулли 266
§ 7. Смешанные задачи 267

Раздел III
Геометрия

Глава 17. Векторы на плоскости 269
§ 1. Основные понятия и определения 269
§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число 270
§ 3. Прямоугольная система координат 273
§ 4. Длина вектора. Расстояние между двумя точками на плоскости. Углы, образуемые вектором с осями координат 276
§ 5. Деление отрезка в данном отношении 278
§ 6. Скалярное произведение двух векторов 279
§ 7. Преобразования прямоугольных координат 281
§ 8. Полярные координаты 283
§ 9. Смешанные задачи 284

Глава 18. Прямая на плоскости и ее уравнения 286
§ 1. Общее уравнение прямой. Векторное и каноническое уравнения прямой 286
§ 2. Уравнение прямой в отрезках на осях 289
§ 3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом 290
§ 4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении 293
§ 5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки 294
§ 6. Пересечение двух прямых 295
§ 7. Угол между двумя прямыми 296
§ 8. Условие параллельности двух прямых 299
§ 9. Условие перпендикулярности двух прямых 300
§ 10. Смешанные задачи 302

Глава 19. Кривые второго порядка 304
§ 1. Множества точек на плоскости 304
§ 2. Окружность 306

§ 3. Эллипс 310
§ 4. Гипербола 312
§ 5. Парабола с вершиной в начале координат 315
§ 6. Парабола со смещенной вершиной 318
§ 7. Касательная и нормаль к кривой 321
§ 8. Смешанные задачи 326

Глава 20. Прямые и плоскости в пространстве 327
§ 1. Параллельность прямых и плоскостей 327
§ 2. Перпендикулярность в пространстве. Двугранные и многогранные углы 330
§ 3. Смешанные задачи 333

Глава 21. Векторы в пространстве 335
§ 1. Основные понятия. Прямоугольная система координат в пространстве 335
§ 2. Скалярное произведение векторов в пространстве 339
§ 3. Векторное произведение 340
§ 4. Смешанные задачи 342

Глава 22. Уравнения прямой и плоскости в пространстве 343
§ 1. Плоскость 343
§ 2. Прямая в пространстве 347
§ 3. Плоскость и прямая 350
§ 4. Смешанные задачи 352

Глава 23. Многогранники и площади их поверхностей 353
§ 1. Призма 353
§ 2. Площадь поверхности призмы 355
§ 3. Пирамида. Усеченная пирамида 357
§ 4. Площадь поверхности пирамиды и усеченной пирамиды 360
§ 5. Смешанные задачи 361

Глава 24. Фигуры вращения 363
§ 1. Цилиндр 363
§ 2. Конус. Усеченный конус 364
§ 3. Сфера. Шар 365
§ 4. Вписанная и описанная сферы 367
§ 5. Смешанные задачи 369

Глава 25. Объемы многогранников и фигур вращения 370
§ 1. Объем параллелепипеда и призмы 370
§ 2. Объем пирамиды 372
§ 3. Объем усеченной пирамиды 373
§ 4. Исследования на экстремум в задачах на объемы многогранников 373
§ 5. Объем фигур вращения 374
§ 6. Исследования на экстремум в задачах на объемы фигур вращения 376
§ 7. Вычисление объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла 378
§ 8. Смешанные задачи 381

Глава 26. Площади поверхностей фигур вращения 383
§ 1. Площади боковой и полной поверхностей цилиндра 383
§ 2. Площади боковой и полной поверхностей конуса 384
§ 3. Площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса 385
§ 5. Исследования на экстремум в задачах на площади поверхностей фигур вращения 386

§ 6. Вычисление площадей поверхностей фигур вращения с помощью определенного интеграла ... 387
§ 7. Смешанные задачи ... 389

Раздел IV

Дополнительные главы

Глава 27. Ряды ... 391
§ 1. Числовые ряды ... 391
§ 2. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами ... 395
§ 3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов ... 400
§ 4. Вычисление суммы членов знакочередующегося ряда с заданной точностью и оценка остатка ряда ... 403
§ 5. Степенные ряды ... 405
§ 6. Разложение функций в степенные ряды ... 409
§ 7. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций ... 416
§ 8. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов ... 417

Глава 28. Ряды Фурье ... 419
§ 1. Тригонометрический ряд Фурье ... 419
§ 2. Ряд Фурье для нечетной функции ... 423
§ 3. Ряд Фурье для четной функции ... 426
§ 4. Разложение в ряд Фурье функции, заданной в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ... 428
§ 5. Разложение в ряд Фурье функции, заданной в произвольном промежутке ... 430
§ 6. Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике ... 433

Глава 29. Двойные интегралы ... 435
§ 1. Функции нескольких переменных ... 435
§ 2. Частные производные и полный дифференциал ... 438
§ 3. Двойной интеграл и его вычисление ... 439
§ 4. Двойной интеграл в полярных координатах ... 447
§ 5. Вычисление площади плоской фигуры ... 450
§ 6. Вычисление объема тела ... 451
§ 7. Вычисление площади поверхности ... 454
§ 8. Вычисление массы плоской фигуры ... 459
§ 9. Вычисление статических моментов плоской фигуры ... 460
§ 10. Координаты центра тяжести плоской фигуры ... 463
§ 11. Вычисление моментов инерции плоской фигуры ... 466

Ответы ... 466

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано в соответствии с программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений. Оно содержит большое количество примеров и задач, охватывающих все разделы этой программы.

Известно, что решение задач по математике у студентов часто бывает сопряжено со многими трудностями. Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту преодолеть эти трудности и научить его решению задач по всем разделам курса математики.

При самостоятельном решении задач многие студенты нуждаются в постоянных консультациях относительно приемов и методов их решения, поскольку найти путь к решению задачи без помощи преподавателя или соответствующего пособия ему не под силу. Такие консультации студент может получить в этой книге.

В каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения, описаны приемы решения типовых задач, даны их классификация и образцы записи решения, а затем следуют задачи для самостоятельного решения, к которым в конце книги даны ответы. После изучения каждой темы приводятся смешанные задачи по этой теме, а также зачетная работа. Такая форма изложения позволяет студенту сначала познакомиться с приемами решения типовых задач и оформлением записи их решений, а затем приступить к выработке навыков в их самостоятельном решении.

В настоящем, пятом, издании книги исправлены замеченные опечатки.

Автор выражает искреннюю признательность студентам и преподавателям средних профессиональных учебных заведений, рецензентам всех изданий книги, чьи поправки, замечания и предложения способствовали улучшению данного пособия.

Автор

РАЗДЕЛ I

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Глава 1
ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ

§ 1. АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛА. ГРАНИЦА АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа x и обозначается через α, т. е. $|x-a|=\alpha$.

Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т. е. $|x-a|\leqslant\Delta a$.

Число Δa называется *границей абсолютной погрешности* приближенного числа a. Существует бесконечное множество чисел Δa, удовлетворяющих приведенному определению; поэтому на практике стараются подобрать возможно меньшее и простое по записи число Δa.

По известной границе абсолютной погрешности Δa находятся границы, в которых заключено точное значение числа x:

$$(x=a\pm\Delta a)\leftrightarrow(a-\Delta a\leqslant x\leqslant a+\Delta a).$$

1. Даны приближенные значения числа $x=2/3$; $a_1=0{,}6$; $a_2=0{,}66$; $a_3=0{,}67$. Какое из этих трех приближений является лучшим?

○ Находим:

$$\alpha_1=\left|\frac{2}{3}-0{,}6\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right|=\frac{1}{15},\quad \alpha_2=\left|\frac{2}{3}-0{,}66\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{33}{50}\right|=\frac{1}{150},$$

$$\alpha_3=\left|\frac{2}{3}-0{,}67\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{67}{100}\right|=\frac{1}{300}.$$

Лучшим приближением числа x является $a_3=0{,}67$. ●

2. Длина детали x (см) заключена в границах $33\leqslant x\leqslant 34$. Найти границу абсолютной погрешности измерения детали.

○ Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: $a=(33+34)/2=33{,}5$ (см). Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет 0,5 (см). Величину Δa можно найти и как полуразность верхней и нижней границ, т. е. $\Delta a=(34-33)/2=0{,}5$ (см). Длина детали x, найденная с точностью до $\Delta a=0{,}5$ (см), заключена между приближенными значениями числа x:

$$33{,}5-0{,}5\leqslant x\leqslant 33{,}5+0{,}5;\quad x=33{,}5\pm 0{,}5\ \text{(см)}.\ \bullet$$

3. Найдите абсолютную погрешность округления до единиц следующих чисел: 1) 0,8; 2) 7,6; 3) 19,3; 4) 563,58.

4. Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа x равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x.

5. Найдите границу абсолютной погрешности измерений, полученных в виде неравенства $37<x<38$.

6. Амперметр дает точность $\pm 0{,}02$ А. При измерении силы тока получили 10,63 А. Укажите границы этого числа.

7. Атомная масса водорода $1{,}0082\pm 0{,}0005$, а меди $63{,}44\pm 0{,}15$. Укажите границы приближенных значений этих чисел.

8. Площадь квадрата равна $24{,}5\pm 0{,}3$ (см^2). Найдите границы измерения площади квадрата.

§ 2. ВЕРНЫЕ ЦИФРЫ ЧИСЛА. ЗАПИСЬ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛА. ОКРУГЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ

1. Верные и значащие цифры числа. Цифра m приближенного числа a называется *верной в широком смысле*, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра m.

Цифра m приближенного числа a называется *верной в строгом смысле*, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит половины единицы того разряда, в котором записана цифра m.

В числах, полученных в результате измерений или вычислений и используемых при расчетах в качестве исходных данных, а также в десятичной записи приближенного значения числа, все цифры должны быть верными.

Наиболее употребительна такая запись приближенного числа (например, в математических таблицах), при которой цифры верны в строгом смысле.

Граница абсолютной погрешности Δa находится непосредственно по записи приближенного значения a числа x.

Цифры в записи приближенного числа, о которых не известно, являются ли они верными, называются *сомнительными*.

Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.

2. Округление чисел. При округлении числа a его заменяют числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. Абсолютная величина разности $|a-a_1|$ называется *погрешностью округления*.

При округлении числа до m значащих цифр отбрасывают все цифры, стоящие правее m-й значащей цифры, или при сохранении разрядов заменяют их нулями. При этом если первая слева из отброшенных цифр больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу.

При применении этого правила погрешность округления не превосходит половины единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Округление приближенных значений чисел с сохранением в записи только верных цифр производится до разряда, в котором записана первая справа верная цифра.

9. Найти границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1968 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

○ Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005, т. е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи. ●

10. Указать верные цифры (в широком смысле) следующих чисел: 1) $3{,}73\pm0{,}056$; 2) $3{,}627\pm0{,}0008$; 3) $4{,}732\pm0{,}06$; 4) $561\,274\pm500$.

○ 1) Граница погрешности $\Delta a=0{,}056$ не превосходит единицы разряда десятых (неравенство $0{,}056<0{,}1$ верное). Следовательно, верными являются цифры 3 и 7.

2) Так как $\Delta a=0{,}0008<0{,}001$, то все цифры приближенного числа 3,627 верны.

3) Поскольку $\Delta a=0{,}06<0{,}1$, верными являются цифры 4 и 7.

4) Так как $\Delta a=500<1000$, то верны цифры 5, 6 и 1. ●

11. За приближенное значение числа 26,7 взято число 27. Являются ли цифры числа 27 верными?

○ Так как $|26{,}7-27|=0{,}3<1$, то цифры 2 и 7 — верные в строгом смысле. ●

12. Приближенное значение числа $9{,}587\pm0{,}03$ округлить до первого справа верного разряда.

○ Первая справа верная цифра находится в разряде десятых, поэтому число 9,587 округляем до десятых: $9{,}587\approx9{,}6$. Новое значение границы погрешности Δa равно сумме границы погрешности 0,03 и погрешности округления 0,013, т. е. $\Delta a=0{,}03+0{,}013=0{,}043<0{,}1$. Число 9,6 является приближенным значением числа 9,587 с точностью до 0,1. Цифры 9 и 6 верные. ●

13. Укажите верные цифры (в широком смысле) следующих чисел: 1) $0{,}028\pm0{,}004$; 2) $0{,}463\pm0{,}0008$; 3) $0{,}078\pm0{,}002$; 4) $12{,}78\pm0{,}0005$; 5) 375 ± 20.

14. Назовите верные цифры числа $\pi\approx3{,}14$, считая $\pi\approx3{,}1416$.

15. За приближенное значение числа 999,82 взято число 1000. Укажите верные цифры числа 1000.

16. Сохраните только верные цифры в записи следующих приближенных значений чисел: 1) 280 ± 10; 2) 8900 ± 100; 3) $530\,000\pm100$; 4) 5740 ± 10.

17. Округлите до первого справа верного разряда приближенные значения данных чисел: 1) $0{,}3281\pm0{,}05$; 2) $2{,}0637\pm0{,}0025$; 3) $14{,}0367\pm0{,}8$; 4) $24{,}734\pm0{,}06$.

18. Округлите приближенные значения данных чисел до первого справа верного разряда и запишите эти числа в стандартном виде: 1) $12\,378\pm25$; 2) $15\,763\pm50$; 3) $8\,724\pm25$; 4) 812 ± 6.

19. Укажите границу погрешности приближения, если в записи приближенных значений данных чисел все цифры верные (в широком смысле): 1) $x\approx0{,}56$; 2) $x\approx84{,}3$; 3) $x\approx5{,}10$; 4) $x\approx4{,}100$.

20. Укажите границу погрешности приближения данных чисел, записанных в стандартном виде (все цифры верные в широком смысле): 1) $4{,}28\cdot10^2$; 2) $4{,}2800\cdot10^2$; 3) $2{,}001\cdot10^{-4}$; 4) $3{,}60\cdot10^{-3}$.

§ 3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛА

Относительной погрешностью δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a, т. е. $\delta=\alpha/a$.

Так как абсолютная погрешность α обычно бывает неизвестна, то на практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε, которое заведомо не меньше этого модуля: $|\delta|\leqslant\varepsilon$. Число ε называется *границей относительной погрешности.*

Границей относительной погрешности ε_a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a:

$$\varepsilon_a=\frac{\Delta a}{|a|}. \tag{1.1}$$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений. Относительная погрешность — величина безразмерная, что позволяет сравнивать качество измерений величин разной размерности.

Зависимость относительной погрешности от числа значащих цифр иллюстрируется табл. I.

Из таблицы видно, что три верные значащие цифры обеспечивают точность результата (относительную погрешность) от 0,05 до 0,5%. В технических и других расчетах, не требующих особо высокой точности, достаточно бывает обеспечить точность результата порядка десятых долей процента. Поэтому в технических расчетах принято выполнять вычисления с тремя значащими цифрами. Этим, в частности, объясняется широкое применение в таких расчетах логарифмической линейки, обеспечивающей при вычислениях три верные значащие цифры.

В ряде задач границу абсолютной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины:

$$\Delta a=|a|\,\varepsilon_a. \tag{1.2}$$

Таблица I

Число	Наименьшее число	Наибольшее число	Граница абсолютной погрешности	Относительная погрешность наибольшего числа	Относительная погрешность наименьшего числа
Однозначное	1	9	0,5	0,056 = 5,6%	0,5 = 50%
Двузначное	10	99	0,5	0,005 = 0,5%	0,05 = 5%
Трехзначное	100	999	0,5	0,0005 = 0,05%	0.005 = 0,5%
Четырехзначное	1000	9999	0,5	0,00005 = 0,005%	0,0005 = 0,05%

21. В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты равна 730 см. Что можно сказать о качестве этих двух измерений?

○ Будем считать границу абсолютной погрешности измерений равной $\pm 0{,}5$ см. Найдем относительные погрешности этих измерений:

$$\varepsilon = 0{,}5/16 = 0{,}0312 \approx 3{,}1\% \text{ (при измерении длины карандаша);}$$
$$\varepsilon = 0{,}5/730 = 0{,}000685 \approx 0{,}07\% \text{ (при измерении длины комнаты).}$$

Следовательно, качество измерения длины комнаты значительно выше, чем качество измерения длины карандаша. ●

22. Найти относительную погрешность числа 6,8, если обе цифры его верны в строгом смысле.

○ По условию, $\Delta a = 0{,}05$; поэтому $\varepsilon_a = 0{,}05/6{,}8 = 0{,}00735 = 0{,}7\%$. ●

23. Какие цифры числа 4,86 (0,3%) являются верными?

○ По формуле (1.2) находим

$$\Delta a = 4{,}86 \cdot 0{,}003 = 0{,}0146 < 0{,}02; \quad a = 4{,}86 \pm 0{,}02.$$

Верными являются первые две цифры: 4 и 8. ●

24. При вычислении некоторой величины X стало известно, что $6 < X < 7$. Сколько верных цифр нужно взять, чтобы приближенное значение a имело относительную погрешность не больше 0,3%?

○ Чтобы значение a было наибольшим, примем $a = 6{,}99$. По формуле (1.2) получим $\Delta a = 6{,}99 \cdot 0{,}003 = 0{,}021$. Следовательно, нужно взять две верные цифры. ●

25. Вычислите относительную погрешность числа $\pi \approx 3{,}14$, считая $\pi \approx 3{,}1416$.

26. Округлите точные числа: 1) 286; 2) 45,8; 3) 7,19 — до двух значащих цифр с недостатком и с избытком. Найдите относительную погрешность каждого округления.

27. При решении задачи сумма углов треугольника оказалась равной 179°30′. Найдите относительную погрешность полученного приближенного значения.

28. Найдите относительную погрешность числа 2,6, если обе его цифры верные.

29. Какие цифры числа 1,28 (0,4%) являются верными?

Глава 2
ДЕЙСТВИЯ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ЧИСЕЛ

§ 1. СЛОЖЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b, \tag{2.1}$$

где a и b — приближенные значения чисел; Δa и Δb — границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a+b} = \frac{\Delta(a+b)}{a+b}. \tag{2.2}$$

1. Найти сумму S приближенных значений чисел $6{,}8 \pm 0{,}05$; $4{,}3 \pm 0{,}05$ и $3{,}575 \pm 0{,}0005$.

○ Имеем

$$S = 6{,}8 + 4{,}3 + 3{,}575 = 14{,}675; \quad \Delta S = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}0005 = 0{,}1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах $0{,}05 < 0{,}1005 < 0{,}5$. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц: $S = 14{,}675 \approx 15$. ●

2. Найдите сумму приближенных значений чисел $6{,}54 \pm 0{,}005$; $16{,}022 \pm 0{,}0005$ и $1{,}9646 \pm 0{,}00005$.

3. Вычислите сумму $a = \sqrt{5} + \sqrt{11}$, взяв приближенные значения корней с точностью до 0,001. Найдите a, Δa и ε_a.

4. Вычислите сумму $a = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите a, Δa и ε_a.

5. Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями $r_1 = 4{,}8 \pm 0{,}05$ (Ом), $r_2 = 6{,}25 \pm 0{,}005$ (Ом) и $r_3 = 7{,}725 \pm 0{,}0005$ (Ом). Вычислите общее сопротивление цепи по формуле $R = r_1 + r_2 + r_3$. Найдите R, ΔR и ε_R.

§ 2. ВЫЧИТАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b. \tag{2.3}$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a-b}. \tag{2.4}$$

6. Вычислить разность двух приближенных значений чисел $a = 5{,}863 \pm 0{,}0005$ и $b = 2{,}746 \pm 0{,}0005$. Найти $\Delta(a-b)$ и ε_{a-b}.

○ По формуле (2.3) вычисляем границу абсолютной погрешности разности $a-b$:

$$\Delta(a-b) = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001.$$

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a-b) > 0{,}0005$. Итак, $a-b = 3{,}117 \approx 3{,}12$. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные.

По формуле (2.4) находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b} = 0{,}001/3{,}12 = 0{,}00032 \approx 0{,}03\%. \text{ ●}$$

7. Вычислите разность чисел 8,72 и 2,6532, границы абсолютной погрешности которых соответственно равны 0,005 и 0,00005.

Таблица II

Фуикция	Граница абсолютной погрешности	Граиица относительной погрешности	Номер формулы
$y=ab$	$\Delta y=\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$	(2.5)
$y=abc$	$\Delta y=\lvert bc\rvert\cdot\Delta a+\lvert ac\rvert\cdot\Delta b+\lvert ab\rvert\cdot\Delta c$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}$	(2.6)
$y=a^n$	$\Delta y=na^{n-1}\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=n\frac{\Delta a}{a}$	(2.7)
$y=a^2$	$\Delta y=2a\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=2\frac{\Delta a}{a}$	(2.8)
$y=a^3$	$\Delta y=3a^2\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=3\frac{\Delta a}{a}$	(2.9)
$y=\sqrt{a}$	$\Delta y=\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{2a}$	(2.10)
$y=\sqrt[3]{a}$	$\Delta y=\frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{3a}$	(2.11)
$y=\frac{a}{b}$	$\Delta y=\frac{\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$	(2.12)

8. Вычислите разность $a=\sqrt{13}-\sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите Δa и ε_a.

§ 3. УМНОЖЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций приведены в табл. II.

9. Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел $a=0{,}3862$ и $b=0{,}8$.

○ Имеем $0{,}3862\cdot 0{,}8=0{,}30896$. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле (2.5) находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab}=\frac{0{,}00005}{0{,}3862}+\frac{0{,}05}{0{,}8}=0{,}063.$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности произведения:

$$\Delta(ab)=0{,}30896\cdot 0{,}063=0{,}0195;\quad 0{,}005<0{,}0195<0{,}05.$$

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): $0{,}30896\approx 0{,}3$. ●

10. Вычислить объем цилиндра $V=\pi R^2H$, если $R=45{,}8$ см, $H=78{,}6$ см. Указать верные цифры ответа.

○ Имеем $V=\pi\cdot 45{,}8^2\cdot 78{,}6=517\,000$ (см^3). Используя формулы (2.6) и (2.8) и полагая $\pi\approx 3{,}14$, находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_V=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{2\Delta R}{R}+\frac{\Delta H}{H}=\frac{0{,}005}{3{,}14}+\frac{2\cdot 0{,}05}{45{,}8}+\frac{0{,}05}{78{,}6}=0{,}0044.$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности

$$\Delta V=V\cdot\varepsilon_V=517\,000\cdot 0{,}0044=2270\ \text{(см}^3\text{)}.$$

Верными цифрами являются 5 и 1. ●

11. Найдите произведение чисел $0{,}456\pm 0{,}0005$ и $3{,}35\pm 0{,}005$ и относительную погрешность произведения.

12. Диаметр окружности равен $12{,}5\pm 0{,}05$ (см). Полагая $\pi=3{,}14$, вычислите длину окружности и найдите границу абсолютной погрешности.

13. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда по формуле $V=abh$, если $a=7{,}8$, $b=4{,}6$ и $h=9{,}3$. Сколько верных значащих цифр получится в ответе?

§ 4. ДЕЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ

14. Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел $a=8{,}36\pm 0{,}005$ и $b=3{,}72\pm 0{,}004$.

○ Имеем $8{,}36:3{,}72=2{,}25$. По формуле (2.12) находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{a/b}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}=\frac{0{,}005}{8{,}36}+\frac{0{,}004}{3{,}72}=0{,}002=0{,}2\%.$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности частного:

$$\Delta(a/b)=2{,}25\cdot 0{,}002=0{,}0045.$$

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные. ●

15. Вычислить $X=\frac{a}{b+c}$, если известно, что $a=7{,}2\pm 0{,}05$, $b=3{,}46\pm 0{,}03$, $c=5{,}09\pm 0{,}04$.

○ Находим:

$$X=\frac{a}{b+c}=\frac{7.2}{3{,}46+5{,}09}=0{,}844;$$

$$\varepsilon_X=\frac{\Delta X}{X}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b+\Delta c}{b+c}=\frac{0{,}05}{7{,}2}+\frac{0{,}03+0{,}04}{8{,}55}=0{,}015;$$

$\Delta X=X\cdot\varepsilon_X=0{,}844\cdot 0{,}015=0{,}0127$; $X=0{,}844\pm 0{,}0127$ или $X\approx 0{,}84\pm 0{,}01$. ●

16. Найдите относительную погрешность частного приближенных значений чисел $a=19{,}8\pm 0{,}05$ и $b=48{,}4\pm 0{,}03$.

17. Найдите верные цифры частного приближенных значений чисел $a=68{,}4\pm 0{,}02$ и $b=72{,}8\pm 0{,}04$.

18. Вычислите $X=\dfrac{a+b}{c}$, если $a=8{,}15$, $b=7{,}65$ и $c=6{,}29$.

§ 5. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ НИХ КОРНЯ

19. Вычислить относительную погрешность, допущенную при вычислении площади квадрата, если приближенное значение стороны квадрата равно $68\pm 0{,}5$.

○ По формуле (2.8) получим $\varepsilon_{68^2}=2\cdot 0{,}5/68=0{,}015=1{,}5\%$. ●

20. Вычислить относительную погрешность, допущенную при извлечении квадратного корня из числа $76{,}8\pm 0{,}05$.

○ По формуле (2.10) получим $\varepsilon_{\sqrt{76.8}}=0{,}05/(2\cdot 76{,}8)=0{,}0003=0{,}03\%$. ●

21. Вычислить границу абсолютной погрешности при нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны $a=56{,}8$ см и $b=44{,}6$ см.

○ Имеем $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{56{,}8^2+44{,}6^2}=72{,}21$ (см). По формулам (2.10) и (2.8) находим границу абсолютной погрешности:

$$\Delta c=\frac{\Delta(a^2+b^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\Delta(a^2)+\Delta(b^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a\cdot\Delta a+2b\cdot\Delta b}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a\cdot\Delta a+b\cdot\Delta b}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$=\frac{56{,}8\cdot 0{,}05+44{,}6\cdot 0{,}05}{72{,}21}=0{,}07\approx 0{,}1\ \text{(см)}.$$

Таким образом, $c=72{,}2\pm 0{,}1$ (см). Верными являются первые две значащие цифры 7 и 2. ●

22. Найдите относительную погрешность при вычислении объема куба, если приближенное значение длины ребра куба равно $3{,}8\pm 0{,}05$.

23. Вычислите относительную погрешность $\sqrt[3]{26{,}4}$.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЯ С НАПЕРЕД ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

В предыдущих параграфах рассматривались прямые задачи, когда требовалось оценить погрешность полученного результата по данным действиям над приближенными числами и по данным границам их погрешностей.

В обратной задаче требуется установить, каковы должны быть погрешности данных приближенных чисел, чтобы в результате вычислений была получена наперед заданная допустимая граница погрешности.

24. С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница абсолютной погрешности не превышала 1 см^2? Грубое приближенное значение стороны квадрата равно 9 см.

○ Так как $S=a^2$, то, используя формулу (2.8), получим $\Delta S=2a\cdot\Delta a$, откуда

$$\Delta a=\frac{\Delta S}{2a}=\frac{1}{2\cdot 9}=0{,}0556\approx 0{,}1\ \text{(см)}.$$

Итак, если измерить величину a с погрешностью, ие превышающей 0,1 см, то погрешность площади не превысит 1 см^2. ●

25. С какой точностью надо измерить длину ребра куба a, чтобы при вычислении его объема граница абсолютной погрешности не превышала 100 см^3? Грубое приближенное значение ребра куба равно 80 см.

○ Так как $V=a^3$, то, используя формулу (2.9), получим $\Delta V=3a^2\cdot\Delta a$, т. е.

$$\Delta a=\frac{\Delta V}{3a^2}=\frac{100}{3\cdot 80^2}=0{,}005\ \text{(см)}.$$

Следовательио, если измерить величину a с погрешностью, ие превышающей 0,005 см, то погрешность объема ие превысит 100 см^3. ●

26. С какой точностью надо измерить радиус основания и высоту прямого кругового цилиндра, чтобы при вычислении объема цилиндра по формуле $V=\pi R^2H$ граница абсолютной погрешности ΔV не превышала 100 см^3? Грубые приближенные значения равны $R=40$ см и $H=70$ см.

27. С какой точностью следует измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность не превышала 0,3%? Приближенное значение стороны квадрата 6 м.

§ 7. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА

1. Решение прямоугольяого треугольиика по гипотеиузе я острому углу

28. Дано: $c=865$, $A=38°{,}3$. Найти: B, a, b.

○ Вычислим угол B: $B=90°-A=90°-38°{,}3=51°{,}7$.

Вычислим катет a. Подставив в формулу $a=c\sin A$ числовые зиачения c и A, получим $a=865\sin 38°{,}3$.

Алгоритм вычисления катета a:

865	×	38°,3	F	sin	=	$a=536$.

Вычислим катет b. Подставив в формулу $b=c\sin B$ числовые значеиия, получим $b=865\sin 51°{,}7$. Проделав те же операции, что и при нахождении катета a, иаходим $b=679$.

Контрольное вычисление угла A: подставив в формулу $\operatorname{tg} A = a/b$ найденные числовые значения a и b, получим $\operatorname{tg} A = 536/679$.

Алгоритм вычисления угла A:

536	:	679	=	arc	tg	$A = 38°,3$.

Задача решена верно. *Ответ*: $B = 51°,7$, $a = 536$, $b = 679$. ●

29. Дано: $c = 358$, $A = 5°,5$. Найти: B, a, b.

○ Вычислим угол B: $B = 90° - 5°,5 = 84°,5$.

Вычислим катет a: $a = c \sin A = 358 \sin 5°,5 = 34,3$.

Вычислим катет b. Подставив в формулу $b = c \sin B$ числовые значения, получим $b = 358 \sin 84°,5 = 356$.

Ответ: $B = 84°,5$, $a = 34,3$, $b = 356$. ●

2. Решение прямоугольного треугольника по катету и острому углу

30. Дано: $a = 0,846$, $A = 39°,6$. Найти: B, c, b.

○ Вычислим угол B: $B = 90° - A = 90° - 39°,6 = 50°,4$.

Вычислим гипотенузу c; подставляем в формулу $c = a/\sin A$ числовые значения: $c = 0,846/\sin 39°,6$.

Алгоритм вычисления гипотенузы c:

0,846	:	39°,6	F	sin	=	$c = 1,327$.

Вычислим катет b; подставляем в формулу $b = a/\operatorname{tg} A$ числовые значения: $b = 0,846/\operatorname{tg} 39°,6$.

Алгоритм вычисления катета b.

0,846	:	39°,6	F	tg	=	$b = 1,023$.

Контрольное вычисление угла B: $\sin B = b/c = 1,023/1,327$.

Алгоритм вычисления угла B:

1,023	:	1,327	=	arc	sin	$B = 50°,4$.

Задача решена верно. *Ответ*: $B = 50,4$, $c = 1,327$, $b = 1,023$ ●

3. Решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету

31. Дано: $c = 8,93$, $a = 4,76$. Найти: A, B, b.

○ Вычислим угол A; подставляем в формулу $\sin A = a/c$ числовые значения: $\sin A = 4,76/8,93$.

Применив предыдущий алгоритм, находим $A = 32°,2$.

Вычислим угол B: $B = 90° - 32°,2 = 57°,8$.

Вычислим катет b. Подставив в формулу $b = c \sin B$ числовые значения, имеем $b = 8,93 \sin 57°,8$. Применив алгоритм задачи 28, получим $b = 7,56$.

Контрольное вычисление катета a: $a = b \operatorname{tg} A = 7,56 \cdot \operatorname{tg} 32°,2 = 4,76$.

Задача решена верно. *Ответ*: $A = 32°,2$, $B = 57°,8$, $b = 7,56$. ●

4. Решение прямоугольного треугольника по двум катетам

32. Дано: $a = 12,6$, $b = 16,9$. Найти: A, B, c.

○ Вычислим угол A; подставляем в формулу $\operatorname{tg} A = a/b$ числовые значения: $\operatorname{tg} A = 12,6/16,9$.

Для вычисления угла A применим алгоритм

12,6	:	16,9	=	arc	tg	$A = 36°,7$.

Вычислим угол B: $B = 90° - 36°,7 = 53°,3$.

Вычислим гипотенузу c; подставляем в формулу $c = a/\sin A$ числовые значения: $c = 12.6/\sin 36\ ,8$. Согласно алгоритму задачи 30, получим $c = 21,1$.

Контрольное вычисление катета b: $b = c \sin B = 21,1 \sin 53,2 = 16,9$.

Задача решена верно. *Ответ*: $A = 36°,8$. $B = 53°,2$, $c = 21,1$.

33. Дано: $a = 2,46$, $b = 52,5$. Найти: A, B, c.

○ Вычислим угол A; подставляем в формулу $\operatorname{tg} A = a/b$ числовые значения: $\operatorname{tg} A = 2.46/52,5$; $A = 2°,7$.

Вычислим угол B: $B = 90° - 2°,7 = 87°,3$.

Вычислим гипотенузу c. По формуле $c = a/\sin A$ находим $c = 52,2$. ●

34. Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу: 1) $c = 26,6$, $A = 63°,6$; 2) $c = 64,3$, $B = 48°,9$; 3) $c = 625$, $A = 28°,5$; 4) $c = 0,586$, $B = 42°,7$.

35. Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу: 1) $a = 356$, $A = 52°,3$; 2) $a = 8,57$, $B = 36°,4$; 3) $b = 0,946$, $B = 72°,6$; 4) $a = 47,9$, $A = 56°,8$.

36. Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету: 1) $c = 37,6$, $a = 24,8$; 2) $c = 30,6$, $b = 22,8$; 3) $c = 187$, $b = 112$; 4) $c = 0,627$, $a = 0,458$.

37. Решите прямоугольный треугольник по двум катетам: 1) $a = 0,820$, $b = 0,650$; 2) $a = 420$, $b = 96,8$; 3) $a = 1,46$, $b = 2,37$; 4) $a = 24,8$, $b = 32,6$.

38. Решите равнобедренный треугольник (a — основание; b — боковая сторона; A — угол при вершине; B — угол при основании; h_a — высота, проведенная из вершины A; h_b — высота, проведенная к боковой стороне) по следующим данным: 1) $b = 56,3$, $B = 42°,2$; найдите A, a; 2) $b = 72,4$, $A = 24°,5$; найдите B, a; 3) $a = 126$, $B = 78°,2$; найдите A, b; 4) $a = 5,64$, $A = 136°,4$; найдите B, b; 5) $h_a = 424$, $B = 38°,2$; найдите A, a, b; 6) $h_a = 42,6$, $A = 64°,6$; найдите B, a, b; 7) $a = 48$, $b = 56$; найдите A, B; 8) $h_a = 48,4$, $b = 116$; найдите A, B, a; 9) $a = 3,18$; $h_a = 8,25$; найдите A, B, b; 10) $b = 35,4$, $h_b = 12,6$; найдите A, B, a; 11) $h_b = 52,8$, $A = 56°,2$; найдите B, a, b; 12) $a = 42,8$, $h_b = 32,6$; найдите A, B, b.

§ 8. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Решение треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними

39. Дано: $a = 24,6$, $b = 32,8$, $C = 54°,2$. Найти: c, A, B.

○ Сторону c вычислим по формуле $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, или $c^2=a^2+b^2-2ab\sin(90°-C)$, так как $\cos C=\sin(90°-C)$. Подставив числовые значения во вторую формулу, выполним вычисления:

$$c^2=24{,}6^2+32{,}8^2-2\cdot 24{,}6\cdot 32{,}8\cdot\sin(90°-54°{,}2)=605+1080-$$

$$-49{,}2\cdot 32{,}8\cdot\sin 35°{,}8=605+1080-944=741;\quad c=\sqrt{741}=27{,}2.$$

Углы A и B вычисляем по формулам $\sin A=(a\sin C)/c$ и $\sin B=(b\sin C)/c$:

$$\sin A=(24{,}6\cdot\sin 54°{,}2)/27{,}2=0{,}735,\quad A=47°{,}3;$$

$$\sin B=(32{,}8\cdot\sin 54°{,}2)/27{,}2=0{,}98,\quad B=78°{,}5.$$

Контрольное вычисление: $A+B+C=47°{,}3+78°{,}5+54°{,}2=180°$.
Задача решена верно. *Ответ*: $c=27{,}3$, $A=47°{,}3$, $B=78°{,}5$. ●

2. Решение треугольника по стороне и двум углам

40. Дано: $a=76{,}7$, $B=78°{,}2$, $C=64°{,}6$. Найти: A, b, c.

○ Вычислим угол A: $A=180°-(B+C)=180°-(78°{,}2+64°{,}6)=37°{,}2$. Стороны b и c вычисляем по формулам $b=(a\sin B)/\sin A$ и $c=(a\sin C)/\sin A$:
$b=(76{,}7\cdot\sin 78°{,}2)/\sin 37°{,}2=124$, $c=(76{,}7\cdot\sin 64°{,}6)/\sin 37°{,}2=115$.
Контрольное вычисление угла B: $\sin B=(b\sin C)/c=(124\sin 64°{,}6)/115=0{,}977$, $B=78°{,}1$.
Задача решена верно. *Ответ:* $A=37°{,}2$, $b=124$, $c=115$. ●

3. Решение треугольника по трем сторонам

41. Дано: $a=486$, $b=475$, $c=494$. Найти: A, B, C.

○ Углы A, B и C вычисляем по формулам

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$

$$\cos A=\frac{475^2+494^2-486^2}{2\cdot 475\cdot 494}=0{,}868;\quad A=60°{,}2;$$

$$\cos B=\frac{486^2+494^2-475^2}{2\cdot 486\cdot 494}=0{,}848;\quad B=58°;$$

$$\cos C=\frac{486^2+475^2-494^2}{2\cdot 486\cdot 475}=0{,}881;\quad C=61°{,}8.$$

Контрольное вычисление: $A+B+C=60°{,}2+58°+61°{,}8=180°$.
Задача решена верно. *Ответ:* $A=60°{,}2$, $B=58°$, $C=61°{,}8$.

4. Решение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них

Дано: a, b, A. Найти: c, B, C.
По теореме синусов находим $\sin B=(b\sin A)/a$. При различных значениях a, b, A могут представиться три случая:
1) $\sin B>1$. Решения нет.
2) $\sin B=1$. Угол $B=90°$ (треугольник прямоугольный).
3) $\sin B<1$. Так как существуют два угла между 0 и 180°, для которых синус имеет одно и то же значение, меньшее единицы, то могут существовать два угла, удовлетворяющие условиям задачи (один угол острый, а другой — тупой).

Если $a>b$, то задача имеет одно решение.
Если $a<b$, то задача может иметь два решения.

42. Дано: $a=32$, $b=12$, $A=78°{,}2$. Найти: B, C, c.

○ 1. Вычислим угол B по формуле $\sin B=(b\sin A)/a$:

$$\sin B=(12\sin 78°{,}2)/32=0{,}366;\quad B=21°{,}5.$$

2. Вычислим угол C: $C=180°-(A+B)=180°-(78°{,}2+21°{,}5)=80°{,}3$.
3. Вычислим сторону c по формуле $c=(a\sin C)/\sin A$:

$$c=(32\sin 80°{,}3)/\sin 78°{,}2=32{,}2.$$

4. Произведем контрольное вычисление угла C по формуле $\sin C=(c\sin B)/b$:

$$\sin C=(32{,}2\sin 21°{,}5)/12=0{,}986;\quad C=80°{,}3.$$

Задача решена верно: *Ответ:* $B=21°{,}5$, $C=80°{,}3$ $c=32{,}2$. ●

43. Дано: $a=48$, $b=50$, $A=68°{,}3$. Найти: B, C, c.

○ 1. Вычислим угол B по формуле $\sin B=(b\sin A)/a$:

$$\sin B=(50\sin 68°{,}3)/48=0{,}968;\quad B=75°{,}5.$$

Так как $b>a$, то задача имеет два решения: $B_1=75°{,}5$, $B_2=180°-75°{,}5=104°{,}5$.
Дальнейшее решение проведем для двух случаев.
I случай: $B_1=75°{,}5$.
2. Вычислим угол C: $C=180°-(A+B_1)=180°-(68°{,}3+75°{,}5)=36°{,}2$.
3. Вычислим сторону c по формуле $c=(a\sin C)/\sin A$:

$$c=(48\sin 36°{,}2)/\sin 68°{,}3=30{,}5.$$

4. Произведем контрольное вычисление угла C по формуле $\sin C=(c\sin B)/b$:

$$\sin C=(30{,}5\sin 75°{,}5)/50=0{,}591;\quad C=36°{,}2.$$

II случай: $B_2=104°{,}2$.
2. Вычислим угол C: $C=180°-(A+B_2)=180°-(68°{,}3+104°{,}5)=7°{,}2$.
3. Вычислим сторону c по формуле $c=(a\sin C)/\sin A$:

$$c=(48\sin 7°{,}2)/\sin 68°{,}3=6{,}48.$$

4. Произведем контрольное вычисление угла C по формуле $\sin C=(c\sin B)/b$:

$$\sin C=\frac{6{,}48\sin 104°{,}5}{50}=\frac{6{,}48\sin(180°-104°{,}5)}{50}=\frac{6{,}48\sin 75°{,}5}{50}=0{,}108;\quad C=7°{,}2.$$

Задача решена верно. *Ответ:* $B=75°{,}5$, $C=36°{,}2$, $c=30{,}5$ или $B=104°{,}5$, $C=7°{,}2$, $c=6{,}48$. ●

44. Решите треугольник по двум сторонам и углу, заключенному между ними: 1) $a=72{,}8$, $b=58{,}4$, $C=64°{,}8$; 2) $b=658$, $c=893$, $A=48°{,}2$; 3) $a=5{,}64$, $c=7{,}28$, $B=63°{,}7$; 4) $a=372$, $b=456$, $C=112°{,}3$.

45. Решите треугольник по стороне и двум углам: 1) $b=652$, $A=72°{,}2$, $C=68°{,}6$; 2) $c=42{,}8$, $B=115°{,}2$, $C=42°{,}6$; 3) $a=5{,}18$, $A=39°{,}1$, $C=64°{,}3$; 4) $c=236$, $A=27°{,}3$, $B=76°{,}4$.

46. Решите треугольник по трем сторонам: 1) $a=372$, $b=356$, $c=389$; 2) $a=38{,}6$, $b=16{,}8$, $c=26{,}2$; 3) $a=8{,}25$, $b=5{,}85$, $c=3{,}15$; 4) $a=4{,}48$, $b=5{,}12$, $c=6{,}34$.

47. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них: 1) $a=256$, $b=238$, $A=68°,2$; 2) $a=36,5$, $b=40,8$, $A=62°,7$; 3) $a=8,75$, $b=7,15$, $A=42°,5$; 4) $b=624$, $c=638$, $B=48°,2$.

§ 9. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

48. Найдите относительную погрешность равенства $13/27\approx 1/2$.

49. Число 8,75 найдено с относительной погрешностью 0,4%. Определите границу абсолютной погрешности.

50. Найдите относительную погрешность вычисления площади прямоугольника со сторонами $3,86\pm0,005$ и $4,6\pm0,05$.

51. Найдите относительную погрешность вычисления объема прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a=4,48\pm0,005$, $b=5,8\pm0,05$ и $h=6,72\pm0,005$.

52. При вычислении объема цилиндра по формуле $V=\pi R^2H$ было дано: $\pi=3,14$, $R=36,7$ (см) и $H=86,4$ (см) (все цифры верные). Сколько верных значащих цифр содержится в ответе?

53. Вычислите диагональ c прямоугольника, стороны которого $a=6,24\pm0,005$ (см) и $b=4,8\pm0,05$ (см). Сколько верных значащих цифр содержится в ответе?

54. С какой точностью надо измерить радиус круга, чтобы абсолютная погрешность площади круга не превышала 10 см^2? Грубое приближенное значение $R=8,7$ см.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Вычислите сумму $a=\sqrt{3}+\sqrt{7}$, взяв приближенные значения корней с точностью до 0,001; найдите ε_a.

2) Вычислите площадь параллелограмма, если $a=68,7$ и $h=52,6$. Укажите верные цифры ответа.

3) Найдите границу абсолютной погрешности произведения двух приближенных значений чисел $a=7,36\pm0,004$ и $b=8,61\pm0,005$.

4) Вычислите относительную погрешность $\sqrt{38,9}$.

5) С какой точностью надо измерить радиус круга, чтобы относительная погрешность площади круга не превышала 0,5%? Грубое приближенное значение $R=8$ м.

II вариант

1) Вычислите разность $a=\sqrt{11}-\sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами; найдите ε_a.

2) Вычислите площадь прямоугольника, если $a=78,6$ и $h=48,7$. Укажите верные цифры ответа.

3) Вычислите $X=(a+b)/c$, если $a=82,6$, $b=93,8$ и $c=61,9$. Укажите границу абсолютной погрешности.

4) Вычислите относительную погрешность $\sqrt[3]{68,4}$.

5) С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность площади квадрата не превышала 1%? Приближенное значение стороны квадрата $a=9$ м.

РАЗДЕЛ II
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Глава 3
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В математике любое предложение, относительно которого можно сказать, является ли оно истинным или ложным, называется *высказыванием*.

Если из высказывания A следует высказывание B, то пишут $A\Rightarrow B$ (из A следует B).

Если из высказывания A следует высказывание B, а из высказывания B следует высказывание A, то эти высказывания называют равносильными и пишут $A\Leftrightarrow B$.

Равенство с одной переменной называется *уравнением с одной переменной*, если нужно найти те значения переменной, при которых получается истинное высказывание (верное числовое равенство).

Корнем (или *решением*) уравнения называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается истинное высказывание (верное числовое равенство).

Уравнения называются *равносильными*, если множества их решений равны.

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $ax+b=0$, где a и b — действительные числа.

Решение линейных уравнений и уравнений, сводящихся к линейным, основано на следующих двух теоремах:

1. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.*

2. *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.*

1. Решить уравнения:

$$1)\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{8}=0;\quad 2)\ 6-2x-\frac{2-5x}{3}=\frac{6x-4}{5};\quad 3)\ \frac{2x-9}{2x-5}-\frac{3x}{2-3x}=2;$$

$$4)\ \frac{x+1}{x-3}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{3(3x-1)}{x^2-9};\quad 5)\ \frac{2x-1}{x-3}+\frac{5-4x}{3-x}=6.$$

○ 1) I способ.

$$\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}=0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}x=-\frac{3}{8}\right)\Leftrightarrow\left(x=-\frac{3}{8}:\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow x=-1,5.$$

II способ. Умножив обе части уравнения на 8, получим

$$\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}=0\right)\Leftrightarrow(2x+3=0)\Leftrightarrow(2x=-3)\Leftrightarrow x=-1,5.$$ *Ответ*: $-1,5$.

2) Умножив обе части уравнения на 15, получим

$$(90-30x-5(2-5x)=3(6x-4)\Leftrightarrow(90-30x-10+25x=18x-12)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-30x+25x-18x=-12-90+10)\Leftrightarrow(-23x=-92)\Leftrightarrow x=4.$$ *Ответ*: 4.

3) Это дробное рациональное уравнение, содержащее переменную в знаменателе дроби. Знаменатель каждой из дробей не равен нулю (на нуль делить нельзя). Выполнив преобразования, получим

$$\begin{cases} \dfrac{2x-9}{2x-5}-\dfrac{3x}{2-3x}=2, \\ 2x-5\neq 0, \\ 2-3x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-9)(2-3x)-3x(2x-5)-2(2x-5)(2-3x)}{(2x-5)(2-3x)}=0, \\ 2x-5\neq 0, \\ 2-3x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+2=0, \\ 2x-5\neq 0, \\ 2-3x\neq 0, \end{cases} \quad x=-0{,}25.$$

При $x=-0{,}25$ высказывания $2(-0{,}25)-5\neq 0$ и $2-3(-0{,}25)\neq 0$ истинны; следовательно, $x=-0{,}25$ является корнем данного уравнения. *Ответ*: $-0{,}25$.

4) Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{3(3x-1)}{(x-3)(x+3)}=0, \\ x-3\neq 0, \\ x+3\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x+3)-(x-2)(x-3)-3(3x-1)}{(x-3)(x+3)}=0, \\ x-3\neq 0, \\ x+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{0\cdot x}{(x-3)(x+3)}=0, \\ x-3\neq 0, \\ x+3\neq 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет бесконечное множество корней: корнем служит любое действительное число, кроме $x=-3$ и $x=3$.

5) $$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-3}-\dfrac{5-4x}{x-3}-6=0, \\ x-3\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1-5+4x-6x+18}{x-3}, \\ x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{14}{x-3}=0, \\ x-3\neq 0. \end{cases}$$

Ни при одном значении переменной x дробь не обращается в нуль. Уравнение корней не имеет. ●

2. Сплав олова и меди массой 32 кг содержит 55% олова. Сколько чистого олова надо добавить в сплав, чтобы в новом сплаве содержалось 60% олова?

○ Пусть масса олова, добавленная к исходному сплаву, составляет x кг. Тогда сплав массой $(32+x)$ кг будет содержать 60% олова и 40% меди. Исходный сплав содержал 55% олова и 45% меди, т. е. меди в нем было $32\cdot 0{,}45$ кг. Так как масса меди в исходном и новом сплавах одна и та же, то получим уравнение $0{,}45\cdot 32=0{,}4(32+x)$. Решив его, находим $x=4$, т. е. в сплав надо добавить 4 кг олова. ●

3. Задумано двузначное число, у которого цифра десятков на 2 меньше цифры единиц. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 6. Какое число задумано?

○ Пусть цифра единиц есть x, тогда цифра десятков равна $x-2$ $(x>2)$, задуманное число имеет вид $10(x-2)+x=11x-20$. Сумма цифр числа $x-2+x=2x-2$. Следовательно, разделив $11x-20$ на $2x-2$, получим в частном 4 и в остатке 6. Составляем уравнение: $11x-20=4(2x-2)+6$, так как делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток. Решив это уравнение, получим $x=6$. Итак, было задумано число 46. ●

4. Равносильны ли следующие уравнения:

1) $4x+10=10$ и $2x+3=5$;

2) $x-5=5-x$ и $x-5+2x=5-x+2x$;

3) $\dfrac{x-2}{6}+\dfrac{3x+2}{2}+6=0$ и $x-4=0$?

5. Решите уравнения: 1) $-5x=0$; 2) $-3x+2=0$; 3) $4x-1=0$; 4) $3x+5=3x-1$.

6. Решите уравнения:

1) $3x-\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{3x-2}{2}+\dfrac{x-1}{3}=1$; 2) $1-\dfrac{6-2x}{3}=x-\dfrac{x+3}{2}$;

3) $x+\dfrac{x-3}{8}+\dfrac{x+1}{4}=2x+\dfrac{5-3x}{2}$; 4) $4-\dfrac{6-2x}{3}+x=2x-\dfrac{x+3}{2}$.

7. Решите уравнения:

1) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{5}{2-2x}$;

2) $\dfrac{x+1}{2-2x^2}-\dfrac{2x-1}{x^2-1}+\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{1}{2-2x}=0$;

3) $\dfrac{2x-7}{2x^2-4x+2}+\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{3-3x}-\dfrac{2}{x-1}=0$;

4) $\dfrac{5x-3}{x^2+3x}-\dfrac{x+1}{3x^2+9x}-\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{3}{x}=0$;

5) $\dfrac{2-6x}{3-x}-\dfrac{3x+4}{x-3}=3$; 6) $\dfrac{x-4}{x+4}-\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{16x}{x^2-16}=0$.

8. В бак вместимостью 1800 л накачивают бензин двумя насосами, первый из которых вливает за 1 мин на 20 л меньше, чем второй. За 15 мин бак наполняется на 75%. Сколько литров бензина накачивает первый насос за 1 мин?

9. В сплаве меди и цинка содержится 82% меди. После добавления в сплав 18 кг цинка содержание меди в сплаве понизилось до 70%. Сколько меди и цинка в отдельности стало содержаться в сплаве?

10. Какое количество 26%-ной серной кислоты следует смешать с 40 кг 68%-ной кислоты для получения кислоты 32%-ной концентрации?

11. Разделите 850 на две части так, чтобы 8% первой части в сумме с 24% второй части составили 12% всего числа.

12. В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры его единиц. Если к этому числу прибавить обращенное число, то получится 143. Найдите это число.

13. В равнобедренном треугольнике основание составляет $^2/_3$ боковой стороны. Найдите основание треугольника, если его периметр равен 24 см.

§ 2. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Числовые множества. Множество **Q** всех рациональных чисел и миожество J всех иррациональных чисел образуют множество **R** действительных (вещественных) чисел.

Числовым множеством называется любая совокупность действительных чисел, например: **N** — множество натуральных чисел, **Z** — множество целых чисел.

Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элемеитов; в противном случае оно называется *бесконечным*.

Множество **R** всех действительных чисел называют *числовой прямой*, а сами действительные числа — *точками числовой прямой*.

Наиболее часто встречаются следующие числовые множества:

замкнутый промежуток (или *отрезок*) с началом a и концом b: $a\leqslant x\leqslant b$ или $[a, b]$; число $b-a$ называется *длиной* промежутка с концами a и b;

открытый промежуток (или *интервал*): $a<x<b$ или (a, b);

полуоткрытые промежутки: $a<x\leqslant b$; $a\leqslant x<b$;

бесконечные промежутки (лучи, полупрямые): $a<x<+\infty$; $a\leqslant x<+\infty$; $-\infty<x<a$; $-\infty<x\leqslant a$;

числовая прямая **R** записывается неравенствами $-\infty<x<+\infty$.

Если a является элементом множества A (принадлежит A), то используется обозначение $a\in A$. Например, запись $k\in\mathbf{Z}$ означает, что k — целое число или иуль.

Множество упорядоченных пар действительных чисел называют *числовой плоскостью* и обозначают $\mathbf{R}^2$, а любую упорядоченную пару действительных чисел — *точкой числовой плоскости*.

2. Неравенства и их свойства. *Решением неравенства* называется значение перемеиной, при котором неравенство истинно (обращается в верное числовое неравенство).

Решить неравенство — значит найти множество его решений.

Неравенства называются *равносильными*, если множества их решений равны.

При решении неравенств применяются их основные свойства:

1°. *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получится неравенство, равносильное данному.*

2°. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.*

3°. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.*

4°. Транзитивность: $a<b$ и $b<c\Rightarrow a<c$.

5°. *Правило сложения (вычитания) неравенств*:

$$\frac{\begin{matrix}a<b\\ +\ c<d\end{matrix}}{a+c<b+d}\qquad \frac{\begin{matrix}a<b\\ -\ d>c\end{matrix}}{a-d<b-c},$$

т. е. *неравенства одного смысла можно складывать, а противоположного — вычитать.*

6°. *Правило умножения неравенств*:

$$\left.\begin{matrix}0<a<b\\ 0<c<d\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bd.$$

Следствие: $0<a<b\Rightarrow a^n<b^n$ (для любого $n>0$).

3. Линейные неравенства. *Линейным неравенством* называется неравенство вида $ax+b>0$ (или $ax+b<0$), где a и b — действительные числа.

Если $a>0$, то $(ax+b>0)\Leftrightarrow(x>-b/a)$.

Если $a<0$, то $(ax+b>0)\Leftrightarrow(a<-b/a)$.

14. Решить неравенства:

1) $x+4>2-3x$; 2) $\frac{4-3x}{3}<\frac{2x-1}{4}-\frac{5x-2}{6}$;

3) $(x-3)^2-11\geqslant(x+2)^2$; 4) $(2x-1)^2-8x<(3-2x)^2$;

5) $(x-2)^2-2x+10<(3-x)^2$.

○ 1) $((x+4)>2-3x)\Leftrightarrow(4x>-2)\Leftrightarrow(x>-0{,}5)$. *Ответ*: $-0{,}5<x<+\infty$.

2) Умножив обе части неравенства почленно на 12, получим $(4(4-3x)<3(2x-1)-2(5x-2))\Leftrightarrow(-8x<-15)\Leftrightarrow(x>15/8)$.
Ответ: $15/8<x<+\infty$.

3) $((x-3)^2-11\geqslant(x+2)^2)\Leftrightarrow(x^2-6x+9-11\geqslant x^2+4x+4)\Leftrightarrow(-10x\geqslant 6)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x\leqslant -0{,}6)$. *Ответ*: $-\infty<x\leqslant -0{,}6$.

4) $((2x-1)^2-8x<(3-2x)^2)\Leftrightarrow(4x^2-4x+1-8x<9-12x+4x^2)\Leftrightarrow(0\cdot x<8)$.
Данному неравенству удовлетворяет любое значение x. *Ответ*: $-\infty<x<+\infty$.

5) $((x-2)^2-2x+10<(3-x)^2)\Leftrightarrow(x^2-4x+4-2x+10<9-6x+x^2)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(0\cdot x<-5)$. Данное неравенство решений не имеет. ●

Решите неравенства:

15. 1) $x+6>2-3x$; 2) $4(x-1)\leqslant 2+7x$;
3) $3(x-2)\geqslant 4x-9$; 4) $2(3+5x)<3(7x-4)-4$.

16. 1) $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}<4x-3$; 2) $\frac{37-2x}{3}+x\leqslant\frac{3x-8}{4}-9$;
3) $\frac{7-6x}{2}+10x<\frac{20x+1}{3}+2$; 4) $\frac{5-x}{8}+\frac{3-2x}{4}\geqslant 0$.

17. 1) $(x-1)^2-5\leqslant(x+4)^2$; 2) $(1+x)^2+3x^2<(2x-1)^2-18$;
3) $(2x+1)^2-8\geqslant(3-2x)^2$; 4) $8x^2+(x+1)^2>(2-3x)^2+4$.

18. 1) $4x-7<3+4x$; 2) $(3x-1)^2-6x<(2-3x)^2$;
3) $(x-3)^2>(1+x)^2-8x$.

19. 1) $5x-4>7+5x$; 2) $(x-1)^2-2x+10<(2-x)^2$.

§ 3. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

При решении уравнений и неравенств иногда приходится переходить к системам уравнений или неравенств или к их совокупностям.

Системой двух предложений $A(x)$ и $B(x)$ ($A(x)$ и $B(x)$ — уравнения или неравенства с одной переменной) называется предложение «$A(x)$ и $B(x)$», которое записывают с помощью фигурной скобки: $\begin{cases}A(x),\\ B(x).\end{cases}$

Число x_0 называют *решением системы*, если оно является решением каждого из предложений $A(x)$ и $B(x)$.

Совокупностью двух предложений $A(x)$ и $B(x)$ называется предложение «$A(x)$ или $B(x)$», которое записывают с помощью квадратной скобки:
$$\left[\begin{array}{l} A(x), \\ B(x). \end{array}\right.$$

Число x_0 называется *решением совокупности*, если x_0 является решением хотя бы одного из предложений $A(x)$ или $B(x)$.

Можно рассматривать системы и совокупности трех (и более) предложений, а также совокупности систем или системы совокупностей предложений.

Имеют место следующие равносильные преобразования:

1) переход от уравнения к совокупности уравнений:
$$f(x)\varphi(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0; \end{array}\right.$$

2) переход от неравенства к совокупности неравенств:
$$f(x)\varphi(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)\geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0, \\ \varphi(x)\leqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad f(x)\varphi(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)\leqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0, \\ \varphi(x)\geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3) освобождение от знаменателя в неравенствах:
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)>0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0, \\ \varphi(x)<0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)<0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0, \\ \varphi(x)>0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

20. Решить системы неравенств:

1) $\left\{\begin{array}{l} 6x+2>3x-4, \\ 2x+1>4x-7; \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5-x}{8}+\dfrac{3-2x}{4}>0, \\ \dfrac{3x-5}{2}-\dfrac{2x-1}{3}<-2; \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} 2(2x-1)\geqslant 3(1+x), \\ 1-\dfrac{1}{2}x<\dfrac{3}{4}x-4; \end{array}\right.$ 4) $\left\{\begin{array}{l} 3x-8<2x-10, \\ 2-5x\geqslant 6-6x. \end{array}\right.$

○ 1) $\left\{\begin{array}{l} 6x+2>3x-4, \\ 2x+1>4x-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x>-6, \\ -2x>-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>-2, \\ x<4. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-2<x<4$.

2) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5-x}{8}+\dfrac{3-2x}{4}>0, \\ \dfrac{3x-5}{2}-\dfrac{2x-1}{3}<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x>-11, \\ 5x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<2{,}2, \\ x<0{,}2. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\infty<x<0{,}2$.

3) $\left\{\begin{array}{l} 2(2x-1)\geqslant 3(1+x), \\ 1-\dfrac{1}{2}x<\dfrac{3}{4}x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x-2\geqslant 3+3x, \\ 4-2x<3x-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geqslant 5, \\ x>4. \end{array}\right.$ *Ответ*: $5\leqslant x<+\infty$.

4) $\left\{\begin{array}{l} 3x-8<2x-10, \\ 2-5x\geqslant 6-6x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<-2, \\ x\geqslant 4. \end{array}\right.$ Данная система не имеет решения. ●

21. Решить совокупности неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} 3x-7>7x+9, \\ x-3>-3x+1; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 4-3x<5(2-x), \\ 2-3x>x-18. \end{array}\right.$

○ 1) $\left[\begin{array}{l} 3x-7>7x+9, \\ x-3>-3x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x>16, \\ 4x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4, \\ x>1. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\infty<x<-4$ или $1<x<+\infty$.

2) $\left[\begin{array}{l} 4-3x<5(2-x), \\ 2-3x>x-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x+5x<10-4, \\ -3x-x>-18-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x<6, \\ -4x>-20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x<5. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\infty<x<5$. ●

22. Решить неравенства: 1) $\dfrac{2x-3}{3x-6}>0$; 2) $\dfrac{x-4}{2x-3}\leqslant 0$; 3) $\dfrac{3-6x}{2x+1}>-5$.

○ 1) Решение этого нелинейного неравенства с одной переменной сводится к решению совокупности двух систем линейных неравенств с одной переменной, так как дробь положительна в том случае, если ее числитель и знаменатель имеют или только положительное, или только отрицательное значение. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности двух систем:
$$\frac{2x-3}{3x-6}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x-3>0, \\ 3x-6>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2x-3<0, \\ 3x-6<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>1{,}5, \\ x>2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1{,}5, \\ x<2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<1{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\infty<x<1{,}5$ или $2<x<+\infty$.

2) Дробь отрицательна в том случае, если ее числитель и знаменатель имеют разные знаки. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\frac{x-4}{2x-3}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4\geqslant 0,\\ 2x-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}x-4\leqslant 0,\\ 2x-3>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 4,\\ x<1{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant 4,\\ x>1{,}5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{нет решения,}\\ 1{,}5<x\leqslant 4.\end{array}\right.$$

Ответ: $1{,}5<x\leqslant 4$.

3) $\frac{3-6x}{2x+1}>-5 \Leftrightarrow \frac{3-6x}{2x+1}+5>0 \Leftrightarrow \frac{3-6x+10x+5}{2x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{4x+8}{2x+1}>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x+8>0,\\ 2x+1>0\end{cases}\\ \begin{cases}4x+8<0,\\ 2x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-2,\\ x>-0{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x<-2,\\ x<-0{,}5\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x>-0{,}5,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $-\infty<x<-2$ или $-0{,}5<x<+\infty$. ●

Решите системы неравенств:

23. 1) $\begin{cases}3x+7>7x-9,\\ x-3>-3x+1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x>4x+6,\\ 4x+3<2x+1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}6x-7>5x-1,\\ 3x+6>8x-4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x+2>x-2,\\ x+15>6-2x,\\ x-14<5x+14.\end{cases}$

24. 1) $\begin{cases}5x-3>1+x,\\ \frac{1}{2}-3x<\frac{2}{3}x-5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{7-6x}{2}+10x\leqslant\frac{8x+1}{3}-12,\\ \frac{x+1}{2}>2x-2\frac{1}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{4x-3}{6}+3>\frac{3x}{2}+\frac{5}{8},\\ \frac{4x-3}{8}+\frac{x-5}{5}>\frac{x-1}{2};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{3-2x}{4}\geqslant\frac{5-2x}{8},\\ \frac{4x-15}{3}>-4\frac{2}{3}.\end{cases}$

Решите совокупности неравенств:

25. 1) $\left[\begin{array}{l}4x+7>2x+13,\\ 3x+2<2x+3;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}2-3x<8-5x,\\ 2(4-x)\geqslant x-22;\end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l}5-2x>3x-10,\\ 2(1-2x)>1-5x;\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}2(x-2)>5-x,\\ 1-5x\leqslant 4(2-x).\end{array}\right.$

26. 1) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-26}{3}>-7,\\ \frac{x-10}{4}<-3;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}\frac{3x}{4}>\frac{2(x-1)}{3},\\ \frac{2x+1}{3}>-\frac{3}{4};\end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{2}>\frac{x-1}{3},\\ \frac{2-x}{4}<\frac{3-2x}{3};\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}>x-1,\\ \frac{x+1}{2}<\frac{x-1}{3}+x.\end{array}\right.$

Решите неравенства:

27. 1) $\frac{3a+1}{2a+3}>0$; 2) $\frac{5-m}{2-3m}\geqslant 0$; 3) $\frac{2(4-x)}{1-3x}>0$; 4) $\frac{2-y}{y-4}\geqslant 0$.

28. 1) $\frac{2x+1}{3x+2}<0$; 2) $\frac{1-2y}{4-3y}\leqslant 0$; 3) $\frac{5-a}{a-4}\leqslant 0$; 4) $\frac{x-3}{4-x}<0$.

29. 1) $\frac{2x+3}{3x+2}\leqslant 2$; 2) $\frac{3x+1}{2x-5}>2$; 3) $\frac{2(1-4a)}{2a+1}\geqslant -6$;

4) $\frac{3-5m}{2m-5}<-3$; 5) $\frac{x+4}{2x+3}\leqslant -2$.

§ 4. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Модуль действительного числа x (обозначается $|x|$) равен самому числу x, если x положительно, равен числу $-x$, если x отрицательно, и модуль нуля равен нулю:

$$|x|=\begin{cases}x \text{ при } x\geqslant 0;\\ -x \text{ при } x<0.\end{cases}$$

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используют следующие равносильные преобразования:

$$|x|<a \Leftrightarrow \begin{cases}x>-a,\\ x<a;\end{cases} \qquad (3.1)$$

$$|x|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-a,\\ x>a.\end{array}\right. \qquad (3.2)$$

30. Найти числовое значение выражения $\left|\frac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|$ при $x=-3$.

○ Имеем $\left|\frac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|=\left|\frac{3(-3)^3+1}{2(-3)^2+2}\right|=\left|\frac{-80}{20}\right|=|-4|=4$. ●

31. Решить неравенство $|x-5|<3$.

○ Согласно формуле (3.1), получим систему неравенств

$|x-5|<3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5>-3, \\ x-5<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x<8. \end{cases}$ *Ответ*: $2<x<8$.

Геометрической иллюстрацией решения неравенства служит множество точек, расстояние от которых до точки 5 не превосходит 3. ●

32. Решить неравенство $|x-4|>5$.

○ Согласно формуле (3.1), приходим к совокупности неравенств:

$|x-4|>5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4<-5, \\ x-4>5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>9. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\infty<x<-1$ или $9<x<+\infty$. ●

33. Найдите числовые значения выражений:

1) $\left|\dfrac{5x-7}{x-5}\right|$ при $x=3$; 2) $\left|\dfrac{x^2+5}{x^3-1}\right|$ при $x=-2$;

3) $\left|\dfrac{z}{z-2}\right|$ при $z=1$; 4) $\left|\dfrac{a-1}{a^2+2}\right|$ при $a=-\dfrac{1}{2}$.

34. Решите неравенства: 1) $|x-2|<4$; 2) $|x+8|<1$; 3) $|x+7|<5$; 4) $|x-a|<\varepsilon$; 5) $|x-3|\leqslant 1$.

35. Решите неравенства: 1) $|x+3|>2$; 2) $|x-5|>8$; 3) $|2x-4|>2$; 4) $|3x+6|\geqslant 3$; 5) $|2x-2|\geqslant 1$.

§ 5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Уравнения и системы уравнений с двумя переменными. *Уравнение с двумя переменными* x и y записывается в виде $f(x, y)=0$, где f — выражение с переменными x и y. *Решением* такого *уравнения* называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которых в данное уравнение получается верное числовое равенство $f(x_0, y_0)=0$.

Система уравнений с двумя переменными x и y в общем виде записывается так:

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ g(x, y)=0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел, являющаяся решением каждого из уравнений, входящих в систему.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если множества решений этих систем совпадают.

2. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными. *Определителем второго порядка*, составленным из чисел a_1, b_1, a_2, b_2, называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Числа a_1, b_1, a_2 и b_2 называются *элементами* определителя, причем элементы a_1 и b_2 образуют *главную диагональ*, а элементы a_2 и b_1 — *побочную диагональ*. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta y}{\Delta}. \tag{3.3}$$

Равенства (3.3) называются формулами Крамера.

Здесь Δ_x и Δ_y — определители, получающиеся из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующей переменной столбцом свободных членов.

Если же определитель системы $\Delta=0$, то система является либо *несовместной* (когда $\Delta_x\neq 0$ и $\Delta_y\neq 0$), либо *неопределенной* (когда $\Delta_x=\Delta_y=0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условие несовместности системы можно записать в виде

$$a_1/a_2=b_1/b_2\neq c_1/c_2,$$

а условие неопределенности — в виде

$$a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2.$$

36. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+4y=18, \\ 2x+5y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 6x-4y=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y=2, \\ 4x-6y=3. \end{cases}$

○ 1) Так как $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=15-8=7\neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находим по формулам (3.3):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix}}{7}=\frac{90-76}{7}=2; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}}{7}=\frac{57-36}{7}=3. \quad \textit{Ответ}: \quad (2; 3).$$

2) Находим $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=-12+12=0$. Здесь свободные члены пропорциональны коэффициентам при переменных: $3/6=(-2)/(-4)=1/2$. Поэтому данная система равносильна одному из уравнений, например первому, и, следовательно, имеет бесконечное множество решений.

3) Находим $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=-12+12=0$. Здесь свободные члены не пропорциональны коэффициентам при переменных: $2/4=(-3)/(-6)\neq 2/3$; поэтому данная система несовместна. ●

37. Решить систему уравнений $\begin{cases} ax+2y=a, \\ 8x+ay=2a. \end{cases}$

○ Имеем $\Delta=\begin{vmatrix} a & 2 \\ 8 & a \end{vmatrix}=a^2-16$.

1. При $a\neq\pm4$ система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & a \end{vmatrix}}{a^2-16}=\frac{a^2-4a}{a^2-16}=\frac{a}{a+4};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & a \\ 8 & 2a \end{vmatrix}}{a^2-16}=\frac{2a^2-8a}{a^2-16}=\frac{2a}{a+4}.$$

2. При $a=4$ определитель системы равен нулю и система примет вид

$$\begin{cases} 4x+2y=4, \\ 8x+4y=8. \end{cases}$$

Свободные члены пропорциональны коэффициентам при переменных: $4/8=2/4=4/8$; поэтому при $a=4$ система имеет бесконечное множество решений.

3. При $a=-4$ определитель системы равен нулю и система примет вид

$$\begin{cases} -4x+2y=-4, \\ 8x-4y=-8. \end{cases}$$

Свободные члены не пропорциональны коэффициентам при переменных: $(-4)/8=2/(-4)\neq(-4)/(-8)$; поэтому при $a=-4$ система несовместна. ●

Решите системы уравнений:

38. 1) $\begin{cases} 5x-2y=7, \\ 3x+4y=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+4y=7, \\ 4x+2y=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ -6x+9y=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 5x-y=7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-4y=14, \\ 4x+3y=-27; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x+5y=14, \\ 2x-4y=-20. \end{cases}$

39. 1) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{3x-2}{4}=x+y, \\ 5x-4y=-18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{4}-\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{7-2y}{3}=1-x, \\ 3x-2y=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1-2y}{5}-\dfrac{x}{5}-2y=4, \\ 2(1-y)-x=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3x-5y}{3}-\dfrac{x+2y}{6}=10, \\ 7x-10y=62. \end{cases}$

40. При каком значении a система $\begin{cases} 2x-ay=3, \\ 6x-9y=9 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

41. При каком значении a система $\begin{cases} 4x+3y=12, \\ 2x+ay=7 \end{cases}$ не имеет решений?

42. Найдите двузначное число, которое при делении на сумму его цифр дает в частном 6, а в остатке -8; при делении же на разность цифр десятков и единиц в частном получается 24, а в остатке -2.

43. Если увеличить ширину прямоугольной площадки на 4 м, а ее длину уменьшить на 2 м, то ее площадь увеличится на 8 м^2; если же ширину уменьшить на 3 м, а длину увеличить на 1 м, то ее площадь уменьшится на 23 м^2. Найдите ширину и длину площадки.

44. Двое рабочих получили за работу 765 тыс. руб. Первый работал 10 дней, а второй — 9 дней. Сколько получал в день каждый из них, если известно, что первый рабочий за 5 дней получил на 45 тыс. руб. больше, чем второй за 3 дня?

45. Скорость вертолета на 70 км/ч превышает скорость автомобиля, а отношение их скоростей равно 15 : 8. Найдите скорости вертолета и автомобиля.

46. Величина одного из углов треугольника равна 50°, а разность величин двух других углов равна 10°. Найдите величины углов треугольника.

47. 5% одного числа и 4% другого составляют 16, а 6% первого числа и 8% второго составляют 24. Найдите эти числа.

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определителем третьего порядка, составленным из чисел a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.4)$$

Формулу (3.4) называют *разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.*

Система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq0$, имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad (3.5)$$

где

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Если же $\Delta=0$, то система является либо неопределенной, либо несовместной. В том случае, если система однородная, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

и $\Delta\neq0$, то она имеет единственное решение: $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Если определитель однородной системы $\Delta=0$, то система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному (следствиями которого являются остальные два уравнения). В обоих случаях однородная система имеет бесконечное множество решений.

48. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ По формуле (3.4) получим

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-5+16) - 2(1+32) + 2(2+20) = 33 - 66 + 44 = 11. \bullet$$

49. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x-3y+5z=32, \\ 5x+2y+z=11, \\ 2x-y+3z=14. \end{cases}$$

○ Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(6+1) + 3(15-2) + 5(-5-4) = 49 + 39 - 45 = 43;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} = 86;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} - 32\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = -43;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 129.$$

По формулам (3.5) получаем:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-43}{43} = -1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3. \bullet$$

50. Вычислите определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

51. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y-5z=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-5(y+1)=1, \\ (5/12)y-(1/2)z=-1, \\ (5/6)x+(1/3)y-(3/2)z=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+y-3z=-2, \\ 4x+3y+2z=16, \\ 2x-3y+z=17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y+z=10, \\ x+5y-2z=-15, \\ 2x-2y-z=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x-3y+4z=11, \\ 2x-y-2z=-6, \\ 3x-2y+z=2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x-3y+4z=6, \\ 2x-y-z=0, \\ x-2y+z=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+3y+3z=48, \\ 2x+6y-3z=18, \\ 8x-3y+2z=21; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-2y-z=2, \\ 3x-6y-3z=6, \\ 5x-10y-5z=10. \end{cases}$

§ 7. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — действительные числа, причем $a\neq 0$, а x — переменная, называется *квадратным уравнением*. Если $a=1$, то квадратное уравнение называется *приведенным*, если $a\neq 1$, то — *неприведенным*.

Квадратные уравнения вида $ax^2=0$, $ax^2+c=0$ и $ax^2+bx=0$ называются *неполными*.

Формула корней квадратного уравнеиия $ax^2+bx+c=0$ имеет вид

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{3.6}$$

где $b^2-4ac=D$ — дискриминант квадратного уравиения.

Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней; если $D=0$, то оно имеет один корень $-b/(2a)$; если $D>0$, то оно имеет два корня.

Приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ в случае, когда p — четное число, удобнее решать по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \tag{3.7}$$

52. Решить неполные квадратные уравнения: 1) $5x^2=0$; 2) $x^2+4x=0$; 3) $3x^2-27=0$; 4) $x^2+16=0$.

○ 1) $(5x^2=0)\Leftrightarrow(x^2=0)\Leftrightarrow(x=0)$. *Ответ*: 0.

2) $(x^2+4x=0)\Leftrightarrow(x(x+4)=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=0. \end{array}\right.$ *Ответ*: -4; 0.

3) $(3x^2-27=0)\Leftrightarrow(x^2-9=0)\Leftrightarrow(x^2=9)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3,\\x=3.\end{array}\right.$ *Ответ*: -3; 3.

4) Не существует такого значения переменной x, чтобы сумма x^2+16 приняла значение 0. Следовательно, уравнение корней не имеет. ●

53. Решить квадратные уравнения:

1) $5x^2+7x+2=0$; 2) $x^2-5x+6=0$; 3) $x^2-6x+8=0$;
4) $9x^2+24x+16=0$; 5) $8x^2-16x+9=0$.

○ 1) Используя формулу (3.6), находим

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot5\cdot2}}{2\cdot5}=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{10}=\frac{-7\pm3}{10};$$

$$x_1=\frac{-7-3}{10}=-1,\quad x_2=\frac{-7+3}{10}=-0{,}4.$$

2) По формуле (3.6) получим

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot6}}{2}=\frac{5\pm1}{2},\quad x_1=\frac{5-1}{2}=2,\quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$

3) По формуле (3.7) получим

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1,\quad x_1=2,\quad x_2=4.$$

Это уравнение можно решать и по формуле (3.6).

4) По формуле (3.6) получим

$$x_{1,2}=\frac{-24\pm\sqrt{24^2-4\cdot9\cdot16}}{2\cdot9}=\frac{-24\pm\sqrt{576-576}}{18}.$$

Дискриминант равен нулю, уравнение имеет один корень $x=-24/18=-4/3$.

5) Находим $D=16^2-4\cdot8\cdot9=256-288<0$. Значит, уравнение не имеет действительных корней. ●

54. Решите неполные квадратные уравнения:

1) $x^2-2=0$; 2) $y^2-y=0$; 3) $3x^2+6x=8x^2-9x$;
4) $\frac{3z^2-11}{8}+\frac{74-2z^2}{12}=10$; 5) $\frac{5y^2+9}{6}-\frac{4y^2-9}{5}=3$;
6) $(5x+4)(5x-4)-10(x-2)=4$; 7) $(x+2)^3+19=(x+3)^3$;
8) $(y-3)^3+2y(5y+1)=y^3-(2y-1)^2-26$.

55. Решите квадратные уравнения:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+9x+20=0$;
3) $x^2+x-12=0$; 4) $3x^2-8x+4=0$;
5) $16x^2+16x+3=0$; 6) $5x^2-26x-24=0$;
7) $x^2-4x+4=0$; 8) $2x^2-3x+8=0$.

56. Решите квадратные уравнения:

1) $(x-3)^2+(x-4)^2-(x-5)^2-x=24$;
2) $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{(x-14)^2}{2}+\frac{x(x-9)}{18}-\frac{x}{9}=5$;
3) $\frac{x(x-7)}{3}+\frac{x-4}{3}-\frac{11x}{10}=1$;
4) $\frac{x(2x-3)}{2}+\frac{(3x-1)^2}{5}-\frac{(x+3)^2}{5}=1$.

§ 8. СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Теорема Виета (прямая). *Если уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *имеет действительные корни* x_1 *и* x_2, *то*

$$\begin{cases}x_1+x_2=-b/a,\\x_1x_2=c/a.\end{cases}\tag{3.8}$$

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2, то

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\x_1x_2=q.\end{cases}\tag{3.9}$$

Теорема Виета (обратная). *Если сумма каких-нибудь чисел* x_1 *и* x_2 *равна* $-b/a(-p)$, *а их произведение равно* $c/a(q)$, *то эти числа являются корнями квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$ $(x^2+px+q=0)$.

Формула разложения квадратного трехчлена на линейные множители имеет вид

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\tag{3.10}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, а x — переменная.

57. Используя теорему Виета, найти корни квадратного уравнения $x^2-9x+20=0$.

○ Применяя теорему Виета к данному уравнению, получим

$$\begin{cases}x_1+x_2=9,\\x_1x_2=20.\end{cases}$$

Легко установить, что этой системе удовлетворяют только числа 4 и 5. ●

58. Составить квадратные уравнения, корни которых: 1) $x_1=-2$, $x_2=4$; 2) $x_1=-3/4$, $x_2=-5/6$.

○ 1) Используя теорему Виета (обратную), получим

$$\begin{cases}x_1+x_2=-2+4=2,\\x_1x_2=(-2)\cdot4=-8.\end{cases}$$

Следовательно, заданным корням соответствует квадратное уравнение $x^2-2x+8=0$.

2) На основании теоремы Виета (обратной) имеем

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=-\frac{19}{12},\\x_1x_2=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{8},\end{cases}$$

$$\left(x^2+\frac{19}{12}x+\frac{5}{8}=0\right)\Leftrightarrow(24x^2+38x+15=0).$$ ●

59. Определить знаки корней данного квадратного уравнения, не решая его: 1) $15x^2+x-10=0$; 2) $5x^2-x-10=0$; 3) $2x^2-13x+12=0$; 4) $6x^2+18x+12=0$.

○ 1) Здесь $a>0$, $b>0$, $c<0$, $D=b^2-4ac>0$, так как $c<0$. Следовательно, уравнение имеет два различных корня. Согласно теореме Виета, имеем $\begin{cases} x_1+x_2=-1/15, \\ x_1x_2=-10/15. \end{cases}$ Произведение корней — отрицательное число, поэтому корни имеют разные знаки. Сумма корней — отрицательное число, следовательно, больший по модулю корень отрицателен.

2) Здесь $c<0$, поэтому $D=b^2-4ac>0$ и уравнение имеет два корня. По теореме Виета получим $\begin{cases} x_1+x_2=1/5, \\ x_1x_2=-10/5. \end{cases}$ Произведение корней отрицательно, следовательно, корни имеют разные знаки. Сумма корней — положительное число, поэтому больший по модулю корень положителен.

3) Так как $D=13^2-4\cdot2\cdot12>0$, то уравнение имеет два корня. В силу теоремы Виета получим $\begin{cases} x_1+x_2=13/2, \\ x_1x_2=12/2. \end{cases}$ Произведеиие и сумма корней — положительные числа. Следовательно, оба корня положительны.

4) Находим $D=18^2-4\cdot6\cdot12>0$, т. е. уравнение имеет два корня. По теореме Виета получим $\begin{cases} x_1+x_2=-18/6, \\ x_1x_2=12/6. \end{cases}$ Произведение корней — положительное число, а сумма корней — отрицательное; следовательно, оба корня отрицательны. ●

60. Разложить на линейные множители квадратные трехчлены: 1) $2x^2-5x-12$; 2) $9x^2+6x-8$; 3) $-20x^2+7x+6$.

○ 1) Находим корни трехчлена: $-3/2$ и 4. По формуле (3.10) получим

$$2x^2-5x-12=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)=(2x+3)(x-4).$$

2) Здесь корни трехчлена равны $-4/3$ и $2/3$. Значит,

$$9x^2+6x-8=9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(3x+4)(3x-2).$$

3) Здесь корни трехчлена равны $-2/5$ и $3/4$. Поэтому

$$-20\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=-(5x+2)(4x-3)=(5x+2)(3-4x). \bullet$$

61. Решите устно квадратные уравнения, используя теорему Виета: 1) $x^2-4x+3=0$; 2) $x^2-7x+10=0$; 3) $x^2-2x-15=0$; 4) $x^2-x-12=0$; 5) $x^2+6x+8=0$; 6) $x^2+2x-15=0$.

62. Составьте квадратные уравнения, корнями которых являются числа: 1) 5 и 8; 2) -5 и 2; 3) -4 и -5; 4) $2/3$ и $4/5$; 5) $-1/4$ и $3/8$; 6) $-2/5$ и $-5/6$; 7) $1/4$ и 4; 8) $-1/3$ и 3.

63. Определите знаки корней квадратных уравнений (не решая уравнений): 1) $6x^2+2x-11=0$; 2) $4x^2-x-9=0$; 3) $2x^2-15x++11=0$; 4) $x^2-7x+10=0$; 5) $3x^2+13x+9=0$; 6) $2x^2-12x+9=0$.

64. Разложите на линейные множители квадратные трехчлены: 1) $2x^2-7x+3$; 2) $6a^2+5a-6$; 3) $3y^2-11y-20$; 4) $12x^2+7x+1$; 5) m^2-2m-3; 6) $72x^2-67x+15$.

65. Сократите дроби: 1) $\dfrac{2x^2-9x+10}{2x^2+x-15}$; 2) $\dfrac{3y^2+8y-3}{6y^2+13y-5}$; 3) $\dfrac{6a^2+5a-4}{3a^2+19a+20}$; 4) $\dfrac{4+3a-a^2}{3a^2+4a+1}$; 5) $\dfrac{2x^2+7x+6}{12+5x-2x^2}$; 6) $\dfrac{21y^2+11y-2}{15y^2+16y+4}$.

§ 9. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ К КВАДРАТНЫМ

1. Уравнения, содержащие переменную в знаменателе дроби (дробно-рациональные уравнения с одной переменной)

66. Решить уравнения:

1) $\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{1}{3(3x-7)}-\dfrac{1}{x}=0$; 2) $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{64}{x^2-16}$.

○ 1) $\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{1}{3(3x-7)}-\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x(3x-7)-2x(x-2)-6(x-2)(3x-7)}{6x(x-2)(3x-7)}=0,\Leftrightarrow\\ 6x(x-2)(3x-7)\neq0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}11x^2-61x+84=0,\\ 6x(x-2)(3x-7)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\dfrac{6}{11},\\ x=3\end{array}\right.\\ 6x(x-2)(3x-7)\neq0.\end{cases}$$

При $x=2\frac{6}{11}$ высказывание $6\cdot2\frac{6}{11}\left(2\frac{6}{11}-2\right)\left(3\cdot2\frac{6}{11}-7\right)\neq0$ истинно; при $x=3$ высказывание $6\cdot3\cdot(3-2)\cdot(3\cdot3-7)\neq0$ истинно. Таким образом, получаем *ответ*: $2\frac{6}{11}$; 3.

2) $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{64}{x^2-16}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+4)^2+(x-4)^2-64}{(x-4)(x+4)}=0,\\ (x-4)(x+4)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-16=0,\\ (x-4)(x+4)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=4\end{array}\right.\\ (x-4)(x+4)\neq0.\end{cases}$$

При $x=\pm4$ обе части исходного уравнения не имеют смысла. Поэтому корни квадратного уравнения $x^2-16=0$ не являются корнями данного уравнения. Уравнение не имеет решенй. ●

2. Биквадратные уравнения

67. Решить уравнение $x^4-13x^2+36=0$.

○ Для решения биквадратного уравнения применяем подстановку $x^2=z$. Тогда получим квадратное уравнение $z^2-13z+36=0$, корни которого

$z_1=4$ и $z_2=9$. Для нахождения корней исходного уравнения решаем совокупность уравнений:

$$(x^4-13x^2+36=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4,\\x^2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\pm 2,\\x_{3,4}=\pm 3,\end{array}\right.$$ *Ответ*: $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 3$. ●

3. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители

68. Решить уравнения: 1) $x^3-2x^2-8x=0$; 2) $x^3-5x^2-x+5=0$.

○ 1) Очевидно, что левая часть уравнения раскладывается на множители. Для нахождения корней исходного уравнения приравниваем каждый сомножитель нулю и решаем совокупность уравнений:

$$(x^3-2x^2-8x=0)\Leftrightarrow(x(x^2-2x-8)=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x^2-2x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=-2,\\x=4.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_4=4$.

2) Разложим на множители левую часть уравнения и приравняем каждый сомножитель нулю. Решив полученную совокупность уравнений, получим корни исходного уравнения:

$$x^3-5x^2-x+5=0\Leftrightarrow(x^2(x-5)-(x-5)=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow((x-5)(x+1)(x-1)=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=0,\\x+1=0,\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5,\\x=-1,\\x=1.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=5$. ●

4. Двучленные уравнения

69. Решить уравнения: 1) $x^4-16=0$; 2) $x^3-8=0$.

○ 1) $(x^4-16=0)\Leftrightarrow((x^2-4)(x^2+4)=0)\Leftrightarrow((x+2)(x-2)(x^2+4)=0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=0,\\x-2=0,\\x^2+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=2,\\\text{нет решения.}\end{array}\right.$$ *Ответ*: $x_1=-2$, $x_2=2$.

2) $(x^3-8=0)\Leftrightarrow((x-2)(x^2+2x+4)=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0,\\x^2+2x+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\\text{нет решения.}\end{array}\right.$

Ответ: $x=2$. ●

70. Решите уравнения:

1) $\dfrac{14}{x^2-9}+\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{4-x}{x+3}-\dfrac{7}{x+3}=0$;

2) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{x-4}$;

3) $\dfrac{2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x^3+1}$;

4) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x}=\dfrac{4(1+x^2)}{x^2}$;

5) $\dfrac{1}{2(1-y)}+\dfrac{5}{4y^2+4y+4}=\dfrac{3y}{y^3-1}$;

6) $\dfrac{18z+7}{z^3-1}+\dfrac{30}{1-z^2}+\dfrac{13}{z^2+z+1}=0$;

7) $\dfrac{6-x}{3x^2-12}+\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{x-2}=1$;

8) $\dfrac{6}{x^2-9}+\dfrac{13-x}{3+x}-\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{2}{3-x}=0$.

71. Решите уравнения:

1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-34x^2+225=0$;

3) $9x^4-37x^2+4=0$; 4) $4x^4-65x^2+16=0$.

72. Разложите на линейные множители: 1) $4x^4-17x^2+4$; 2) x^4-125x^2+484.

73. Решите уравнения:

1) $x^3-4x^2-11x+30=0$; 2) $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0$;

3) $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$; 4) $2x^3-7x^2+2x+3=0$;

5) $x^4-13x^2-12x=0$; 6) $x^3-2x^2-5x+6=0$.

74. Составьте уравнения с корнями: 1) -1; 2; -3; 2) $-1/2$; $-1/3$; 1.

75. Решите уравнения: 1) $x^4-81=0$; 2) $125x^3+8=0$; 3) $16x^4-625=0$; 4) $125x^3-27=0$.

§ 10. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

76. Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 552. Найдите эти числа.

77. Числитель дроби на 2 меньше ее знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной ей дробью, то в сумме получится 34/15. Найдите эту дробь.

78. Найдите двузначное число, если известно, что цифра единиц искомого числа на 2 больше цифры его десятков и что произведение числа на сумму его цифр равно 144.

79. Периметр прямоугольника равен 42 см, а длина его диагонали равна 15 см. Найдите длины сторон прямоугольника.

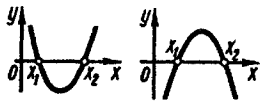
80. Площадь прямоугольника равна 192 см^2, а его периметр равен 56 см. Найдите длины сторон прямоугольника.

81. Периметр прямоугольника равен 40 см, а сумма площадей квадратов, построенных на смежных сторонах прямоугольника, равна 208 см^2. Найдите длины сторон прямоугольника.

82. Если каждый участник шахматного турнира сыграет по одной партии с каждым из остальных участников, то всего будет сыграно 153 партии. Сколько человек участвуют в турнире?

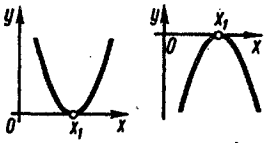
83. Две бригады, работая совместно, закончили уборку урожая на участке за 4 дня. За сколько дней закончила бы уборку урожая на этом участке каждая бригада в отдельности, если одна из бригад могла бы закончить уборку на 6 дней быстрее другой?

84. Две дорожно-ремонтные бригады, работая вместе, ремонтировали в день по 4,5 км пути. Вторая бригада работала на 2 дня меньше первой, но каждой бригаде пришлось отремонтировать по 20 км пути. Сколько километров пути каждая бригада ремонтировала в день?



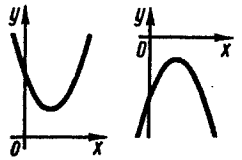
а) б)

Рис. 1



а) б)

Рис. 2



а) б)

Рис. 3

85. При испытании на экономичность двух двигателей одинаковой мощности было установлено, что один израсходовал 600 г бензина, а второй, работавший на 2 ч меньше, израсходовал 384 г. Если бы первый двигатель расходовал в час столько бензина, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то за то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаковым. Сколько бензина в час расходовал каждый двигатель?

86. Сумма длин окружностей переднего и заднего колес повозки равна 5 м. На протяжении 60 м переднее колесо сделало на 9 оборотов больше, чем заднее на протяжении 63 м. Найдите длины окружностей колес.

87. По круговой дорожке длиной 2 км движутся в одном направлении два конькобежца, которые сходятся через каждые 20 мин. Найдите часовую скорость каждого конькобежца, если первый из них пробегает окружность на 1 мин быстрее второго.

88. Расстояние между городами равно 960 км. Пассажирский поезд проходит это расстояние со скоростью, на 20 км/ч большей, чем товарный. Найдите скорости поездов, если весь путь пассажирский поезд проходит на 4 ч быстрее товарного.

89. Велосипедисту надо было проехать расстояние в 30 км. Выехав на 3 мин раньше назначенного срока, велосипедист ехал со скоростью, меньшей на 1 км/ч, и прибыл на место назначения вовремя. Найдите скорость, с которой ехал велосипедист.

§ 11. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ (или $ax^2+bx+c<0$), где $a\neq 0$.

Известно, что графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с ветвями, направленными вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$.

В зависимости от знака дискриминанта уравнения $ax^2+bx+c=0$ возможны три случая:

1) $b^2-4ac>0$ (уравнение имеет два различных корня и парабола пересекает ось Ox в двух точках; рис. 1, *а*, *б*);

2) $b^2-4ac=0$ (уравнение имеет два равных корня и вершина параболы лежит на оси Ox; рис. 2, *а*, *б*);

3) $b^2-4ac<0$ (уравнение не имеет корней и парабола не пересекает ось Ox; рис. 3, *а*, *б*).

Поэтому имеем шесть случаев различных положений параболы, являющейся графиком функции $y=ax^2+bx+c$ (рис. 1—3).

Используя графики и знак дискриминанта, можно легко решать квадратные неравенства.

90. Решить неравенства: 1) $2x^2+3x-2>0$; 2) $2x^2-x-3\leqslant 0$; 3) $-2x^2+11x-14>0$; 4) $-3x^2+5x+12<0$; 5) $9x^2+6x+1>0$; 6) $-x^2+6x-9>0$; 7) $x^2+8x+16<0$; 8) $-x^2+10x-25<0$; 9) $2x^2-5x+7>0$; 10) $-3x^2+2x-2>0$.

○ 1) Здесь $f(x)=2x^2+3x-2$, $D=9+16=25>0$; имеем $(2x^2+3x-2=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-2,\\x_2=0{,}5.\end{array}\right.$ Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1=-2$ и $x_2=0{,}5$. Так как $a=2>0$, то ветви параболы направлены вверх (см. рис. 1, *а*). Неравенство $2x^2+3x-2>0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox, т. е. в промежутках $-\infty<x<-2$ или $0{,}5<x<+\infty$.

2) Здесь $f(x)=2x^2-x-3$, $D=1+24=25>0$, $(2x^2-x-3=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1,\\x_2=1{,}5;\end{array}\right.$ следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $x_1=-1$ и $x_2=1{,}5$. Ветви параболы направлены вверх, поскольку $a>0$ (см. рис. 1, *а*). Неравенство $2x^2-x-3\leqslant 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат на оси Ox и ниже оси Ox, т. е. в промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1{,}5$.

3) Здесь $f(x)=-2x^2+11x-14$, $D=121-112=9>0$, $(2x^2-11x+14=0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2,\\x_2=3{,}5.\end{array}\right.$ Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1=2$ и $x_2=3{,}5$. Ветви параболы направлены вниз, так как $a=-2<0$ (см. рис. 1, *б*). Неравенство $-2x^2+11x-14>0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox, т. е. в промежутке $2<x<3{,}5$.

Данное неравенство можно решить и другим способом. Умножив обе его части на (-1), получим $2x^2-11x+14<0$. Точки пересечения с осью Ox остаются прежними: $x_1=2$ и $x_2=3{,}5$, но $a=2>0$ (см. рис. 1, *а*). Неравенство $2x^2-11x+14<0$ выполняется при значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси Ox, т. е. в промежутке $2<x<3{,}5$. Получили тот же ответ.

4) Здесь $f(x)=-3x^2+5x+12$, $D=25+144=169>0$, $(3x^2-5x-12=0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-3/4,\\x_2=3.\end{array}\right.$ Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1=-4/3$ и $x_2=3$. Ветви параболы направлены вниз, поскольку $a<0$ (см. рис. 1, *б*). Неравенство $-3x^2+5x+12<0$ выполняется при значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси Ox, т. е. в промежутках $-\infty<x<-4/3$ или $3<x<+\infty$.

5) Здесь $f(x)=9x^2+6x+1$, $D=36-36=0$, $(9x^2+6x+1=0)\Leftrightarrow(x=-1/3)$. Ветви параболы направлены вверх, так как $a>0$ (см. рис. 2, *а*). Неравенство $9x^2+6x+1>0$ выполняется при всех значениях x, кроме $x=-1/3$, поскольку все точки параболы, кроме точки касания, лежат выше оси Ox. Исключив точку $x=-1/3$, получим промежутки $-\infty<x<-1/3$ или $-1/3<x<+\infty$.

6) Здесь $f(x)=-x^2+6x-9$, $D=36-36=0$, $(x^2-6x+9=0)\Leftrightarrow(x=3)$. Ветви параболы направлены вниз, так как $a<0$ (см. рис. 2, *б*). Неравенство $-x^2+6x-9>0$ выполняется при значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox, но таких точек нет (ветви параболы направлены вниз). Следовательно, неравенство не имеет решения.

7) Здесь $f(x)=x^2+8x+16$, $D=64-64=0$, $(x^2+8x+16=0)\Leftrightarrow(x=-4)$. Ветви параболы направлены вверх, поскольку $a>0$ (см. рис. 2, *а*). Неравенство $x^2+8x+16<0$ выполняется при значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси Ox, но таких точек у параболы нет (ветви параболы направлены вверх). Следовательно, неравенство не имеет решения.

8) Здесь $f(x)=-x^2+10x-25$, $D=100-100=0$, $(x^2-10x+25=0)\Leftrightarrow(x=5)$. Ветви параболы направлены вниз, так как $a<0$ (см. рис. 2, *б*). Неравенство $-x^2+10x-25<0$ выполняется при значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси Ox. Исключив точку $x=5$, получим промежутки $-\infty<x<5$ или $5<x<+\infty$.

9) Здесь $f(x)=2x^2-5x+7$, $D=25-56<0$. Парабола не пересекает ось Ox. Ветви параболы направлены вверх, так как $a>0$ (см. рис. 3, *а*). Неравенство $2x^2-5x+7>0$ выполняется при всех значениях x, поскольку все точки параболы лежат выше оси Ox; поэтому $-\infty<x<+\infty$.

10) Здесь $f(x)=-3x^2+2x-2$, $D=4-24<0$. Парабола не пересекает ось Ox. Ветви параболы направлены вниз, так как $a<0$ (см. рис. 3, *б*). Неравенство $-3x^2+2x-2>0$ выполняется при всех x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox, но таких точек нет (ветви параболы направлены вниз). Неравенство не имеет решения. ●

91. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{2x+1}>0$.

○ Умножив обе части неравенства на положительное число $(2x+1)^2$, равное квадрату знаменателя, получим равносильное неравенство $(x-1)(2x+1)>0$, где $a=2>0$ и $x_1=-1/2$, $x_2=1$. Ветви параболы направлены вверх (см. рис. 1, *а*), и следовательно, неравенство выполняется при тех x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox. Решением неравенства являются промежутки $-\infty<x<-1/2$ или $1<x<+\infty$.

92. Решите неравенства:

1) $3x^2+7x-6>0$; 2) $-4x^2+13x+12\geqslant 0$;
3) $x^2-5x+6<0$; 4) $-x^2+2x+8\leqslant 0$;
5) $4x^2-4x+1\geqslant 0$; 6) $-9x^2+12x-4>0$;
7) $-x^2+12x-36\leqslant 0$; 8) $16x^2-8x+1<0$;
9) $2x^2-4x+13>0$; 10) $-3x^2+2x-5>0$;
11) $3x^2-2x+5<0$; 12) $-4x^2+x-5<0$;
13) $-3x^2+5x+2>0$; 14) $x^2-8x-20\leqslant 0$;
15) $-x^2-6x+27<0$; 16) $2x^2-13x+20>0$;
17) $2x^2-x+4<0$; 18) $-x^2+12x-36\leqslant 0$;
19) $x^2-1>0$; 20) $x^2-4<0$; 21) $2x^2-5x<0$; 22) $-x^2+3x>0$.

93. Решите неравенства:

1) $\dfrac{2x-3}{3x-2}>0$; 2) $\dfrac{2-3x}{2x+7}\geqslant 0$; 3) $\dfrac{8-3x}{7x-2}<0$;

4) $\dfrac{5x+8}{3x-7}<0$.

§ 12. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называется *иррациональным*.

Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению, что достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и корни, которые не являются корнями исходного уравнения («посторонние» корни). Чтобы выявить «посторонние» корни, все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и «посторонние» корни отбрасывают.

Исходное иррациональное уравнение равносильно смешанной системе, состоящей из уравнения-следствия и ограничений, определяемых областью допустимых значений переменной. В этом случае «посторонние» корни не будут входить в область допустимых значений переменной и проверять их подстановкой в исходное уравнение не требуется.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному.

94. Решить иррациональные уравнения:

1) $\sqrt[3]{x-4}=2$; 2) $\sqrt{x^2-7}=3$; 3) $\sqrt{x}=x-6$;
4) $\sqrt{x^2-12}=\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$;
6) $\sqrt{x-3}=x-9$; 7) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5$;
8) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$; 9) $\sqrt{5x-4}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$;
10) $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$.

○ 1) $(\sqrt[3]{x-4}=2)\Leftrightarrow((\sqrt[3]{x-4})^3=2^3)\Leftrightarrow(x-4=8)\Leftrightarrow x=12$.

2) $((\sqrt{x^2-7})^2=3^2)\Leftrightarrow(x^2-7=9)\Leftrightarrow(x^2=16)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=4.\end{array}\right.$

Подставив значения -4 и 4 в исходное уравнение, получим $\sqrt{(-4)^2-7}=3$ и $\sqrt{4^2-7}=3$, т. е. найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

3) $\sqrt{x}=x-6\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=(x-6)^2,\\ x-6\geqslant 0,\\ x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-13x+36=0,\\ x\geqslant 6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=9\end{array}\right.\Leftrightarrow x=9.\\ x\geqslant 6\end{array}\right.$

При решении этого уравнения мы использовали равносильные переходы, учитывая, что корень четной степени из положительного числа есть положительное число.

4) $\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{x^2-12})^2=(\sqrt{x})^2,\\ x\geqslant 0,\\ x\geqslant\sqrt{12}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-x-12=0,\\ x\geqslant\sqrt{12}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=4\end{array}\right.\\ x\geqslant\sqrt{12}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4.$

5) Покажем, что данное уравнение не имеет решений. По определению корня четной степени получим

$$\left\{\begin{array}{l}x-5\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 5,\\ x\leqslant 3.\end{array}\right.$$

Эта система неравенств не имеет решения.

6) $\sqrt{x-3}=x-9\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-3=(x-9)^2,\\ x-9\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-19x+84=0,\\ x\geqslant 9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=12\end{array}\right.\Leftrightarrow\\ x\geqslant 9\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=12$.

7) $\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1})^2=25,\\ x\geqslant 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\sqrt{(x-1)(2x-1)}=27-3x,\\ x\geqslant 1,\\ 27-3x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2\sqrt{(x-1)(2x-1)})^2=(27-3x)^2,\\ x\geqslant 1,\\ x\leqslant 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-150x+725=0,\\ 1\leqslant x\leqslant 9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=145\end{array}\right.\\ 1\leqslant x\leqslant 9.\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

8) $\begin{cases}(\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5})^2=1,\\ 2x-4\geqslant 0,\\ 2x-4>x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{(2x-4)(x+5)}=3x,\\ x>2,\\ x>9\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-24x+80=0,\\ x>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=20,\end{array}\right.\\ x>9\end{cases}\Leftrightarrow x=20.$$

9) $\begin{cases}(\sqrt{5x-4}+\sqrt{2x-1})^2=(\sqrt{3x+1})^2,\\ x\geqslant 4/5\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x-4+2\sqrt{(5x-4)(2x-1)}+2x-1=3x+1,\\ x\geqslant 4/5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{10x^2-13x+4}=6-4x,\\ x\geqslant 4/5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{10x^2-13x+4}=3-2x,\\ x\geqslant 4/5,\\ x\leqslant 3/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x^2-13x+4=9-12x+4x^2,\\ 4/5\leqslant x\leqslant 3/2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2-x-5=0,\\ 4/5\leqslant x\leqslant 3/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-5/6,\\ x=1\end{array}\right.\\ 4/5\leqslant x\leqslant 3/2\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

10) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}},\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x(x+2)}+x+2=4,\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2x}=2-x,\\ x\geqslant 0,\\ x\leqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x=4-4x+x^2,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x=4,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2/3.\ \bullet$$

95. Не решая уравнений, объясните, почему каждое из них не может иметь корней:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=0$; 2) $\sqrt{4x-3}=-4$;

3) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x-1}=-2$; 4) $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=-1$;

5) $\sqrt{x-7}-\sqrt{6-x}=3$; 6) $\sqrt{x}-\sqrt{-3-x}=1$.

Решите уравнения:

96. 1) $\sqrt[3]{x(x+6)}=x$; 2) $\sqrt{x}=x-2$;

3) $\sqrt{x+2}=x-4$; 4) $\sqrt{x^2+9}=2x-3$;

5) $\sqrt{x^2-9}=3x-11$; 6) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$;

7) $\sqrt{x^2-9}=x^2-21$; 8) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.

97. 1) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1$; 2) $\sqrt{5x+20}-\sqrt{x+8}=2$; 3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$; 4) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$; 5) $\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2$; 6) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$; 7) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$; 8) $\sqrt{x-3}\times\sqrt{2x+2}=x+1$.

98. 1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=\sqrt{2x-8}$; 2) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3x+19}$;

3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}$; 4) $\sqrt{3x+3}+\sqrt{4x-4}=\sqrt{6x+13}$;

5) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x-3}=\sqrt{2x-7}$; 6) $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-5}=\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-5}}$;

7) $\dfrac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$; 8) $\sqrt{x+15}-\sqrt{x-1}=\dfrac{10}{\sqrt{x-1}}$.

§ 13. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Решение иррацнонального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств.

Эти системы решаются при наложенни ограничений на переменную н возведении обеих частей неравенства в одну и ту же степень.

Рассмотрим приемы решений простейшнх иррациональных неравенств с одной переменной.

99. Решить иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{3x+13}<x+1$; 2) $\sqrt{x^2-1}>x-3$; 3) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\geqslant 1/\sqrt{5}$.

○ 1) Данное неравенство равносильно системе рациональных неравенств:

$$\sqrt{3x+13}<x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0,\\ 3x+13\geqslant 0,\\ 3x+13<x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ x\geqslant -13/3,\\ x^2-x-12>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>4.\end{array}\right.\end{cases}$$

Решеннем этой системы является совокупность решений двух систем:

$$\begin{cases}x>-1,\\ \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1,\\ x<-3\end{cases}\\ \begin{cases}x>-1,\\ x>4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{нет решения,}\\ x>4\end{array}\right.\Leftrightarrow x>4.$$ *Ответ*: $4<x<\infty$.

2) Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x^2-1}>x-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ x^2-1>x^2-6x+9,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0,\\ x^2-1\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далее находим решение этой совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ x^2-1>x^2-6x+9\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0,\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x>5/3\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ \left[\begin{array}{l}x\leqslant -1,\\ x\geqslant 1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 3,\\ \begin{cases}x<3,\\ \left[\begin{array}{l}x\leqslant -1\\ x\geqslant 1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 3,\\ x\leqslant -1,\\ 1\leqslant x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty<x<-1 \\ 1<x<\infty. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\infty<x<-1$ или $1<x<\infty$.

3) Данное неравенство равносильно системе

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\geqslant 1/\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ 1-x>0, \\ \sqrt{1-x}>\sqrt{x}, \\ (\sqrt{1-x}-\sqrt{x})^2\geqslant (1/\sqrt{5})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x<1, \\ 1-x>x, \\ 1-x-2\sqrt{x(1-x)}+x\geqslant 1/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x<1, \\ x<1/2, \\ 4/5\geqslant 2\sqrt{x(1-x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x<1/2, \\ 2/5\geqslant \sqrt{x(1-x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x<1/2, \\ 4/25\geqslant x(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x<1/2, \\ x^2-x+4/25\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x<1/2, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1/5, \\ x\geqslant 4/5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0\leqslant x<1/2, \\ x\leqslant 1/5 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\leqslant x<1/2, \\ x\geqslant 4/5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leqslant x\leqslant 1/5, \\ \text{нет решения} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant 1/5.$$

Ответ: $0\leqslant x\leqslant 1/5$ ●

Решите неравенства:

100. 1) $\sqrt{x+12}<x$; 2) $\sqrt{x+3}<x+1$; 3) $\sqrt{2x+9}<3-x$; 4) $\sqrt{x^2-1}<5-x$; 5) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 6) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$.

101. 1) $\sqrt{x}>-1$; 2) $\sqrt{2x-5}>7$; 3) $\sqrt{x+2}>x$; 4) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$; 5) $\sqrt{x^2+4x}>2-x$; 6) $\sqrt{2x+1}>1-x$; 7) $\sqrt{3x+1}>\sqrt{2-x}$; 8) $\sqrt{2x+1}>\sqrt{3-x}$.

102. 1) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8}>3$; 2) $\sqrt{9-x^2}>3-\sqrt{6x-x^2}$; 3) $\sqrt{20-x}-\sqrt{10-x}>2$.

§ 14. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Неравенство с двумя переменными x и y имеет вид $f(x, y)>0$. *Решением такого неравенства* называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, в результате подстановки которых в данное неравенство получается истинное высказывание $f(x_0, y_0)>0$.

Система неравенств с двумя переменными x и y имеет вид

$$\begin{cases} f(x, y)>0, \\ g(x, y)>0. \end{cases}$$

Решением системы неравенств называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому из неравенств системы.

Две системы уравнений или неравенств называются *равносильными*, если множества решений этих систем совпадают.

При решении систем уравнений используют следующие правила, позволяющие преобразовать данную систему в равносильную ей: 1) одно из уравнений системы можно заменить на равносильное; 2) если одно из уравнений системы имеет вид $x=A$ (A — выражение, не содержащее x), то в остальных уравнениях системы можно заменить переменную x на ее выражение A; 3) любое уравнение системы можно заменить на уравнение, получающееся при его сложении с любым другим уравнением системы; 4) любое уравнение системы можно умножить на выражение, не обращающееся в нуль.

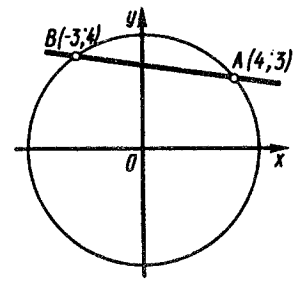


Рис. 4

103. Дать геометрическую иллюстрацию решений систем:

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+7y-25=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x^2+y^2\leqslant 25 \\ x+7y-25=0. \end{cases}$$

○ 1) Множеством решений первого уравнения служит множество точек окружности с радиусом, равным 5, и с центром в начале координат (рис. 4). Множеством решений второго уравнения является множество точек прямой AB. Следовательно, множество всех решений данной системы состоит из двух точек пересечения прямой с окружностью, т. е. из точек $(4; 3)$ и $(-3; 4)$.

2) Очевидно, что множеством всех решений данной системы служит множество точек отрезка AB, являющегося пересечением круга $x^2+y^2\leqslant 25$ и прямой AB. ●

104. Решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{26}{5}, \\ x^2-y^2=24; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x^3-y^3=37, \\ x-y=1. \end{cases}$$

○ 1) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(x+1)^2=41, \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-40=0, \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-20=0, \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=4 \end{array}\right. \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5, \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-5; -4)$; $(4; 5)$.

2) Складывая первое уравнение системы с удвоенным вторым, получим

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 2xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=25, \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=5,\\xy=6\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-5,\\xy=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-2,\\y=-3\end{cases}\\\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-3; -2)$; $(-2; -3)$; $(2; 3)$; $(3; 2)$.

3) Здесь $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Положим $z=x/y$; тогда первое уравнение системы примет вид $z+\frac{1}{z}=\frac{26}{5}$, откуда $z_1=5$, $z_2=1/5$. Таким образом, данная система распадается на совокупность двух систем, каждая из которых решается способом подстановки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x/y=5,\\x^2-y^2=24\end{cases}\\\begin{cases}x/y=1/5,\\x^2-y^2=24\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5y,\\24y^2=24\end{cases}\\\begin{cases}x=y/5,\\-24y^2/25=24\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5y,\\\left[\begin{array}{l}y=-1,\\y=1\end{array}\right.\end{cases}\\\text{нет решения}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-5,\\y=-1,\end{cases}\\\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-5; -1)$; $(5; 1)$.

4) $$\begin{cases}x^3-y^3=37,\\x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=37,\\x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+xy+y^2=37,\\x=y+1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y+1)^2+(y+1)y+y^2=37,\\x=y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2+y-12=0,\\x=y+1\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}y=-4,\\y=3\end{array}\right.\\x=y+1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-4,\\x=-3\end{cases}\\\begin{cases}y=3,\\x=4.\end{cases}\end{array}\right.$$ *Ответ*: $(-3; -4)$; $(4; 3)$. ●

105. Дайте геометрическую иллюстрацию решений следующих систем:

1) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2-y^2=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\x^2-y^2=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 4,\\x^2-y^2\geqslant 0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2-y^2\leqslant 0.\end{cases}$

106. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}x^2+6xy+8y^2=91,\\x+3y-10=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+3xy=18,\\xy+4y^2=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+xy+2y^2=74,\\2x^2+2xy+y^2=73;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{2},\\x^2+y^2=45;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8},\\x+y=12;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=29,\\7x^2-8xy+7y^2=43;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6},\\x^2+y^2=13;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2},\\x^2+y^2=20;\end{cases}$

9) $\begin{cases}x^3-y^3=19,\\x^2y-xy^2=6;\end{cases}$ 10) $\begin{cases}x^2+2y^2=17,\\x^2-2xy=-3.\end{cases}$

§ 15. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

107. Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а их среднее геометрическое равно 12. Найдите эти числа.

108. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 37 см, а его площадь составляет 210 см^2. Найдите длины катетов.

109. Площадь прямоугольника равна 972 см^2, а длина его диагонали равна 45 см. Найдите длины сторон прямоугольника.

110. Периметр прямоугольного треугольника равен 90 см, а его площадь равна 270 см^2. Найдите длины сторон треугольника.

111. Площадь прямоугольника равна 1080 см^2, а его периметр равен 138 см. Найдите длины сторон и диагонали прямоугольника.

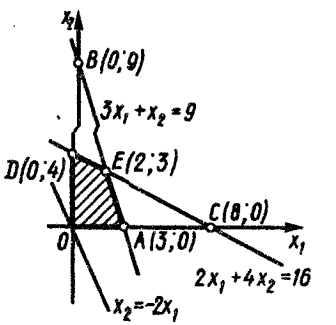


Рис. 5

112. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке -12. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1 и в остатке -20. Найдите это число.

§ 16. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

113. Найдите наибольшее значение линейной формы $z=2x_1+x_2$ при условиях

$$\begin{cases}3x_1+x_2\leqslant 9,\\2x_1+4x_2\leqslant 16,\\x_1\geqslant 0,\\x_2\geqslant 0.\end{cases} \quad (*)$$

○ Учитывая, что $x_1\geqslant 0$ и $x_2\geqslant 0$, строим прямые $3x_1+x_2=9$ и $2x_1+4x_2=16$ только в I четверти (рис. 5). Множеством точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств (*), является выпуклый многоугольник $OAED$ (многоугольник решений). Вершины A, E и D многоугольника находим путем решения систем уравнений:

$\begin{cases} 3x_1+x_2=9, \\ x_2=0; \end{cases}$ $A(3;\,0)$; $\begin{cases} 3x_1+x_2=9, \\ 2x_1+4x_2=16; \end{cases}$ $E(2;\,3)$; $\begin{cases} 2x_1+4x_2=16, \\ x_1=0; \end{cases}$ $D(0;\,4)$.

Среди множества этих точек надо найти такие точки, в которых функция $z=2x_1+x_2$ принимает наибольшее значение. Построим прямую $2x_1+x_2=0$, т. е. $x_2=-2x_1$. При увеличении z эта прямая перемещается параллельно самой себе. Наибольшее значение z достигается в одной из вершин многоугольника.

Находим значения функции $z=2x_1+x_2$ в вершинах многоугольника:

$$z_O=0,\ z_A=2\cdot3+1\cdot0=6,\ z_E=2\cdot2+1\cdot3=7,\ z_D=2\cdot0+1\cdot4=4.$$

Таким образом, при $x_1=2$, $x_2=3$ функция $z=2x_1+x_2$ достигает наибольшего значения $z_{max}=7$. ●

114. Требуется составить план выпуска двух видов изделий на четырех участках цеха, чтобы получить максимальную прибыль от сдачи этих изделий. При этом накладываются следующие ограничения: время работы на 1-м участке не превышает 16 ч, на 2-м участке — 30 ч, на 3-м — 16 ч и на 4-м — 12 ч.

В таблице указано время (в часах), необходимое на изготовление каждого из этих двух видов изделий на каждом из участков. Нуль означает, что изделие на данном участке не изготовляется:

Изделия	Участки			
	1	2	3	4
I	4	3	0	2
II	2	6	4	0
Возможное время работы участка, ч	16	30	16	12

Цеху начисляется прибыль: 3 тыс. руб. при реализации одного изделия I вида и 4 тыс. руб. при реализации одного изделия II вида.

○ Обозначим через x_1 число изделий I вида, а через x_2 число изделий II вида.

На 1-м участке затрачивается $4x_1$ часов на изготовление изделий I вида и $2x_2$ часов на изготовление изделий II вида, т. е. всего $4x_1+2x_2$ часов. Так как время работы на 1-м участке не превышает 16 ч, то $4x_1+2x_2\leqslant16$.

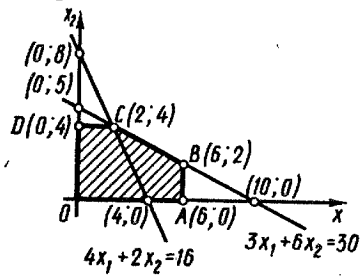


Рис. 6

На 2-м участке затрачивается $3x_1$ часов на изделия I вида и $6x_2$ часов на изделия II вида, всего не более 30 ч, т. е. $3x_1+6x_2\leqslant30$.

На 3-м участке затрачивается 0 ч на изделия I вида и $4x_2$ часов на изделия II вида, т. е. $4x_2\leqslant16$.

На 4-м участке затрачивается $2x_1$ часов на изделия I вида и 0 ч на изделия II вида, т. е. $2x_1\leqslant12$.

От реализации x_1 изделий I вида цеху начисляется $3x_1$ тыс. руб. прибыли и от реализации x_2 изделий II вида $4x_2$ тыс. руб. прибыли. Общая прибыль цеха составляет $3x_1+4x_2$ тыс. руб., где $x_1\geqslant0$ и $x_2\geqslant0$.

Математическая модель задачи описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2\leqslant16, \\ 3x_1+6x_2\leqslant30, \\ 4x_2\leqslant16. \\ 2x_1\leqslant12, \\ x_1\geqslant0, \\ x_2\geqslant0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы неравенств требуется найти наибольшее значение линейной формы $z=3x_1+4x_2$.

Построив прямые $4x_1+2x_2=16$, $3x_1+6x_2=30$, $4x_2=16$ и $2x_1=12$, получим замкнутый многоугольник $OABCD$ (рис. 6). Вычислим координаты его вершин:

$\begin{cases} 2x_1=12, \\ x_2=0; \end{cases}$ $A(6;\,0)$; $\begin{cases} 2x_1=12, \\ 3x_1+6x_2=30; \end{cases}$ $B(6;\,2)$;

$\begin{cases} 3x_1+6x_2=30, \\ 4x_2=16; \end{cases}$ $C(2;\,4)$; $\begin{cases} 4x_2=16, \\ x_1=0; \end{cases}$ $D(0;\,4)$.

Подставив координаты вершин в выражение линейной формы, получим:

$$z_A=3\cdot6+4\cdot0=18;\qquad z_B=3\cdot6+4\cdot2=26;$$
$$z_C=3\cdot2+4\cdot4=22;\qquad z_D=3\cdot0+4\cdot4=16.$$

В точке $B(6;\,2)$ линейная форма достигает максимума: $z_{max}=26$.

Таким образом, наибольшая прибыль от сдачи двух видов изделий составляет 26 тыс. руб. Она будет получена, если цех изготовит 6 изделий I вида и 2 изделия II вида. ●

115. 1) Найдите наибольшее значение линейной формы $z=4x_1+3x_2$ при условиях $\begin{cases} 3x_1+x_2\leqslant9, \\ x_1+2x_2\leqslant8, \\ x_1\geqslant0, \\ x_2\geqslant0. \end{cases}$

2) Найдите наибольшее значение линейной формы $z=2x_1+3x_2$ при условиях $\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant10, \\ 2x_1+x_2\leqslant8, \\ x_1\geqslant0, \\ x_2\geqslant0. \end{cases}$

116. Участок цеха выпускает изделия двух видов. На одно изделие I вида расходуется 5 кг меди и 1 кг алюминия, а на одно изделие II вида — 3 кг меди и 2 кг алюминия. От реализации одного изделия I вида участку начисляется прибыль 2 тыс. руб., а от реализации одного изделия II вида — 3 тыс. руб. Сколько изделий каждого вида должен выпускать участок, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если на участке имеется 45 кг меди и 16 кг алюминия?

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

Решите уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.

I вариант	II вариант
1) $\begin{cases} 5-x>2x-4, \\ 3x-7<3-2x. \end{cases}$	1) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{3}{4}>\frac{x}{2}+\frac{5}{3}, \\ 7x-3>4x+2. \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x-7y=-8, \\ 3x+2y=13. \end{cases}$	2) $\begin{cases} 7x-5y=13, \\ 4x-3y=7. \end{cases}$
3) $x^3-2x^2-5x+6=0.$	3) $x^3-2x^2-x+2=0.$
4) $5x^2-24x+16\geqslant 0.$	4) $3x^2-13x-10\leqslant 0.$
5) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=68, \\ x^2-y^2+x-y=44. \end{cases}$	5) $\begin{cases} x^2-xy=4, \\ y^2-xy=-3. \end{cases}$

Глава 4

ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. ФУНКЦИЯ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Переменная y называется *функцией* переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y=f(x)$, где f обозначает совокупность действий, которые надо произвести над x, чтобы получить y.

Числовое значение функции, соответствующее данному числовому значению аргумента, называется *частным значением* этой функции. Например, функция $y=f(x)$ при $x=a$ принимает значение $y=f(a)$.

Областью определения (существования) функции $D(y)$ называется множество всех действительных значений аргумента x (множество всех точек числовой оси), при которых она имеет действительное значение.

Множеством значений функции $E(y)$ называется множество всех действительных значений функции y, которые она может принимать.

Для задания функции необходимо и достаточно задать закон соответствия f, по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и область определения $D(y)$.

Функция может быть задана аналитически (формулой), таблицей, графиком или каким-либо другим способом.

1. Дана функция $f(x)=x^3-2x^2+x-1$. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$.

○ Чтобы вычислить значение $f(0)$, надо в даиную функцию вместо аргумента x подставить его значение $x=0$. Имеем $f(0)=0^3-2\cdot 0^2+0-1=-1$. Аналогично получим $f(1)=-1$, $f(-1)=-5$ и $f(2)=1$. ●

2. Найти области определения функций:

$$1)\ y=x^2;\quad 2)\ y=\frac{1}{x};\quad 3)\ y=\frac{1}{2x-6};\quad 4)\ y=\frac{1}{x^2-5x+6}.$$

○ 1) Здесь на x не накладывается никаких ограничений, поэтому функция $y=x^2$ определена на множестве **R**.

2) Если $x=0$, то y не имеет числового значения (на нуль делить нельзя). Для всех значений (кроме нуля) y принимает действительные значения, поэтому областью определения служит вся числовая ось, кроме точки $x=0$.

3) Функция определена для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. Решив уравнение $2x-6=0$, найдем его корень $x=3$. Таким образом, область определения $D(y)$ есть вся числовая ось, кроме точки $x=3$.

4) Функция определена для всех значений аргумента, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Решив уравнение $x^2-5x+6=0$, найдем его корни: $x_1=2$ и $x_2=3$. Следовательно, область определения $D(y)$—вся числовая ось, кроме точек $x=2$ и $x=3$. ●

3. Найти области определения функций:

$$1)\ y=\sqrt{x};\quad 2)\ y=\sqrt{2x-4};\quad 3)\ y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1};\quad 4)\ y=\sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}}.$$

○ 1) Квадратные корни определеиы для неотрицательных чисел. Поэтому функция $y=\sqrt{x}$ определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x\geqslant 0$, т. е. $0\leqslant D(y)<\infty$.

2) Решив неравенство $2x-4\geqslant 0$, получим $x\geqslant 2$, т. е. $2\leqslant D(y)<\infty$.

3) Найдем область определения каждого из слагаемых; общая часть этих областей и будет областью определения данной функции. Для первого слагаемого $x\geqslant 0$, а для второго $x\geqslant 1$. Тогда областью определения суммы $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ служит промежуток $1\leqslant D(y)<\infty$.

4) Фуикция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравеиству $\frac{3x-2}{2x+6}\geqslant 0$. Таким образом,

$$\frac{3x-2}{2x+6}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 2/3, \\ x>-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 2/3, \\ x<-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2/3, \\ x<-3. \end{array}\right.$$

Следовательно, областью определения функции является совокупность промежутков: $D(y)=\left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x\geqslant 2/3. \end{array}\right.$ ●

4. 1) Дана функция $F(x)=x^4-x^3+2x^2+4$. Найдите $F(0)$, $F(-1)$ и $F(2)$.

2) Дана функция $s(t)=t^2-6t+8$. Найдите $s(0)$, $s(2)$ и $s(-1)$.

5. 1) Дана функция $f(x)=x^4-x^2+1$. Покажите, что $f(1)=f(-1)$.

2) Дана функция $f(x)=x^4+x^2+5$. Покажите, что $f(2)=f(-2)$.

6. 1) Дана функция $f(x)=x^3+x$. Покажите, что $f(1)=-f(-1)$.

2) Дана функция $f(x)=x^5+x^3$. Покажите, что $f(2)=-f(-2)$.

Найдите области определения функций:

7. 1) $y=x^2$; 2) $y=x^2-1$; 3) $y=x^3+1$.

8. 1) $y=\frac{1}{4x-2}$; 2) $y=\frac{x+2}{2x-8}$; 3) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$.

9. 1) $y=\frac{1}{1-x^2}$; 2) $y=\frac{1}{x^2-x-12}$; 3) $y=\frac{4x-1}{3x^2-5x-2}$; 4) $y=\frac{x-1}{x^2-9x+20}$.

10. 1) $y=\sqrt{1-x}$; 2) $y=\sqrt{18-6x}$; 3) $y=\sqrt{3x-12}$.

11. 1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$; 2) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$.

12. 1) $y=3\sqrt{5-x}-\dfrac{4}{\sqrt{x-3}}$; 2) $y=\sqrt{7-x}+\dfrac{1}{x-1}$.

13. 1) $y=\sqrt{x^2-2x-8}$; 2) $y=\sqrt{x^2+8x+15}$; 3) $y=\sqrt{(2-x)(5+x)}$.

14. 1) $y=\sqrt{\dfrac{x-8}{12-x}}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{4x-8}{3-6x}}$.

§ 2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. Логарифмическая функция.

Логарифмом числа $N\,(N\in\mathbf{R}_+)$ по основанию $a\,(a>0,\ a\neq 1)$ называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N, т. е.

$$\log_a N=x\Leftrightarrow a^x=N. \tag{4.1}$$

Равенство (4.1), выражающее определение логарифма, можно переписать в виде

$$a^{\log_a N}=N. \tag{4.2}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством.

Логарифмы при основании $a=10$ называются *десятичными*.

Функция $y=\log_a x$ $(x\in\mathbf{R}_+,\ a>0,\ a\neq 1)$ называется *логарифмической функцией*.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ является обратной по отношению к показательной функции $y=a^x$ $(x\in\mathbf{R},\ a>0,\ a\neq 1)$. Поэтому их графики симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 7).

Приведем основные свойства логарифмической функции.

1°. *Область определения*: $D(y)=\mathbf{R}_+$.

2°. *Множество значений функции*: $E(y)=\mathbf{R}$, *т. е. вся числовая прямая.*

3°. *Логарифм единицы равен нулю, логарифм основания равен единице*: $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$.

4°. *Функция* $y=\log_a x$ $(1<a<\infty)$ возрастает в промежутке $0<x<\infty$ (рис. 8). *Если* $1<a<\infty$, *то* $\log_a x>0$ *при* $1<x<\infty$ *и* $\log_a x<0$ *при* $0<x<1$, *т. е. при* $1<a<\infty$ *логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.*

5°. *Функция* $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ *убывает в промежутке* $0<x<\infty$ (рис. 8). *Если* $0<a<1$, *то* $\log_a x<0$ *при* $1<x<\infty$ *и* $\log_a x>0$ *при* $0<x<1$, *т. е. при* $0<a<1$ *логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логарифмы чисел, больших единицы, отрицательны.*

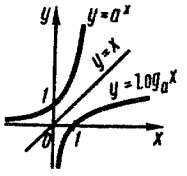


Рис. 7

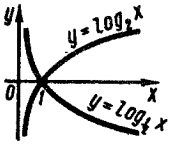


Рис. 8

2. Алгебраические операции над логарифмами.

1°. *Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:*

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N. \tag{4.3}$$

2°. *Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:*

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N. \tag{4.4}$$

3°. *Логарифм степени положительного основания равен произведению показателя степени на логарифм основания степени:*

$$\log_a M^n=n\log_a M. \tag{4.5}$$

4°. *Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня:*

$$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M. \tag{4.6}$$

3. Логарифмирование и потенцирование.

Если число x представлено алгебраическим выражением, содержащим числа a, b, c, ..., то найти логарифм этого выражения — значит выразить логарифм числа x через логарифмы чисел a, b, c, ... Нахождение положительного числа по его логарифму называют *потенцированием*.

4. Зависимость между логарифмами чисел при разных основаниях.

1°. *Формула перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b*

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}. \tag{4.7}$$

2°. *Зависимость между основаниями a и b выражается формулой*

$$\frac{1}{\log_a b}=\log_b a. \tag{4.8}$$

3°. *Имеет место соотношение*

$$\log_{a^m}M=\frac{1}{m}\log_a M. \tag{4.9}$$

15. Найти $\log_{1/6}36$.

○ I способ. $\log_{1/6}36=\log_{1/6}6^2=\log_{1/6}(1/6)^{-2}=-2$.

II способ. $(\log_{1/6}36=x)\Leftrightarrow((1/6)^x=36)\Leftrightarrow(6^{-x}=6^2)$; $x=-2$. ●

16. Решить уравнения: 1) $\log_6 x=-2$; 2) $\log_x 8=-1/2$.

○ 1) $(\log_6 x=-2)\Leftrightarrow(x=6^{-2})$; $x=1/36$;

2) $(\log_x 8=-1/2)\Leftrightarrow(x^{-1/2}=8)\Leftrightarrow(x^{-1/2})^{-2}=8^{-2})$; $x=8^{-2}=1/64$. ●

17. Найти области определения следующих функций:

1) $y=\log_4(8-2x)$; 2) $y=\log_{1/3}(2x+6)$;

3) $y=\log_3(x+6)+\log_{1/3}(6-x)$.

○ 1) Здесь $8-2x>0$, $x<4$, т. е. $-\infty<D(y)<4$.

2) Имеем $2x+6>0$, $2x>-6$, $x>-3$, т. е. $-3<D(y)<\infty$.

3) Имеем $\begin{cases} x+6>0, \\ 6-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-6, \\ x<6, \end{cases}$ т. е. $-6<D(y)<6$. ●

18. Построить график функции $y=\log_{1/2}(4-2x)$.

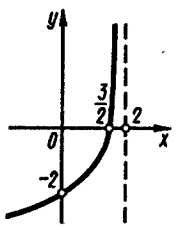


Рис. 9

○ Областью определения функции служит бесконечный промежуток $-\infty<D(y)<2$. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Полагая $y=0$, получим уравнение $\log_{1/2}(4-2x)=0$, откуда $x=3/2$. При $x=0$ имеем $y=\log_{1/2}4=-2$. График функции изображен на рис. 9. ●

19. Вычислите x:

1) $\log_{1/\sqrt{2}}(1/8)=x$; 2) $\log_{3\sqrt{3}}(1/27)=x$;
3) $\log_x 0{,}125=-3$; 4) $\log_x 4=-1/2$;
5) $\log_{16}x=3/4$; 6) $\log_5 x=-3$.

20. Найдите области определения функций:

1) $y=\log_2(6-4x)$; 2) $y=\log_{1/5}(4x-5)$;
3) $y=\log_5(x+8)+\log_5(4-x)$.

21. Постройте графики функций:

1) $y=\log_2(x-2)$; 2) $y=\log_2|x-2|$; 3) $y=\log_3(3-x)$.

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее перемениую в показателе степени, называется *показательным*.

При решении показательных уравиений вида $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 1$) используется следующее свойство: $(a^{f(x)}=a^{\varphi(x)})\Leftrightarrow(f(x)=\varphi(x))$.

Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ выполняется многими способами. Ниже рассмотрены некоторые из этих способов.

1. Способ уравнивания оснований

22. Решить уравнения:

1) $2^{x^2-7x+12}=1$; 2) $(1/0{,}125)^{2x}=128$;
3) $2^{x-2}=5^{2-x}$; 4) $2^{x+3}-2^x=112$.

○ 1) По определению нулевого показателя получим

$$(x^2-7x+12=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=4. \end{array}\right.$$ *Ответ*: 3; 4.

2) $((1/0{,}125)^{2x}=128)\Leftrightarrow((2^3)^{2x}=2^7)\Leftrightarrow(2^{6x}=2^7)\Leftrightarrow(6x=7)\Leftrightarrow x=7/6$.
Ответ: 7/6.

3) Записав уравнение в виде $2^{x-2}\cdot 5^{x-2}=1$, получим $(2^{x-2}\cdot 5^{x-2}=1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow((2\cdot 5)^{x-2}=1)\Leftrightarrow(x-2=0)\Leftrightarrow x=2$. *Ответ*: 2.

4) $(2^{x+3}-2^x=112)\Leftrightarrow(2^x(2^3-1)=112)\Leftrightarrow(2^x=112/7)\Leftrightarrow(2^x=16)\Leftrightarrow x=4$. *Ответ*: 4.

2. Логарифмирование обеих частей уравнения. Применение основного логарифмического тождества

23. Решить уравнения: 1) $3^{2x-3}=11^{1-x}$; 2) $3^x=8$.

○ 1) Прологарифмировав обе части уравнения по осиованию 10, получим

$$(3^{2x-3}=11^{1-x})\Leftrightarrow((2x-3)\lg 3=(1-x)\lg 11)\Leftrightarrow(2x\lg 3+x\lg 11=\lg 11+3\lg 3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x(2\lg 3+\lg 11)=\lg 11+3\lg 3)\Leftrightarrow\left|x=\frac{\lg 11+3\lg 3}{2\lg 3+\lg 11}\right|.$$

2) Согласно тождеству (4.2), имеем $8=3^{\log_3 8}$; тогда $(3^x=8)\Leftrightarrow(3^x=3^{\log_3 8})\Leftrightarrow x=\log_3 8$.

К тому же результату можно прийти, логарифмируя обе части уравнения по осиованию 3:

$$(3^x=8)\Leftrightarrow(x\log_3 3=\log_3 8)\Leftrightarrow x=\log_3 8.$$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, вычислим приближенное значение корня:

$$(3^x=8)\Leftrightarrow(x\lg 3=\lg 8)\Leftrightarrow(x=\lg 8/\lg 3)\Leftrightarrow(x=0{,}9031/0{,}4771);\ x\approx 1{,}89.$$ ●

3. Преобразование к квадратному уравнению

24. Решить уравнения:

1) $4^x+2^{x+1}-8=0$; 2) $5^x+\frac{125}{5^x}=30$; 3) $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0$.

○ 1) $(4^x+2^{x+1}-8=0)\Leftrightarrow(2^{2x}+2\cdot 2^x-8=0)$.

Решаем квадратиое уравнение относительио переменной 2^x:

$$(2^{2x}+2\cdot 2^x-8=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x=-4, \\ 2^x=2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \text{нет решения}, \\ x=1. \end{array}\right.$$ *Ответ*: 1.

$$2)\ \left(5^x+\frac{125}{5^x}=30\right)\Leftrightarrow(5^{2x}-30\cdot 5^x+125=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 5^x=5, \\ 5^x=25 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2.

3) $(6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0)\Leftrightarrow(6\cdot 2^{2x}-13\cdot 2^x\cdot 3^x+6\cdot 3^{2x}=0)$.

Разделив все члеиы уравнения на $3^{2x}(3^{2x}\neq 0)$, получим квадратное уравнеиие относительно переменной $(2/3)^x$:

$$(6\cdot(2/3)^{2x}-13\cdot(2/3)^x+6=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} (2/3)^x=2/3, \\ (2/3)^x=3/2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$$ *Ответ*: -1; 1.

4. Способ группировки

25. Решить уравнение $5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0$.

○ $(5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0)\Leftrightarrow(5\cdot 25^x+7\cdot 7^x-25^x\cdot 7^x-35=0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(25^x(5-7^x)-7(5-7^x)=0)\Leftrightarrow(5-7^x)(25^x-7)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 5-7^x=0, \\ 25^x-7=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\log_7 5, \\ x=\log_{25}7. \end{array}\right.$$

Ответ: $\log_7 5$; $\log_{25}7$. ●

26. Решить графическим способом уравнение $3^x=2x+3$.

○ Построим графики функций $y=3^x$ и $y=2x+3$ (рис. 10). С помощью рисунка находим абсциссы двух точек пересечения графиков. Один из корней заключен в промежутке $-2<x<-1$, а другой — в промежутке $1<x<2$. Приближенно можно считать, что $x_1\approx -1{,}4$ и $x_2\approx 1{,}7$. ●

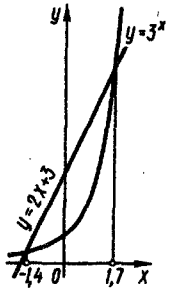


Рис. 10

Решите уравнения:

27. 1) $(0{,}5)^{\sqrt{x-3}}=1$; 2) $5^{x^2-8x+12}=1$; 3) $2^{x^2}:4^x=8$; 4) $9^{2\sqrt{x}}=3^{2x-6}$; 5) $1000\sqrt[x]{0{,}1}=100^x$.

28. 1) $5^{x-4}=6^{x-4}$; 2) $8^{5-x}=7^{x-5}$; 3) $4^{2x-3}=7^{x-1,5}$; 4) $9^{x+2}=13^{2x-1}$.

29. 1) $3^{x+4}-5^{x+3}=3^x-5^{x+2}$; 2) $5^{x+1}+5^x=750$; 3) $2^x-2^{x-2}=3$; 4) $27^{x-2/3}-9^{x-1}=2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{3x-1}$.

30. 1) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$; 2) $2^{3-2x}-3\cdot 2^{1-x}+1=0$; 3) $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}-29=0$; 4) $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$; 5) $4^x+6^x-9^x=0$; 6) $3^{2x+1}+8^{x+1}-72^x-24=0$.

31. Решите графическим способом уравнения: 1) $2^x=x^2$; 2) $2-x=2^{-x}$.

§ 4. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

32. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases}3^x\cdot 5^y=75,\\3^y\cdot 5^x=45;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4^x\cdot 5^y=16,\\2\cdot 3^x=18;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3^x\cdot 3^y=27,\\3^x+3^y=12.\end{cases}$

○ 1) Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases}3^x\cdot 5^y=3\cdot 5^2,\\3^y\cdot 5^x=3^2\cdot 5.\end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, имеем

$$(3^{x+y}\cdot 5^{x+y}=3^3\cdot 5^3)\Leftrightarrow(15^{x+y}=15^3)\Leftrightarrow(x+y=3).$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$(3^{x-y}\cdot 5^{y-x}=3^{-1}\cdot 5)\Leftrightarrow((3/5)^{x-y}=(3/5)^{-1})\Leftrightarrow(x-y=-1).$$

Решение данной системы сводится к решению равносильной ей системы $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1.\end{cases}$ В результате получаем *ответ*: (1; 2). ●

2) Прологарифмировав каждое из уравнений, получим

$$\begin{cases}x\lg 4+y\lg 5=\lg 16,\\\lg 2+x\lg 3=\lg 18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\lg 2+y\lg 5=4\lg 2,\\\lg 2+x\lg 3=\lg 2+2\lg 3.\end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x\lg 3=2\lg 3$, т. е. $x=2$. Подставив найденное значение $x=2$ в первое уравнение, получим

$$4\lg 2+y\lg 5=4\lg 2,\text{ или }y\lg 5=0,\text{ т. е. }y=0.$$

Итак, получаем *ответ*: (2; 0). Этим же способом можно было решить и предыдущую систему.

3) Согласно свойствам корней квадратного уравнения, 3^x и 3^y служат корнями уравнения $z^2-12z+27=0$. Решая последнее, находим $z_1=3$; $z_2=9$. Следовательно, $3^x=3$, $x=1$ и $3^y=9$, $y=2$ и, наоборот, $3^x=9$, $x=2$ и $3^y=3$, $y=1$. Итак, получаем *ответ*: (1; 2); (2; 1). ●

Решите системы уравнений:

33. 1) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12,\\2^y\cdot 3^x=18;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=108,\\2^x+3^y=31;\end{cases}$

3) $\begin{cases}xy=y^x,\\x^3=y^2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2^{2x}-3^y=55,\\2^x-3^{y/2}=5.\end{cases}$

34. 1) $\begin{cases}3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=11/4,\\2^x-3^y=-3/4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}9^y\sqrt[x]{100}=27/10,\\25^y\sqrt[x]{10\,000}=5/4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2^x+3^y=17,\\2^{x+2}-3^{y+1}=5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\3^{x-y-1}=1.\end{cases}$

35. 1) $\begin{cases}3^x-4^y=77,\\3^{x/2}-2^y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^y\cdot 2^{6/x}=36,\\5^y\cdot 2^{9/x}=200.\end{cases}$

§ 5. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $a^x>c$, $a^x<c$, $f(x)^{\varphi_1(x)}>f(x)^{\varphi_2(x)}$, где $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$, называются *простейшими показательными неравенствами*.

Имеют место следующие равносильные преобразования:

$$a^x>c\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a>1,\\x>\log_a c\end{cases}\right.\quad\left.\begin{cases}0<a<1,\\x<\log_a c;\end{cases}\right. \tag{4.10}$$

$$a^x<c\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a>1.\\x<\log_a c\end{cases}\right.\quad\left.\begin{cases}0<a<1,\\x>\log_a c;\end{cases}\right. \tag{4.11}$$

$$f(x)^{\varphi_1(x)}>f(x)^{\varphi_2(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}f(x)>1,\\\varphi_1(x)>\varphi_2(x)\end{cases}\right.\quad\left.\begin{cases}0<f(x)<1,\\\varphi_1(x)<\varphi_2(x).\end{cases}\right. \tag{4.12}$$

36. Решить неравенства:

1) $3^x>4$; 2) $6^{x^2-7x+12}>1$; 3) $(1/3)^{x^2-5x+8}<1/9$; 4) $(x+3)^{x^2-5x+6}>1$.

○ 1) Используя преобразование (4.10) при $a=3$, $c=4$, получим $(3^x>4)\Leftrightarrow(x>\log_3 4)$. *Ответ*: $\log_3 4<x<\infty$.

2) $(6^{x^2-7x+12}>1)\Leftrightarrow(6^{x^2-7x+12}>6^0)\Leftrightarrow(x^2-7x+12>0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<3,\\x>4.\end{array}\right.$

Ответ: $-\infty<x<3$ или $4<x<\infty$.

3) $((1/3)^{x^2-5x+8}<1/9)\Leftrightarrow((1/3)^{x^2-5x+8}<(1/3)^2)\Leftrightarrow(x^2-5x+8>2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^2-5x+6>0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2,\\x>3.\end{array}\right.$ *Ответ*: $-\infty<x<2$ или $3<x<\infty$.

4) Согласно преобразованию (4.12), данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$((x+3)^{x^2-5x+6}>1)\Leftrightarrow((x+3)^{x^2-5x+6}>(x+3)^0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x+3>1,\\x^2-5x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>-2,\\\left[\begin{array}{l}x<2,\\x>3\end{array}\right.\end{cases}\right.\right.$$
$$\left.\left.\begin{cases}0<x+3<1,\\x^2-5x+6<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<-2,\\2<x<3.\end{cases}\right.\right]$$

Первая из систем равносильна двум системам, а вторая система решения не имеет, т. е.

$$\left[\begin{cases}x>-2,\\\left[\begin{array}{l}x<2,\\x>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>-2,\\x<2\end{cases}\right.\right.$$
$$\left.\left.\begin{cases}-3<x<-2,\\2<x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2,\\x>3\end{cases}\right.\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<2,\\x>3.\end{array}\right.$$
нет решения

Ответ: $-2<x<2$ или $3<x<\infty$. ●

Решите неравенства:

37. 1) $(1/3)^x<1/27$; 2) $3^x>27$; 3) $2^{x^2-8x+18}>8$.

38. 1) $(x^2-8x+16)^{x-6}<1$; 2) $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$.

§ 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

39. Решить уравнения:

1) $\log_3(x-12)=2$; 2) $\log_x 16-\log_x 2=1/2$;

3) $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$;

4) $\lg^2 x+\lg x^2=\lg^2 2-1$; 5) $x^{\lg x}=100x$.

○ 1) Используя определение логарифма и учитывая область определения, получим

$$(\log_3(x-12)=2)\Leftrightarrow\begin{cases}x-12=3^2,\\x-12>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=21,\\x>12\end{cases}\Leftrightarrow x=21.$$

2) $(\log_x 16-\log_x 2=1/2)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x(16/2)=1/2,\\x>0,\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow(x^{1/2}=8)\Leftrightarrow x=64.$

3) Учитывая, что $1=\lg 10$, потенцируем:

$$\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5\Leftrightarrow\begin{cases}\log(x-3)+\lg(x-2)=\lg 10-\lg 5,\\x-3>0,\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lg[(x-3)(x-2)]=\lg(10/5),\\x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-2)=2,\\x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x+4=0,\\x>3\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4.\\x>3\end{cases}$$

4) Данное уравнение преобразуем к квадратному, решив которое относительно переменной $\lg x$ получим

$$(\lg^2 x+\lg x^2=\lg^2 2-1)\Leftrightarrow\begin{cases}\lg^2 x+2\lg x-\lg^2 2+1=0,\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\lg x=-1-\lg 2,\\\lg x=-1+\lg 2,\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\lg x+\lg 2=-1,\\\lg x-\lg 2=-1,\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\lg(2x)=-1,\\\lg(x/2)=-1,\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=10^{-1},\\x/2=10^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0{,}05,\\x=0{,}2.\end{array}\right.$$ *Ответ:* 0,05; 0,2.

5) Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 и решая затем полученное квадратное уравнение, находим

$$\begin{cases}\lg x\cdot\lg x=\lg 100+\lg x,\\x>0,\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lg^2 x-\lg x-2=0,\\x>0,\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\lg x=-1,\\\lg x=2,\end{array}\right.\\x>0,\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0{,}1,\\x=100.\end{array}\right.$$ *Ответ*: 0,1; 100. ●

40. Решить уравнения:

1) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{1/3} x=6$; 2) $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.

○ 1) Здесь $x>0$. Используя формулу (4.9), преобразуем левую часть уравнения к основанию 3;

$$\log_{\sqrt{3}}x=\log_{3^{1/2}}x=2\log_3 x;\ \log_{1/3}x=\log_{3^{-1}}x=-\log_3 x.$$

Таким образом,

$(\log_3 x+2\log_3 x-\log_3 x=6)\Leftrightarrow(2\log_3 x=6)\Leftrightarrow(x=3^3)\Leftrightarrow(x=27)$.

2) Здесь $x>0$. По формуле (4.7) преобразуем левую часть уравнения к основанию 2:

$$\log_{x^2}16=\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2}=\frac{4}{2\log_2 x};$$
$$\log_{2x}64=\frac{\log_2 64}{\log_2 2x}=\frac{6}{\log_2 2+\log_2 x}=\frac{6}{1+\log_2 x}.$$

Тогда

$$\left(\frac{4}{2\log_2 x}+\frac{6}{1+\log_2 x}=3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}3\log_2^2 x-5\log_2 x-2=0,\\x>0,\\x\neq 1,\\x\neq 0{,}5\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1/3,\\\log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^{-1/3},\\x=4.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $2^{-1/3}$; 4. ●

Решите уравнения:

41. 1) $\log_5(x+10)=2$; 2) $\log_x 2+\log_x 3=1/3$;
3) $\lg(7x-9)^2+\lg(3x-4)^2=2$; 4) $\lg(x-1)^3-3\lg(x-3)=\lg 8$.

42. 1) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$; 2) $\log_3\log_4\log_{\frac{2}{3}}(x-3)=0$.

43. 1) $x^{\lg x}=1$; 2) $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$; 3) $x^x=x$.

44. 1) $\log_2 x+\log_8 x=8$; 2) $2\log_x 25-3\log_{25}x=1$.

§ 7. СИСТЕМЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

45. Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_y x-3\log_x y=2,\\ \log_2 x=4-\log_2 y.\end{cases}$

○ Здесь $x>0$, $y>0$. Имеем

$$\begin{cases}\log_y x-3\dfrac{1}{\log_y x}=2,\\ \log_2 x=\log_2 16-\log_2 y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_y^2 x-2\log_y x-3=0,\\ x=16/y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_y x=-1,\\ \log_y x=3,\end{array}\right.\\ x=16/y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y^{-1}=x,\\ y^3=x\end{array}\right.\\ x=16/y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y^{-1}=x,\\ x=16/y\end{cases}\\ \begin{cases}y^3=x,\\ x=16/y\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{нет решения}\\ \begin{cases}x=8,\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: (8; 2). ●

Решите системы уравнений:

46. 1) $\begin{cases}y-x=9,\\ \lg x-\lg y=-1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_x y-\log_y^2 x=3/2,\\ x+y=3/4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=10{,}1,\\ \lg x-\lg y=2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5x+2y=100,\\ \lg x-\lg y=\lg 16-1.\end{cases}$

47. 1) $\begin{cases}x+y=29,\\ \lg x+\lg y=2\lg 10;\end{cases}$ 2 $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y),\\ \lg x-\lg 4=\lg 3-\lg y;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_{1/2}(y-x)+\log_2(1/y)=-2,\\ x^2+y^2=25;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_2 x\cdot\log_x(x-3y)=2,\\ xy^{\log_x y}=y^{5/2};\end{cases}$

5) $\begin{cases}\log_x\log_3\log_x y=0,\\ \log_y 27=1;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$

7) $\begin{cases}2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=256,\\ \lg\sqrt{xy}-\lg 1{,}5=1.\end{cases}$

§ 8. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $\log_a x>c$, $\log_a x<c$, где $a>0$ и $a\neq 1$, называются *простейшими логарифмическими неравенствами.*

Имеют место следующие равносильные преобразования:

$$\log_a x>c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ x>a^c\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ 0<x<a^c;\end{cases}\end{array}\right.\qquad(4.13)$$

$$\log_a x<c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ 0<x<a^c\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ x>a^c;\end{cases}\end{array}\right.\qquad(4.14)$$

$$\log_{f(x)}\varphi_1(x)>\log_{f(x)}\varphi_2(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi_1(x)>0,\\ \varphi_2(x)>0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>1,\\ \varphi_1(x)>\varphi_2(x)\end{cases}\\ \begin{cases}0<f(x)<1,\\ \varphi_1(x)<\varphi_2(x).\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\qquad(4.15)$$

48. Решить неравенства:

1) $\log_{1/2}^2 x>36$; 2) $2+\log_2(x+1)>1-\log_{1/2}(4-x^2)$.

○ 1) Очевидно, что

$$(\log_{1/2}^2 x>36)\Leftrightarrow(|\log_{1/2}x|>6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{1/2}x>6,\\ \log_{1/2}x<-6.\end{array}\right.$$

Используя равносильные преобразования (4.13) и (4.14), получим

$$\left[\begin{array}{l}\log_{1/2}x>6,\\ \log_{1/2}x<-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<(1/2)^6,\\ x>(1/2)^{-6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1/64,\\ x>64.\end{array}\right.$$

Ответ: $0<x<1/64$ или $64<x<\infty$.

2) Имеем

$$(2+\log_2(x+1)>1-\log_{1/2}(4-x^2))\Leftrightarrow(1+\log_2(x+1)>\log_2(4-x^2))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2 2+\log_2(x+1)>\log_2(4-x^2))\Leftrightarrow(\log_2 2(x+1)>\log_2(4-x^2)).$$

Используя далее равносильные преобразования (4.15), получим

$$\log_2 2(x+1)>\log_2(4-x^2)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0,\\ 4-x^2>0,\\ 2(x+1)>4-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ x^2-4<0,\\ x^2+2x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ -2<x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{3}-1,\\ x>\sqrt{3}-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{3}-1,\\ x>\sqrt{3}-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<2,\\ x<-\sqrt{3}-1\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<2,\\ x>\sqrt{3}-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{нет решения,}\\ \sqrt{3}-1<x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3}-1<x<2).\ \textit{Ответ}:\ \sqrt{3}-1<x<2.\ ●$$

49. Решите неравенства:

1) $\log_5(2x^2-3x-1)>0$; 2) $\log_{1.5}(x^2-4x+3)<1$;
3) $\log_{x+7}25>2$; 4) $\log_{x+1}9<2$; 5) $\log_{3x-3}x>1$;
6) $\log_{3x+3}x<1$; 7) $\log_{x-3}(x^2+4x-5)>\log_{x-3}(x-1)$;
8) $\log_2(x+1)+\log_2(11-x)<5$.

§ 9. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

50. Найдите области определения функций:

1) $y=\dfrac{4}{1-x}$; 2) $y=\dfrac{1}{3x-12}$; 3) $y=\sqrt{x^2-3}$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2+x-20}$;
5) $y=\sqrt{\lg(x^2-8x+13)}$; 6) $y=\lg(x-1)-\sqrt{x-5}$;
7) $y=\lg\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+4}$; 8) $y=x-\lg x$.

51. Решите уравнения:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x-\frac{1}{2}+\frac{2}{x}}=5\sqrt{5}$; 2) $4^{x-1}-0{,}5^{3-x}=62$;

3) $3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$.

52. Решите уравнения:

1) $5^{2x-1}+2^{2x}=5^{2x}-2^{2x+2}$; 2) $\left(\frac{9}{4}\right)^{x}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}=\frac{\lg 9}{\lg 27}$;

3) $4^{\frac{x+1}{x}}+6^{\frac{x+1}{x}}=2\cdot 9^{\frac{x+1}{x}}$; 4) $2^{3x+1}\cdot 3^{x}-2^{3x}\cdot 3^{x-1}\leqslant 192$;

5) $3^{2x-1}-3^{2x}+3^{2x+3}=237$; 6) $\sqrt[2x]{2}\cdot\sqrt[3]{8^{x-2}}=\sqrt[8x]{0{,}25}$;

7) $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0$.

53. Решите неравенства:

1) $2^{x}+2^{1-x}<3$; 2) $(\sqrt{23}/5)^{x^2-5}<(23/25)^{2x}$; 3) $(x^2-8x+16)^{x-6}>1$.

54. Решите уравнения:

1) $\lg(3x^2+28)-\lg(3x-2)=1$;

2) $1+\lg(x+1)-\lg(x^3+7x+8)=0$;

3) $\lg\sqrt{3x+1}+\lg\sqrt{x+4}=\lg 12$; 4) $\lg(x-4)-\lg\sqrt{2x-11}=\lg 2$;

5) $\lg(x-2)-\lg\sqrt{x-4}=\lg 3$; 6) $\lg(x^2+1)-\lg(x-2)=1$;

7) $2\lg\sqrt{5-x}+\lg(x-3)=0$; 8) $\lg\sqrt{x-7}+\lg\sqrt{3x-8}=1$;

9) $\lg(8-x)+2\lg\sqrt{x-6}=0$;

10) $2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5)$.

55. Решите уравнения:

1) $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$; 2) $\lg(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}})=0$;

3) $2^{\lg(x^2-6x+10\sqrt{10})}=2\sqrt{2}$; 4) $0{,}4^{\lg^2 x+1}=(6{,}25)^{2-\lg x^2}$;

5) $\lg^2 x-\lg x^2=\lg^2 3-1$; 6) $\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$;

7) $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$; 8) $2\log_2\log_2 x+\log_{1/2}\log_2(2\sqrt{2x})=1$.

56. Решите неравенства:

1) $\log_{3/10}|2x+1|>1$; 2) $\log_{1/5}(3x-5)>\log_{1/5}(x+1)$;

3) $\log_{2/3}|x-2|>\log_{2/3}6$; 4) $\log_2\frac{4x-1}{x+3}<1$;

5) $\log_{1/2}(x+8)>\log_{1/2}(x-3)+\log_{1/2}(3x)$;

6) $\log_{1/3}(3^{x+2}-9)\cdot\log_3(3^{x}-1)>-3$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Решите уравнение

$$3^{2x-3}-9^{x-1}+3^{2x}=675.$$

2) Решите уравнение

$$\frac{\log\frac{2}{2}x-\log_2 x-2}{\log_2 x+1}=1.$$

3) Решите неравенство

$$2^{x}+2^{1-x}<3.$$

4) Решите иеравенство

$$\log_3|2x-7|<1.$$

5) Дано: $\log_7 2=m$. Найдите $\log_{49}28$.

II вариант

1) Решите уравнение

$$4^{x+1,5}+7\cdot 2^{x+1}=4.$$

2) Решите уравнение

$$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}.$$

3) Решите неравенство

$$(\sqrt{10}/3)^{3x^2-3}<(0{,}81)^{-2x}.$$

4) Решите неравенство

$$\log_{1/2}\frac{2x-1}{x+1}>1.$$

5) Дано: $\lg 3=a$, $\lg 5=b$. Найдите $\log_{15}30$.

Глава 5

БЕСКОНЕЧНАЯ ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. БЕСКОНЕЧНАЯ ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве N натуральных чисел.

Последовательность (x_n) называется *возрастающей (убывающей)*, если каждый ее член, начиная со второго, больше (меньше) предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1}>x_n$ ($x_{n+1}<x_n$).

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей (неубывающей)*, если каждый ее члеи, начиная со второго, не больше (не меньше) предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1}\leqslant x_n$ ($x_{n+1}\geqslant x_n$).

Убывающие, возрастающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху (ограниченной снизу)*, если можно указать такое число M (число m), что для всех членов этой последовательности выполняется иеравенство $x_n\leqslant M$ ($x_n\geqslant m$). Числа M и m называются соответственно *верхней* и *нижней границами* последовательности (x_n). Тот факт, что последовательность ограничена сверху числом M (снизу числом m), геометрически означает, что ни одна точка x_n не лежит правее точки M (левее точки m).

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существуют два числа m и M такие, что для всех n выполняется неравенство $m\leqslant x_n\leqslant M$. Тот факт, что последовательность ограничена числами m и M, геометрически означает, что все ее члены помещаются в промежутке $[m, M]$.

Последовательность (x_n) называется *постоянной*, если все ее члены совпадают.

Обычно последовательность задается формулой, выражающей общий член последовательности через n. Иногда указывается правило, с помощью которого можно вычислить n-й член последовательности по ее известным предыдущим членам. Такой способ задания последовательности называется *индуктивным* (или *рекуррентным*).

1. Вычислить пять первых членов последовательности $x_n=\frac{n-1}{n+1}$.

○ Подставив вместо n последовательно 1, 2, 3, 4, 5, получим $x_1=0$, $x_2=1/3$, $x_3=1/2$, $x_4=3/5$, $x_5=2/3$. ●

2. Написать общий член последовательности натуральных чисел, каждое из которых при делении на 3 дает остаток, равный 1.

○ Для того чтобы число при делении на 3 давало остаток 1, оно должно иметь вид $3n+1$; следовательно, общий член последовательности $x_n=3n+1$. ●

3. Последовательность задана рекуррентным соотношением $x_n=3x_{n-1}+1$. Найти первые члены последовательности.

○ Зададим первый член последовательности: пусть $x_1=2$. Полагая в рекуррентном соотношении $n=2$, получим $x_2=3x_{2-1}+1=3x_1+1=3\cdot 2+1=7$. При $n=3$, 4, 5 соответственно находим: $x_3=3x_2+1=3\cdot 7+1=22$, $x_4=3x_3+1=3\cdot 22+1=67$, $x_5=3x_4+1=3\cdot 67+1=202$. В результате получаем последовательность 2, 7, 22, 67, 202, ... ●

4. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=1/(n^2-1)$ монотонно убывает.

○ Для убывающей последовательности выполняется неравенство $x_{n+1}<x_n$, или $x_{n+1}/x_n<1$. Запишем $(n+1)$-й член последовательности:

$$x_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{n^2+2n+1-1}=\frac{1}{n^2+2n}.$$

Тогда $x_{n+1}/x_n=(n^2-1)/(n^2+2n)<1$, так как $n^2-1<n^2+2n$ при любом натуральном n. Следовательно, данная последовательность является убывающей. ●

5. Доказать, что последовательность $x_n=\frac{n+1}{n}$ ограничена снизу и сверху.

○ Очевидно, $x_n=\frac{n+1}{n}>1$, т. е. последовательность ограничена снизу. С другой стороны, имеем $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, где $\frac{1}{n}$ — правильная дробь, и, следовательно, $1+\frac{1}{n}<2$, т. е. последовательность ограничена сверху. ●

6. Вычислите пять первых членов последовательностей:

1) $x_n=2n+5$; 2) $x_n=\frac{1}{2n-1}$; 3) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$; 4) $x_n=4$; 5) $x_n=\frac{3}{(-1)^n}$;

6) $x_n=2n$; 7) $x_n=\frac{1}{2^n}+2^n$; 8) $x_n=4n^2+3^n+1$;

9) $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2-1} & \text{при } n \text{ четном;}\\ \frac{n-1}{n} & \text{при } n \text{ нечетном;}\end{cases}$ 10) $x_n=\frac{1}{n(n+2)}$.

7. Напишите общий член последовательности натуральных чисел, каждое из которых при делении на 5 дает остаток, равный 3.

8. Напишите общий член последовательности: 1) 1, 1/4, 1/9, 1/16, ...; 2) 1, 7, 13, 19, ...; 3) 2, 4, 8, 16, 32, ...; 4) 1, 7, 17, 31, ...

9. Даны последовательности:

1) $x_n=\frac{n}{n+1}$; 2) $x_n=\frac{n^2}{n^2+2}$; 3) $x_n=\frac{2n}{n^2+1}$; 4) $x_n=\frac{3n+5}{2n+1}$.

Докажите, что последовательности 1) и 2) — возрастающие, а 3) и 4) — убывающие.

10. Даны последовательности:

1) $x_n=3n-1$; 2) $x_n=\frac{1}{n^2}$; 3) $x_n=\frac{n(n+1)}{3}$; 4) $x_n=\frac{1}{n^3-1}$;

5) $x_n=\frac{2}{n(n+1)}$; 6) $x_n=\frac{n}{n+1}$; 7) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 8) $x_n=\frac{2^n}{2^n-1}$.

Какие из них являются ограниченными?

§ 2. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Предел последовательности. Число a называется *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon>0$ все члены последовательности x_n, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в ε-окрестности $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a, т. е. найдется такое натуральное число N, что при $n>N$ будет выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Последовательность может иметь только один предел. Если последовательность имеет предел, то такую последовательность называют *сходящейся*; последовательность, не имеющую предела, называют *расходящейся*.

Если последовательность (x_n) имеет пределом число a, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. В этом случае говорят, что последовательность сходится к числу a.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Последовательность называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Отметим свойства бесконечно малых последовательностей.

1°. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.*

2°. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой.*

Следствие. Произведение двух бесконечно малых является бесконечно малой.

3°. *Для того чтобы выполнялось равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, *необходимо и достаточно, чтобы* $x_n=a+\alpha_n$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=0$.

Последовательность называется *бесконечно большой*, если для любого $M>0$ найдется такое натуральное число N, что при $n\geqslant N$ выполняется неравенство $|a_n|>M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ и все числа a_n, начиная с некоторого номера N, положительны, то последовательность (a_n) стремится к $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$; если все числа a_n, начиная с некоторого номера N, отрицательны, то последовательность (a_n) стремится к $-\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

Если (a_n) — бесконечно большая последовательность, то последовательность $(1/a_n)$ — бесконечно малая. Наоборот, если (α_n) — бесконечно малая последовательность, то $(1/\alpha_n)$ — бесконечно большая.

11. Доказать, что последовательность $x_n=5n/(n+1)$ сходится к числу 5.

○ Согласно определению, число 5 является пределом последовательности (x_n), если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{5n}{n+1}-5\right|<\varepsilon.$$

Пусть задано произвольное положительное число ε; тогда из последнего неравенства получим

$$\left|\frac{5n-5n-5}{n+1}\right|<\varepsilon, \text{ или } \frac{5}{n+1}<\varepsilon.$$

Решив это неравенство относительно n, находим $n>\frac{5}{\varepsilon}-1$.

Итак, если в качестве N взять любое натуральное число, не меньшее $\frac{5}{\varepsilon}-1$, то при всех $n>N$ для любого $\varepsilon>0$ будет выполнено неравенство $\left|\frac{5n}{n+1}-5\right|<\varepsilon$. Тогда по определению предела следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$.

Пусть, например, $\varepsilon=0{,}01$; тогда $\frac{5}{\varepsilon}-1=\frac{5}{0{,}01}-1=499$. Возьмем любой член последовательности (x_n) с номером, большим 499, например $n=500$; тогда $x_{500}=\frac{5\cdot 500}{500+1}=\frac{2500}{501}$. Находим величину

$$|x_{500}-5|=\left|\frac{2500}{501}-5\right|=\left|-\frac{5}{501}\right|=\frac{5}{501}<0{,}01,$$

т. е. $|x_{500}-5|<\varepsilon=0{,}01$. Таким образом, все члены последовательности, начиная с 500-го, находятся в ε-окрестности числа 5, т. е. в интервале $]4{,}99;\ 5{,}01[$.

Аналогично для любого заданного числа $\varepsilon>0$ можно найти номер N, начиная с которого все члены последовательности попадут в ε-окрестность числа 5. ●

12. Доказать, что последовательность $x_n=n$ является расходящейся.

○ Допустим противное: предположим, что последовательность $x_n=n$ сходится и ее предел равен числу a, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Пусть натуральное число N превосходит a: $N>a$. При любом $n>N$ имеем

$$|x_n-a|=|n-a|=n-a>n-N\geqslant 1,$$

что противоречит определению предела, так как при всех $\varepsilon<1$ должно выполняться неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. ●

13. Докажите, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-2}{7n+3}=\frac{5}{7}$.

14. Имеют ли предел последовательности: 1) $x_n=(-1)^n$; 2) $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$?

15. Докажите, что последовательности: 1) $\alpha_n=\frac{1}{n^2}$; 2) $\alpha_n=\frac{1}{n^2+1}$; 3) $\alpha_n=\frac{5}{n^2+4}$ — бесконечно малые.

16. Докажите, что последовательности: 1) $\alpha_n=\frac{(-1)^n+2}{n}$; 2) $\alpha_n=\frac{1}{2^n+1}$; 3) $\alpha_n=\frac{n^2}{n^4+4}$ — бесконечно малые.

Глава 6
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

1. Предел фуикции. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x\to a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для любого $x\neq a$, удовлетворяющего неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Если число A_1 (число A_2) есть предел функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к a так, что x принимает только значения, меньшие (бо́льшие) a, то A_1 (A_2) называется *левым (правым) пределом* функции $f(x)$ в точке a. При этом соответственно пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Отметим свойства бесконечно малых и бесконечно больпих функций.

1°. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно малые при $x\to a$, то их сумма $f(x)+\varphi(x)$ при $x\to a$ также является бесконечно малой.*

2°. *Если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x\to a$, а $F(x)$ — ограниченная функция, то их произведение $f(x)\cdot F(x)$ есть функция бесконечно малая.*

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.*

3°. *Если при $x\to a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, а функция $\varphi(x)$ — бесконечно большая, то*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)]=\infty,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0.$$

4°. *Если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x\to a$, то функция $1/f(x)$ — бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция $f(x)$ не обращается в нуль.* Наоборот, *если при $x\to a$ функция $\varphi(x)$ — бесконечно большая, то функция $1/\varphi(x)$ — бесконечно малая.*

Между бесконечно малой функцией и функцией, имеющей конечный предел, существует следующая зависимость.

Если функция $f(x)$ *имеет конечный предел при $x\to a$, то ее можно представить в виде суммы постоянной и бесконечно малой функции при $x\to a$.* Наоборот, *если функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы постоянной и бесконечно малой функции при $x\to a$, то эта функция имеет конечный предел при $x\to a$, который равен значению постоянной.*

3. Теоремы о пределах. Теорема 1. *Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Теорема 2. *Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to a$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Теорема 3. *Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to a$ и предел функции $\varphi(x)$ отличен от нуля, то существует также предел отношения $f(x)/\varphi(x)$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Следствия. 1. *Постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

2. *Если n — натуральное число, то*

$$\lim_{x\to a} x^n=a^n,\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}.$$

3. *Предел многочлена (целой рациональной функции)*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

при $x\to a$ равен значению этого многочлена при $x=a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$.

4. *Предел дробно-рациональной функции*

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

при $x\to a$ равен значению этой функции при $x=a$, если a принадлежит области определения функции, т. е. $\lim\limits_{x\to a} R(x)=R(a)$.

Вычислить пределы:

1. 1) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$.

○ 1) По правилу нахождения предела многочлена находим

$$\lim_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)=5\cdot 2^3-6\cdot 2^2+2-5=13.$$

2) Так как при $x=2$ знаменатель дроби отличен от нуля, то по правилу нахождения предела дробно-рациональной функции получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{2^2-2+1}{2-3}=-3.\ \bullet$$

2. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

○ 1) Здесь предел делителя равен нулю: $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=4\cdot 2-8=0$. Следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=0$, то $4x-8$ при $x\to 2$ есть величина бесконечно малая, а

обратная ей величина $\frac{1}{4x-8}$ — бесконечно большая. Поэтому при $x\to 2$ произведение $\frac{1}{4x-8}\cdot 5$ есть величина бесконечно большая, т. е. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}=\infty$.

2) Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, так как при $x\to 0$ получается отношение двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю, и, следовательно, сделать возможным применение теоремы 3. Нужно иметь в виду, что здесь не производится сокращение на нуль, что недопустимо. По определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению, никогда не принимая этого значения; поэтому до перехода к пределу можно произвести сокращение на множитель, стремящийся к нулю. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\frac{2}{5}.$$

3) Пределы числителя и знаменателя при $x\to 3$ равны нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+6)=3^2-5\cdot 3+6=0$, $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-9x)=3\cdot 3^2-9\cdot 3=0$. Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим дробь на $x-3$. Используя следствие 4, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.\ \bullet$$

3. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

○ 1) Пределы числителя и знаменателя при $x\to a$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$ и затем сократив дробь на x, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

2) Очевидно, что при $x\to -2$ функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин. Выполнив вычитание дробей, получим дробь, числитель и знаменатель которой при $x\to -2$ стремятся к нулю. Сократив дробь на $x+2$, находим

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=\frac{-2-4}{(-2)^2-2(-2)+4}=-\frac{1}{2}.\ \bullet$$

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

○ 1) Первые три слагаемых при $x\to\infty$ пределов ие имеют, поэтому следствием 3 непосредственно воспользоваться нельзя. Вынося x^3 за скобки, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=(\lim_{x\to\infty}x)^3\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

(при $x\to\infty$ величины $6/x$, $5/x^2$ и $1/x^3$ — бесконечно малые и их пределы равны нулю).

2) При $x\to\infty$ знаменатель $4x+1$ неограниченно растет, т. е. является величиной бесконечно большой, а обратная величина $\frac{1}{4x+1}$ — бесконечно малой. Произведение $\frac{1}{4x+1}\cdot 5$ бесконечно малой на ограниченную величину (постоянная — частный случай ограниченной величины) есть величина бесконечно малая, и предел ее при $x\to\infty$ равен иулю. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}=0$.

3) При $x\to\infty$ числитель и знаменатель — величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственном применении теоремы 3 получаем выражение ∞/∞, которое представляет собой неопределенность. Для вычисления предела этой функции нужно числитель и знаменатель разделить на x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3/x}{5+1/x}=\frac{2+0}{5+0}=\frac{2}{5}$$

(при $x\to\infty$ слагаемые $3/x$ и $1/x$ — величины бесконечно малые и, следовательно, их пределы равны нулю).

4) Разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента в знаменателе, т. е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2/x+3/x^3}{3-5/x^3}.$$

При $x\to\infty$ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)=\infty \text{ и } \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x^3}\right)=3.$$

Так как знаменатель есть величина ограниченная, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\infty.$$

5) При $x\to\infty$ данная функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин $(\infty-\infty)$. Умножив и разделив функцию на выражение $x+\sqrt{x^2-4x}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-4/x}}=\frac{4}{2}=2.\ \bullet$$

Вычислите пределы:

5. 1) $\lim\limits_{x\to3}(x^3+x-5)$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-x^2+1)$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3-5x^2+x-4)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}(3x^3+x^2-8x+10)$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to1}[(7x+2)(4x-3)(5x+1)]$; 2) $\lim\limits_{x\to2}[(x^2-1)(x-3)(x-5)]$;

3) $\lim\limits_{x\to0}[(2x-4)(x-1)(x+2)]$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3}{2x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3+x}{x}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3/2}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2/3}\dfrac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2)$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{2x-2}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$.

§ 2. ЧИСЛО e. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

Имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e. \tag{6.1}$$

Число e — иррациональное ($e\approx2{,}718...$, более точное значение $e\approx2{,}7182818$). Логарифмы с основанием e называются натуральными, для них введено обозначение ln.

Десятичные и натуральные логарифмы связаны соотношениями

$$\lg N=M\ln N=0{,}4343\ln N; \tag{6.2}$$

$$\ln N=\frac{1}{M}\lg N=2{,}303\lg N, \tag{6.3}$$

где M — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

24. Найти натуральные логарифмы чисел: 1) 7; 2) 0,12.

○ По формуле (6.3) получим:
1) $\ln7=2{,}303\cdot\lg7=2{,}303\cdot0{,}8451=1{,}946$;
2) $\ln0{,}12=2{,}303\cdot\lg0{,}12=2{,}303\cdot\bar{1}{,}0792=2{,}303\cdot(-0{,}9208)=-2{,}121$. ●

25. Найти десятичные логарифмы чисел по их натуральным логарифмам: 1) 0,2624; 2) 2,1401.

○ По формуле (6.2) найдем:
1) $\lg N=0{,}4343\cdot0{,}2624=0{,}1140$; 2) $\lg N=0{,}4343\cdot2{,}1401=0{,}9294$. ●

26. Вычислить с помощью таблиц десятичных логарифмов: 1) e^3; 2) $\sqrt{e}$; 3) e^{-3}.

○ 1) $\lg e^3=3\lg e=3\cdot0{,}4343=1{,}3029$; $e^3=20{,}08$;
2) $\lg\sqrt{e}=0{,}5\lg e=0{,}5\cdot0{,}4343=0{,}2171$; $\sqrt{e}=1{,}648$;
3) $\lg e^{-3}=-3\lg e=-3,\cdot0{,}4343=-1{,}3029=\bar{2}{,}6971$; $e^{-3}=0{,}04978$. ●

27. Вычислить без помощи таблиц: 1) $\ln100$; 2) $\ln0{,}001$; 3) $\ln\sqrt{10}$.

○ 1) $\ln100=\ln10^2=2\ln10=2\cdot2{,}303=4{,}606$;
2) $\ln0{,}001=\ln10^{-3}=-3\ln10=-3\cdot2{,}303=-6{,}909$;
3) $\ln\sqrt{10}=0{,}5\ln10=0{,}5\cdot2{,}303=1{,}151$. ●

28. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{5/x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

○ Выполнив преобразования и используя формулу (6.1), находим:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)\cdot 3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]^3=$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]^3=e^3;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{1/(2x)}\right)^{5\cdot(1/x)\cdot(2/2)}=\lim\limits_{1/(2x)\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{1/(2x)}\right)^{1/(2x)}\right]^{10}=$

$=\left[\lim\limits_{1/(2x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{1/(2x)}\right)^{1/(2x)}\right]^{10}=e^{10};$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$ ●

29. Найдите натуральные логарифмы чисел: 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 10; 5) 0,3; 6) 0,8; 7) 5,8; 8) 0,24; 9) 15,6.

30. Найдите десятичные логарифмы чисел по их натуральным логарифмам: 1) 2,0794; 2) 3,6889; 3) 1,959.

31. Вычислите с помощью таблиц десятичных логарифмов: 1) e^5; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) e^{-2}.

32. Вычислите без помощи таблиц: 1) $\ln 1000$; 2) $\ln 0{,}01$; 3) $\ln\sqrt[3]{100}$.

Вычислите пределы:

33. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^x$.

34. 1) $\lim\limits_{z\to 0}(1+4z)^{3/5z}$; 2) $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-z}$.

35. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+0,5}$

§ 3. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

Вычислите пределы:

36. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$.

37. 1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{2z}{\sqrt{4+z}-\sqrt{4-z}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

38. 1) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -27}\frac{x+27}{\sqrt[3]{x}+3}$.

39. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+a^2}{n^3+a^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

40. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

41. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{2/(3x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{2x}$.

42. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$;

3) $\lim\limits_{z\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{3z^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$.

II вариант

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-x^3+2x}{x^4-8x^3+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$.

§ 4. ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА И ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ

Для функции $y=f(x)$ разность двух значений аргумента x_1 и x_2 из $D(f)$ называется *приращением аргумента* и обозначается символом Δx, т. е. $x_2-x_1=\Delta x$.

Разность двух значений функции $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ из $E(f)$, соответствующих значениям аргумента x_1 и x_2, называется *приращением функции* и обозначается символом Δy, т. е. $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1$.

Если $x_2>x_1$, то $\Delta x>0$; если же $x_2<x_1$, то $\Delta x<0$. Соответственно и приращение функции $\Delta y>0$, если $y_2>y_1$, и $\Delta y<0$, если $y_2<y_1$.

Приращение фуикции $y=f(x)$ находится по следующей схеме. Пусть аргумент x получил приращение Δx, тогда наращеиное значение аргумента есть $x+\Delta x$, а соответствующее ему значение функции есть $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. Чтобы найти приращение функции, нужно из наращениого значения функции вычесть первоначальное:

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=f(x+\Delta x) \\ y=f(x) \\ \hline \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \end{array}$$

43. Дана функция $y=x^2+x+1$. Найти приращение аргумента и приращение функции, если аргумент ь изменил свое значение от $ь_1=2$ до $x_2=2{,}5$.

○ Найдем приращение аргумента: $\Delta x=x_2-x_1=2{,}5-2=0{,}5$.

Вычислим значения функции, соответствующие значениям аргумента $x_1=2$ и $x_2=2{,}5$:

$y_1=f(x_1)=f(2)=2^2+2+1=7$; $y_2=f(x_2)=f(2{,}5)=(2{,}5)^2+2{,}5+1=9{,}75$.

Находим приращение функции: $\Delta y=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)=9{,}75-7=2{,}75$. ●

44. Дана функция $y=x^2+2x-4$. Найти приращение Δy при $x=2$ и $\Delta x=0{,}5$.

○ Найдем наращенное значение функции, соответствующее приращению Δx:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-4=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2x+2\Delta x-4.$$

Находим приращение функции:

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2x+2\Delta x-4 \\ y=x^2+2x-4 \\ \hline \Delta y=2x\Delta x+2\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 2\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}5+(0{,}5)^2=3{,}25. \end{array}$$ ●

45. Дана функция $y=x^2-2x+4$. Найдите приращение функции, если аргумент x изменил свое значение от $x_1=3$ до $x_2=3{,}5$.

46. Даны функции: 1) $y=x^2+2x$; 2) $y=x^3-1$. Найдите приращение Δy при $x=3$ и $\Delta x=0{,}1$.

47. Дана функция $y=1/x$. Найдите приращение Δy при $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$.

48. Дана функция $y=\sqrt{x}$. Найдите приращение Δy при $x=1$ и $\Delta x=0{,}1$.

49. Даны функции: 1) $y=\sqrt{2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$. Найдите приращение Δy при $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=a$, если предел функции при $x\to a$ равен значению функции при $x=a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Если условие непрерывности функции в точке $x=a$ нарушено, то такую точку называют *точкой разрыва* функции.

Для элементарных функций справедливы следующие положения:

1) область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения, т. е. элементарная функция непрерывна во всей области определения;

2) элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках;

3) элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Функция называется *непрерывной в промежутке* (замкнутом или открытом), если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

50. Исследовать на непрерывность функции: 1) $y=3x$; 2) $y=3x^2-2x$.

○ 1) Функция $y=3x$ определена для всех действительных значений аргумента x, т. е. областью ее определения является все числовая прямая. Область непрерывности совпадает с областью ее определения, что легко показать, использовав определение 2.

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем приращение функции Δy:

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=3(x+\Delta x)=3x+3\Delta x \\ y=3x \\ \hline \Delta y=3\Delta x \end{array}$$

Найдем предел Δy при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}3\Delta x=3\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=3\cdot 0=0.$$

Равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ справедливо при любом конечном значении x, поэтому функция $y=3x$ непрерывна при любом значении x.

2) Функция определена в промежутке $-\infty<x<+\infty$, в этом же промежутке она непрерывна. Имеем

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)= \\ =3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2-2x-2\Delta x \\ y=3x^2-2x \\ \hline \Delta y=6x\Delta x+3(\Delta x)^2-2\Delta x. \end{array}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=[6x\lim\Delta x+3(\lim\Delta x)^2-2\lim\Delta x]_{\Delta x\to 0}=6x\cdot 0+3\cdot 0^2-2\cdot 0=0.$$

Согласно определению 2, данная функция непрерывна при любом конечном значении x. ●

51. Исследовать на непрерывность функцию $y=x^2-2$ при $x=3$.

○ Для исследования используем определение 1:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-2)=\left(\lim_{x\to 3}x\right)^2-2=3^2-2=7;\ f(3)=3^2-2=7,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2)=f(3)$. Предел функции при $x\to 3$ равен значению функции при $x=3$. Следовательно, функция $y=x^2-2$ в точке $x=3$ непрерывна. ●

Исследуйте на непрерывность функции:

52. 1) $y=-5x$; 2) $y=4x-3$.

53. 1) $v=2t^2$; 2) $y=x^2+2$; 3) $s=t^2-t$; 4) $y=x-3x^2$; 5) $y=x^3$; 6) $y=-x^3-1$; 7) $y=2x^3$.

54. 1) $y=x^2+4x+3$ в точке $x=2$; 2) $y=x^3-5$ в точке $x=1$.

§ 6. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Если функция $y=f(x)$ при $x=a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$ при $x\to a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов: 1) *разрыв I рода* — в этом случае существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; 2) *разрыв II рода* — в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

55. Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

1) $y=\dfrac{x}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$; 3) $y=3^{1/x}$; 4) $y=\dfrac{1}{1+5^{1/x}}$.

○ 1) Данная функция определена при всех значениях x, кроме $x=3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x=3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=-\infty,\quad \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3}=+\infty.$$

Следовательно, функция $\dfrac{x}{x-3}$ в точке $x=3$ имеет бесконечный разрыв, т. е. $x=3$ — точка разрыва II рода.

2) Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что точками разрыва данной функции служат точки $x=2$ и $x=4$, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Очевидно, что в этих точках функция имеет бесконечный разрыв, т. е. $x=2$ и $x=4$ — точки разрыва II рода.

3) Здесь функция определена при всех значениях x, кроме $x=0$. Найдем левый и правый пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to -0} 3^{1/x}=0,\quad \lim_{x\to +0} 3^{1/x}=+\infty.$$

Так как при x, стремящемся к нулю справа, функция имеет бесконечный предел, то $x=0$ — точка разрыва II рода.

4) В этом случае единственной точкой разрыва также является точка $x=0$. Вычислим односторонние пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+5^{1/x}}=1,\quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{1+5^{1/x}}=0.$$

Поскольку левый и правый пределы функции при $x=0$ являются конечными, $x=0$ — точка разрыва I рода. ●

56. Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для следующих функций:

1) $y=\dfrac{5}{2x-1}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; 4) $y=\dfrac{3}{x^2-2x+1}$;

5) $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x-10}$; 6) $y=1+2^{1/(x-2)}$.

§ 7. АСИМПТОТЫ

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат. Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. График функции $y=f(x)$ при $x\to a$ имеет вертикальную асимптоту, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$; при этом $x=a$ есть точка разрыва II рода. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид $x=a$ (рис. 11, *а* и *б*).

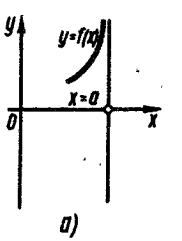


Рис. 11

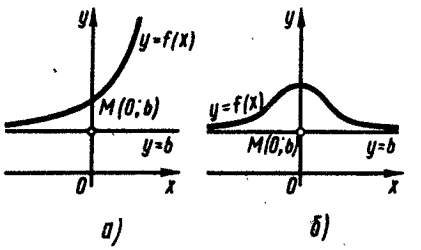


Рис. 12

Горизонтальные асимптоты. График функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$ имеет горизонтальную асимптоту, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b_1$. Может оказаться, что либо только один из этих пределов конечный, либо ни одного, тогда график имеет или одну горизонтальную асимптоту, или ни одной. Уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид $y=b$ (рис. 12, *а* и *б*).

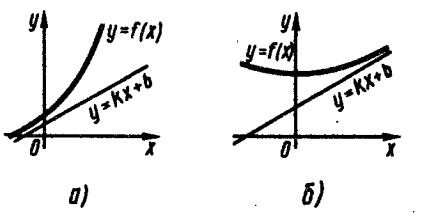


Рис. 13

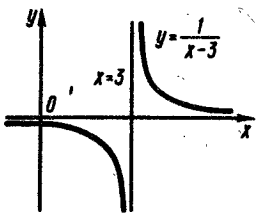


Рис. 14

Наклонные асимптоты. Пусть график функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ (рис. 13, *а* и *б*). В этом случае справедливо равенство

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx-b]=0.$$

Вынося x за скобки, получим

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0$, то отсюда получаем формулы для вычисления параметров k и b:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b.$$

Следует отдельно рассматривать случаи $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

57. Найти асимптоты кривых:

1) $y=\frac{1}{x-3}$; 2) $y=\frac{x}{x-1}$; 3) $y=e^{1/x}$; 4) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

○ 1) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-3}=0$, то кривая $y=\frac{1}{x-3}$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$. Далее, находим $\lim\limits_{x\to3-0}\frac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to3+0}\frac{1}{x-3}=+\infty$; следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x=3$ (рис. 14).

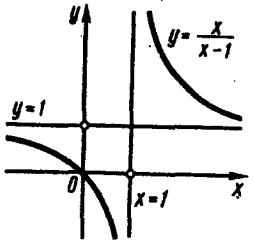


Рис. 15

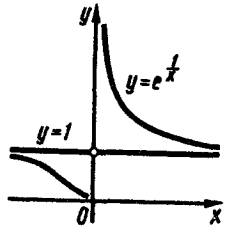


Рис. 16

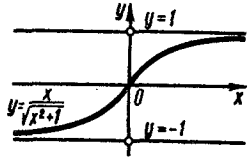


Рис. 17

2) Имеем $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x}{x-1}=+\infty$. Значит, $x=1$ — точка разрыва II рода и, следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x=1$.

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1,$$

т. е. $y=1$ — горизонтальная асимптота графика (рис. 15).

3) Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=1$, то горизонтальной асимптотой служит прямая $y=1$. Найдем вертикальную асимптоту: $\lim\limits_{x\to+0}e^{1/x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}e^{1/x}=0$; следовательно, $x=0$ — вертикальная асимптота (рис. 16).

4) Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=-1.$$

При $x\to+\infty$ асимптотой служит прямая $y=1$, а при $x\to-\infty$ — прямая $y=-1$ (рис. 17). ●

58. Найти асимптоты кривой $y=\frac{x^2}{x-1}$.

○ Находим наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1,$$

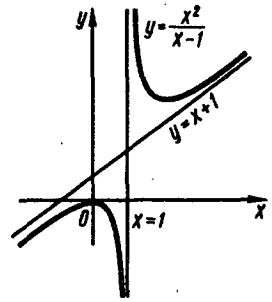


Рис. 18

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Итак, $k=1$ и $b=1$; следовательно, при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

Если $x\to1$, то $y\to\pm\infty$, значит прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой (рис. 18). ●

59. Найдите асимптоты кривых:

1) $y=\frac{x^3}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$; 3) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 4) $y=\frac{1}{1-e^x}$.

60. Найдите наклонные асимптоты кривых:

1) $y=x+e^{-x}$; 2) $y=\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

61. Найдите асимптоты кривых:

1) $y=\frac{2}{x+2}$; 2) $y=\frac{5}{x^2-25}$; 3) $y=\frac{x^2+6x-5}{x}$; 4) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; 5) $y=\frac{x^2}{x+3}$;

6) $y=\frac{3x^2}{x^2+5}$; 7) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 8) $y=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$.

§ 8. РЕШЕНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ПРОМЕЖУТКОВ

Решение неравенств методом промежутков основано на следующем свойстве непрерывной функции: *если непрерывная функция обращается в нуль в точках x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ и между этими точками других корней не имеет, то в промежутке $x_1<x<x_2$ функция сохраняет знак.*

Поэтому для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y=f(x)$ поступают так. На числовой прямой отмечают все точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или претерпевает разрыв. Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемого промежутка оси Ox.

62. Решить неравенства:

1) $(x+3)(x-2)(x-5)<0$; 2) $(x-3)(x-5)(x^2+2x+5)\leqslant0$.

Рис. 19

Рис. 20

○ 1) Многочлен $P(x)=(x+3)(x-2)(x-5)$ обращается в нуль в точках $x_1=-3$, $x_2=2$ и $x_3=5$. Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки $-\infty<x<-3$, $-3<x<2$, $2<x<5$, $5<x<+\infty$ (рис. 19), внутри каждого из которых функция $P(x)$ сохраняет знак. Рассматривая эти промежутки справа налево, находим знак функции $P(x)$ для каждого из промежутков: при $5<x<\infty$ (например, $x=10$) $P(x)>0$; при $2<x<5$ (например, $x=3$) $P(x)<0$; при $-3<x<2$ (например, $x=0$) $P(x)>0$; при $-\infty<x<-3$ (например, $x=-10$) $P(x)<0$, т. е. знаки функции $P(x)$ чередуются, причем для значений x из крайнего правого промежутка $P(x)>0$. Так как по условию $P(x)<0$, то решением неравенства является совокупиость промежутков $\left[\begin{array}{l}-\infty<x<-3,\\ 2<x<5.\end{array}\right.$

2) Трехчлен x^2+2x+5 для всех $x\in\mathbf{R}$ прииимает положительные значения (так как $D=2^2-4\cdot5<0$). Поэтому данное иеравенство равносильно неравеиству $(x-3)(x-5)\leqslant0$. На рис. 20 показаны промежутки знакопостоянства левой части данного неравенства. Решением неравеиства служат все точки промежутка $3\leqslant x\leqslant5$. ●

63. Решить неравенства:

1) $\dfrac{(x-5)(x-3)(x+2)}{(x-4)(x+4)}\leqslant0$; 2) $\dfrac{(x-3)^2(x-2)(x+1)}{(x-4)(x+3)}\leqslant0$.

○ 1) Умиожив обе части данного неравенства на квадрат знаменателя $(x-4)^2(x+4)^2$, получим иеравенство

$$(x-5)(x-4)(x-3)(x+2)(x+4)\leqslant0,$$

имеющее два посторонних решения -4 и 4, которые надо исключить из миожества его решений. Левая часть последиего неравенства обращается в нуль в точках -4, -2, 3, 4, 5. Таким образом, получаем промежутки знакопостоянства $-\infty<x<-4$, $-4<x<-2$, $-2<x<3$, $3<x<4$, $4<x<5$, $5<x<+\infty$ (рис. 21). Решением неравеиства служит совокупность промежутков

$$\left[\begin{array}{l}-\infty<x<-4,\\ -2\leqslant x\leqslant3,\\ 4<x\leqslant5.\end{array}\right.$$

2) Умножив обе части данного неравенства на $(x-4)^2(x+3)^2$, получим иеравенство

$$(x-3)^2(x-2)(x+1)(x-4)(x+3)\leqslant0,$$

имеющее два посторонних решения -3 и 4, которые надо исключить из множества решений. Левая часть последнего неравенства обращается в нуль в точках -3, -1, 2, 3 и 4. Таким образом, получаем промежутки зиакопостоянства $-\infty<x<-3$, $-3<x<-1$, $-1<x\leqslant2$, $2\leqslant x\leqslant3$, $3\leqslant x<4$ и $4<x<+\infty$ (рис. 22).

Рис. 21

Рис. 22

Решением неравенства служит совокупиость промежутков $\left[\begin{array}{l}-3<x\leqslant1,\\ 2\leqslant x<4\end{array}\right.$ (так как значение $x=3$ является решением неравенства и принадлежит промежутку $2\leqslant x<4$, то его специально выделять в ответе не нужно). ●

64. Решить неравенство $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$.

○ Имеем

$$\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}+3>0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{4x^2-14x+12}{x^2-4x+3}>0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}>0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2(x-3/2)(x-2)}{(x-1)(x-3)}>0\right).$$

Умножив левую и правую части последнего неравенства на $(x-1)^2(x-3)^2$, получим

$$(x-1)(x-3/2)(x-2)(x-3)>0.$$

Используя метод промежутков, находим решение данного неравенства:

$$\left[\begin{array}{l}-\infty<x<1,\\ 3/2<x<2,\\ 3<x<\infty.\end{array}\right.$$ ●

Решите неравенства:

65. 1) $(x+2)(x-4)(x-5)<0$;
2) $(x+1)(x-2)(x-3)>0$;
3) $(x+4)(x-1)(x-5)\leqslant0$;
4) $(x+4)(x+2)^2(x-1)<0$;
5) $(x+3)(x-2)^3(x-3)(x-4)\geqslant0$.

66. 1) $(x-2)(x-3)(x^2+x+3)\leqslant0$;
2) $(x+3)(x+4)(x^2+2x+5)>0$.

67. 1) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+1)}\leqslant0$; 2) $\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+3)(x+2)}>0$;

3) $\dfrac{(x+1)^3(x+2)}{(x-1)(x-3)}\leqslant0$.

68. 1) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0$; 2) $\dfrac{x-1}{x-2}>\dfrac{x-2}{x-1}$;

3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}>0$; 4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x+8}<0$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Решите неравенства методом промежутков:

1) $(x+2)(x-3)(x-5)>0$;

2) $\dfrac{(x+3)(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+5)}\geqslant 0$;

3) $\dfrac{3x^2-17x+18}{x^2-5x+4}<2$.

4) Дана функция $y=1/x^2$. Вычислите приращение Δy при $x=1$ и $\Delta x=0{,}1$.

5) Найдите асимптоты кривой $y=\dfrac{x}{x-2}$.

II вариант

Решите неравенства методом промежутков:

1) $(x+5)(x-4)(x-6)<0$;

2) $\dfrac{(x-1)(x-3)(x+2)}{(x-4)(x+5)}\leqslant 0$;

3) $\dfrac{3x^2-14x+14}{x^2-4x+3}>2$.

4) Дана функция $y=\sqrt{x}$. Вычислите приращение Δy при $x=1$ и $\Delta x=0{,}02$.

5) Найдите асимптоты кривой $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Глава 7
ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

Вычисление скорости изменения функции $y=f(x)$ производится по следующему общему правилу:

I. Изменение аргумента x на некоторую величину Δx вызовет изменение функции y на величину Δy, т. е.

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

II. Находится приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=f(x+\Delta x) \\ -\quad y=f(x) \\ \hline \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \end{array}$$

III. Средняя скорость изменения функции y для промежутка значений аргумента от x до $x+\Delta x$ выражается отношением

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента.

IV. Мгновенная (или истинная) скорость изменения функции при данном значении x есть предел, к которому стремится средняя скорость $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ в промежутке изменения аргумента от x до $x+\Delta x$, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Для линейной функции $y=kx+b$ средняя скорость $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=k$ и истинная скорость $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=k$ совпадают по величине и числовое значение истиной скорости равно коэффициенту k.

1. Найти среднюю скорость изменения функции $y=3x^2-6$ при изменении x от $x_1=3$ до $x_2=3{,}5$.

○ I способ. Найдем приращение аргумента: $\Delta x=x_2-x_1=3{,}5-3=0{,}5$.

Найдем значения функции при x_1 и x_2: $y_1=3\cdot 3^2-6=21$, $y_2=3\cdot(3{,}5)^2-6=30{,}75$.

Вычислим приращение функции: $\Delta y=y_2-y_1=30{,}75-21=9{,}75$.

Находим среднюю скорость изменения функции: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{9{,}75}{0{,}5}=19{,}5$.

II способ. Вычислим среднюю скорость изменения функции при любом значении аргумента по общему правилу:

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-6=3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2-6 \\ -\quad y=3x^2-6 \\ \hline \Delta y=6x\Delta x+3(\Delta x)^2; \\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=6x+3\Delta x. \end{array}$$

Найдем приращение аргумента: $\Delta x=x_2-x_1=3{,}5-3=0{,}5$. Вычислим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}5$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6\cdot 3+3\cdot 0{,}5=19{,}5$. ●

2. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s=3t^2-2t+5$ (t выражено в секундах, а s — в метрах). Найти скорость движения точки в момент $t=5$.

○ Найдем среднюю скорость движения точки:

$$\begin{array}{r} s+\Delta s=3(t+\Delta t)^2-2(t+\Delta t)+5= \\ =3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2t-2\Delta t+5 \\ -\quad s=3t^2-2t+5 \\ \hline \Delta s=6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2\Delta t; \\ \dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2\Delta t}{\Delta t}=6t+3\Delta t-2. \end{array}$$

Найдем истинную скорость движения точки в момент времени t:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(6t+3\Delta t-2)=6t-2.$$

Найдем скорость движения точки в конце 5-й секунды $v(5)=6\cdot 5-2=28$ (м/с). ●

3. 1) Найдите среднюю скорость изменения функции $y=2x^2+5x$ при изменении x от $x_1=2$ до $x_2=3$.

2) Закон движения точки задан формулой $s=4t^2-2$ (t выражено в секундах, s — в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки за промежуток времени от $t_1=4$ до $t_2=6$.

4. 1) Прямолинейное движение точки задано уравнением $s=5t^2$ (t — в секундах, s — в метрах). Найдите скорость движения точки в конце 10-й секунды.

2) Прямолинейное движение точки задано уравнением $s=2t^2-8t-10$ (t — в секундах, s — в метрах). Найдите скорость движения точки в конце 8-й секунды.

§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в этой точке к приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке.

Для производной функции $y=f(x)$ употребляются следующие обозначения: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$ или f', $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$. Нахождение производной называется дифференцированием.

Вычисление производной функции $y=f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:

I. Придавая аргументу x приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x+\Delta x$, находим наращенное значение функции: $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

II. Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

III. Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, т. е. составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

IV. Находим предел этого отношения при $\Delta x\to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Этот предел и есть производная от функции $y=f(x)$.

5. Найти: 1) $y'(3)$, если $y=2x^2-3x$; 2) $y'(4)$, если $y=\sqrt{x}$.

○ 1) Находим производную по общему правилу:

$$\begin{array}{r}y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)=\\ =2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3x-3\Delta x\\ y=2x^2-3x\\ \hline \Delta y=4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3\Delta x;\end{array}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+2\Delta x-3$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x+2x\Delta x-3)=4x-3$; $y'=4x-3$.

Найдем значение производной при $x=3$: $y'(3)=4\cdot 3-3=9$.

2) Находим производную по общему правилу:

$$\begin{array}{r}y+\Delta y=y\sqrt{x+\Delta x}\\ y=\sqrt{x}\\ \hline \Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x};\end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x};\quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.\ \bullet$$

6. Найдите: 1) $y'(0)$, если $y=x^2-x$; 2) $y'(1)$, если $y=x^2-5x+4$; 3) $s'(2)$, если $s=t^3$.

7. Найдите: 1) $y'(3)$, если $y=-3/x$; 2) $y'(-1)$, если $y=1/x^2$.

8. Найдите: 1) $y'(5)$, если $y=\sqrt{x-1}$; 2) $y'(4)$, если $y=1/\sqrt{x}$; 3) $y'(2\sqrt{2})$, если $y=\sqrt[3]{x}$.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ СТЕПЕНИ И КОРНЯ

Обозначения: C — постояниая; x — аргумент; u, v, w — функции от x, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

Производная алгебраической суммы функций

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'. \tag{7.1}$$

Производная произведения двух функций

$$(uv)'=u'v+v'u. \tag{7.2}$$

Производная произведения трех фуикций

$$(uvw)'=u'vw+v'uw+w'uv. \tag{7.3}$$

Производная произведения постояиной на функцию

$$(Cu)'=Cu'. \tag{7.4}$$

Производная частного (дроби)

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. \tag{7.5}$$

Частные случаи формулы (7.5):

$$\left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}u'; \tag{7.6}$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{C}{v^2}v'. \tag{7.7}$$

Если y есть функция от u: $y=f(u)$, где u, в свою очередь, есть функция от аргумента x: $u=\varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется *сложной функцией* от x (*функцией от функции*): $y=f[\varphi(x)]$.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \text{ или } y'(x)=y'(u)\cdot u'(x).$$

Исходя из этого соотношения, можно получить формулы дифференцирования сложных функций.

При вычислении производных необходимо помнить, что (по определению)

$$a^0=1 \ (a\neq 0); \ a^{-n}=1/a^n \ (a\neq 0); \ \sqrt[n]{a^m}=a^{m/n} \ (a>0),$$

и знать следующие правила действий со степенями и корнями:

$$a^n a^m=a^{n+m}; \ a^n/a^m=a^{n-m}; \ (a^n)^m=a^{nm};$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=a^{1/n}b^{1/n} \ (a>0, \ b>0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} \ (a>0, \ b>0).$$

Здесь m и n — любые рациональные числа.

Формулы дифференцирования

При условии $u=\varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u=x$	Номер формулы
		$C'=0$	(7.8)
		$x'=1$	(7.9)
$(u^n)'=nu^{n-1}u'$, где n — любое действительное число	(7.10)	$(x^n)'=nx^{n-1}$, где n — любое действительное число	(7.10а)
$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}u'$	(7.11)	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	(7.11а)
$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$	(7.12)	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	(7.12а)

Найти производные следующих функций:

9. 1) $y=3x^4$; 2) $y=2x^{-5}$; 3) $y=4x^{1/3}$; 4) $y=5x^{-2/5}$; 5) $y=5\sqrt[5]{x^3}$.

○ 1) Используя формулу (7.4), вынесем постоянный множитель за знак производной, а затем применим формулу (7.10а);

$$y'=3(x^4)'=3\cdot 4x^{4-1}=12x^3.$$

Аналогично, используя формулы (7.4) и (7.10а), получим:

2) $y'=2\cdot(-5)x^{-5-1}=-10x^{-6}=-\frac{10}{x^6}$;

3) $y'=4\cdot\frac{1}{3}x^{1/3-1}=\frac{4}{3}x^{-2/3}=\frac{4}{3x^{2/3}}=-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

4) $y'=5\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-2/5-1}=-2x^{-7/5}$;

5) $y'=5\cdot(x^{3/5})'=5\cdot\frac{3}{5}x^{3/5-1}=3x^{-2/5}$. ●

10. 1) $y=\frac{1}{2x^{2/3}}$; 2) $y=3x^2\sqrt[3]{x}$; 3) $y=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x}}$.

○ Сначала каждую из функций преобразуем к виду $y=x^n$, а затем воспользуемся соотношениями (7.4) и (7.10а):

1) $y=\frac{1}{2x^{2/3}}=\frac{1}{2}x^{-2/3}$;

$$y'=\frac{1}{2}(x^{-2/3})'=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-2/3-1}=-\frac{1}{3}x^{-5/3}=-\frac{1}{3x^{5/3}}=-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}};$$

2) $y=3x^2\sqrt[3]{x}=3x^2x^{1/3}=3x^{7/3}$;

$$y'=3(x^{7/3})'=3\cdot\frac{7}{3}x^{7/3-1}=7x^{4/3}=7x\sqrt[3]{x};$$

3) $y=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2x^2}{x^{1/3}}=2x^{5/3}$;

$$y'=2(x^{5/3})'=2\cdot\frac{5}{3}x^{5/3-1}=\frac{10}{3}x^{2/3}=\frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2}.$$ ●

11. $f(x)=1/x^4$; вычислить $f'(-1)$ и $f'(2)$.

○ Имеем $f(x)=1/x^4=x^{-4}$. Следовательно,

$$f'(x)=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-4/x^5.$$

Для вычисления $f'(-1)$ и $f'(2)$ нужно в выражение производной вместо x подставить значения -1 и 2:

$$f'(-1)=-4/(-1)^5=-4/(-1)=4; \ f'(2)=-4/2^5=-4/32=-1/8.$$ ●

12. $y=4x^3+2x^2+x-5$.

○ Применив последовательно формулы (7.1), 7.4), (7.10а), (7.9) и (7.8), имеем

$$y'=(4x^3)'-(2x^2)'+x'-5'=4(x^3)'-2(x^2)'+x'-5'=$$
$$=4\cdot 3x^2-2\cdot 2x+1=12x^2-4x+1.$$

При навыке дифференцирования промежуточные действия обычно выполняются в уме и поэтому в подобных примерах сразу же записывается окончательный результат дифференцирования. ●

13. $f(x)=(x^3-1)(x^2+x+1)$.

○ Используя формулы (7.2), (7.1), (7.10а), (7.8) и (7.9), находим

$$f'(x)=(x^3-1)'(x^2+x+1)+(x^2+x+1)'(x^3-1)=$$
$$=3x^2(x^2+x+1)+(2x+1)(x^3-1)=3x^2(x^2+x+1)+(2x+1)(x-1)(x^2+x+1)=$$
$$=(x^2+x+1)[3x^2+(2x+1)(x-1)]=(x^2+x+1)(3x^2+2x^2-2x+x-1)=$$
$$=(x^2+x+1)(5x^2-x-1).$$ ●

14. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

○ Используя формулы (7.5), (7.1), (7.10а) и (7.8), получим

$$y'=\frac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=$$
$$=\frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(-2)}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$ ●

Найдите производные следующих функций:

15. 1) $y=x^4$; 2) $y=2x^3$; 3) $y=3x^{-5}$; 4) $y=-3x^{-2}$; 5) $y=x^{7/5}$; 6) $y=4x^{3/2}$; 7) $y=5x^{-3/5}$; 8) $y=2\sqrt{x^3}$; 9) $y=\sqrt[4]{x^{-3}}$; 10) $y=\sqrt[3]{x^{-2}}$.

16. 1) $y=-\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{3}{x^{4/3}}$; 3) $y=\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$; 4) $y=2x^3\sqrt[3]{x}$; 5) $y=\dfrac{x^4}{\sqrt{x}}$; 6) $y=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^3}}$; 7) $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{x^3}$; 8) $y=\dfrac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; 9) $y=4\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}$; 10) $y=3\sqrt{\dfrac{1}{x^{-2}}}$; 11) $f(x)=x^{-2}\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$; 12) $s=\dfrac{\sqrt{t^2}\sqrt[3]{t^2}}{t\sqrt{t}}$.

17. 1) $f(x)=1/x^3$; вычислите $f'(1/2)$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$; вычислите $f'(-8)$; 3) $y=x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$; вычислите $y'(1)$.

18. 1) $f(x)=-x^3+9x^2+x-1$; вычислите $f'(-1)$; 2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-1$; вычислите $f'(3)$; 3) $f(t)=0{,}5t^3+0{,}6t^2+0{,}8t+8$; вычислите $f'(1)$.

19. 1) $y=-3x^{-5}+15x^{-4}-2x^{-3}+x^{-1}+2$; 2) $y=4x^{3/4}+3x^{2/3}+4x^{1/2}+3x$.

20. 1) $y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+8$; 2) $y=2\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}+1$.

21. 1) $f(x)=(2x+1)(x^2+3x-1)$; 2) $f(x)=(3x^2+1)(2x^2+3)$; 3) $f(x)=(x^3+x^2+x+1)(x-1)$.

22. 1) $y=\dfrac{x-a}{x+a}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2-x^2}$; 3) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; 4) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Найти производные следующих функций:

23. $y=(x^2-5x+8)^6$.

○ Полагая $u=x^2-5x+8$, получим $y=u^6$. По формуле (7.10) находим

$$y'=6u^5u'=6(x^2-5x+8)^5(x^2-5x+8)'=6(x^2-5x+8)^5(2x-5).$$

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме. ●

24. $y=\dfrac{1}{(x^2-1)^4}$.

○ I способ. Применим последовательно формулы (7.11) и (7.10):

$$y'=-\frac{1}{[(x^2-1)^4]^2}[(x^2-1)^4]'=-\frac{1}{(x^2-1)^8}4(x^2-1)^3(x^2-1)'=-\frac{1}{(x^2-1)^8}\times$$
$$\times 4(x^2-1)^3\cdot 2x=-\frac{8x(x^2-1)^3}{(x^2-1)^8}=-\frac{8x}{(x^2-1)^5}.$$

II способ. Введем отрицательный показатель и применим формулу (7.10):

$$y=(x^2-1)^{-4};\ y'=-4(x^2-1)^{-4-1}(x^2-1)'=-4(x^2-1)^{-5}\cdot 2x=-\frac{8x}{(x^2-1)^5}.$$ ●

25. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

○ Полагая $u=4-x^2$, получим $f(x)=\sqrt{u}$. По формуле (7.12) находим

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(4-x^2)'=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$ ●

26. $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3}$.

○ По формуле производной произведения получим

$$y'=(x^2+6)'\sqrt{x^2-3}+(\sqrt{x^2-3})'(x^2+6).$$

Найдем производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования:

$$y'=2x\sqrt{x^2-3}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}(x^2+6)=2x\sqrt{x^2-3}+\frac{x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=$$
$$=\frac{2x(\sqrt{x^2-3})^2+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x(x^2-3)+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x^3-6x+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}}.$$ ●

27. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$.

○ Заменим кубический корень дробным показателем и по формуле (7.10) найдем производную степени:

$$y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}=(x^3+1)^{2/3};$$
$$y'=\frac{2}{3}(x^3+1)^{-1/3}(x^3+1)'=\frac{2}{3}(x^3+1)^{-1/3}3x^2=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$ ●

Найдите производные следующих функций:

28. 1) $y=(x^3-2x^2+5)^3$; 2) $f(x)=(x^3-1)^6$.

29. 1) $f(x)=(ax^2+bx+c)^n$; 2) $y=(r^2-x^2)^4$.

30. 1) $y=\frac{1}{(1-x^3)^5}$; 2) $y=\frac{1}{(ax+b)^n}$.

31. 1) $y=\frac{(x^4+1)^3}{(x^3+1)^2}$; 2) $y=\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^n$.

32. 1) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+6}$; 2) $f(t)=\sqrt{t^2-t+1}$; вычислите $f'(2)$; 3) $y=\sqrt{r^2-x^2}$; 4) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; 5) $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 6) $y=\sqrt{2px}$.

33. 1) $y=x\sqrt{x^2-1}$; 2) $s=t^2\sqrt{2t-1}$; 3) $s=(t^2+1)\sqrt{t^2-1}$; 4) $y=(2x-1)^2\sqrt{1-2x}$.

34. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$.

35. 1) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$; 2) $y=\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; 3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$; 4) $y=\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$.

36. 1) $y=\sqrt[3]{x^3-1}$; 2) $y=\sqrt[4]{(ax+b)^3}$; 3) $y=\sqrt{(2x-1)^3}$; 4) $f(t)=\sqrt[3]{t^2+t-1}$; вычислите $f'(1)$.

§ 5. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

При прямолинейном движении точки скорость v в данный момент $t=t_0$ есть производная $\frac{ds}{dt}$ от пути s по времени t, вычисленная при $t=t_0$.

Ускорение a в данный момент $t=t_0$ есть производная $\frac{dv}{dt}$ от скорости v по времени t, вычисленная при $t=t_0$.

В задачах этого параграфа путь s выражен в метрах (м), время t — в секундах (с), скорость v — в метрах в секунду (м/с) и ускорение a — в метрах на секунду в квадрате (м/с^2).

37. Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3+t^2-4$. Найти значения скорости и ускорения в момент времени $t=4$.

○ Найдем скорость движения точки в любой момент времени t: $v=\frac{ds}{dt}=6t^2+2t$. Вычислим скорость движения точки в момент $t=4$: $v(4)=6\cdot4^2+2\cdot4=104$ (м/с).

Найдем ускорение движения точки в любой момент времени t: $a=\frac{dv}{dt}=12t+2$. Вычислим ускорение движения точки в момент времени $t=4$: $a(4)=12\cdot4+2=50$ (м/с^2). ●

38. Точка движется прямолинейно по закону $s=6t-t^2$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?

○ Определим скорость движения точки в любой момент времени t: $v=\frac{ds}{dt}=6-2t$. Полагая $v=0$, получим $6-2t=0$, откуда $t=3$. Таким образом, скорость точки равна нулю в конце 3-й секунды. ●

39. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T=0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t=10$?

○ При нагревании тела его температура T изменяется в зависимости от времени t, т. е. T есть функция времени: $T=f(t)$. Скорость нагревания тела есть производная температуры по времени: $\frac{dT}{dt}=0{,}4t$; $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=10}=0{,}4\cdot10=4$. Итак, в момент времени $t=10$ тело нагревается со скоростью 4 град/с. ●

40. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $s=3t^2+t+4$. Найти кинетическую энергию тела $(mv^2/2)$ через 4 с после начала движения.

○ Найдем скорость движения тела в момент времени t: $v=\frac{ds}{dt}=6t+1$. Вычислим скорость тела в момент $t=4$; $v(4)=6\cdot4+1=25$ (м/с). Определим кинетическую энергию тела в момент $t=4$: $mv^2/2=10\cdot25^2/2=3125$ (Дж). ●

41. Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I=0{,}4t^2$ (I — в амперах, t — в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

○ Скорость изменения силы тока есть производная силы тока по времени:

$$\frac{dI}{dt}=0{,}8t;\ \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=8}=0{,}8\cdot8=6{,}4\ (\text{А/с}).\ ●$$

42. Найдите скорость и ускорение в указанные моменты времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением: 1) $s=t^3+5t^2+4$, $t=2$; 2) $s=\sqrt{t}$, $t=1$; 3) $s=t^2+11t+30$, $t=3$.

43. Найдите ускорение точки в указанные моменты времени, если скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением: 1) $v=t^2+t-1$, $t=3$; 2) $v=t^2+5t+1$, $t=3$.

44. Точка движется прямолинейно по закону $s=t^2-8t+4$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?

45. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону $T=0{,}5t^2-2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t=5$?

46. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $s=5t^2-2$. Найдите кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

47. Изменение силы тока I в зависимости от времени t дано уравнением $I=2t^2-5t$ (I — в амперах, t — в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в конце 10-й секунды.

§ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Формулы дифференцирования

При условии $u=\varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u=x$	Номер формулы
$(\ln)'=\frac{1}{u}u'$	(7.13)	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	(7.13a)
$(\lg u)'=\frac{0{,}4343}{u}u'$	(7.14)	$(\lg x)'=\frac{0{,}4343}{x}$	(7.14a)

Найти производные следующих функций:

48. 1) $y=x+\ln x$; 2) $y=5\lg x$; 3) $y=\ln(ax^2+b)$.

○ 1) По формулам (7.1), (7.9) и (7.13a) получим

$$y'=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}.$$

2) Дифференцируем по формулам (7.4) и (7.14a):

$$y'=5\cdot\frac{0{,}4343}{x}=\frac{2{,}1715}{x}.$$

3) По формуле (7.13) получим

$$y'=\frac{1}{ax^2+b}(ax^2+b)'=\frac{1}{ax^2+b}\cdot 2ax=\frac{2ax}{ax^2+b}.$$ ●

49. 1) $f(x)=\ln\frac{a-x}{a+x}$; вычислите $f'(2a)$; 2) $y=\ln\sqrt{2x}$.

○ 1) Для упрощения нахождения производной предварительно прологарифмируем дробь: $f(x)=\ln(a-x)-\ln(a+x)$. Далее, по формулам (7.1), (7.13), (7.8) и (7.9) получим

$$f'(x)=\frac{1}{a-x}(a-x')-\frac{1}{a+x}(a+x)'=-\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}=\frac{2a}{x^2-a^2},\quad f'(2a)=\frac{2}{3a}.$$

2) Прологарифмируем корень квадратный: $y=\frac{1}{2}\ln(2x)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln x$. По формулам (7.1), (7.8) и (7.13a) получим $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$. ●

Найдите производные следующих функций:

50. 1) $f(x)=3\ln x-x^2$; вычислите $f'(1)$; 2) $f(x)=\lg x+x^3$; вычислите $f'(-1)$; 3) $y=x^2\ln x$; 4) $y=(1-\ln x)x$; 5) $f(z)=z^3-3\ln z$; вычислите $f'(3)$.

51. 1) $y=\frac{\ln x-2}{\ln x}$; 2) $y=\frac{\ln x+1}{\ln x}$.

52. 1) $y=\ln 3x$; 2) $y=\ln(2x^2-3)$.

53. 1) $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$; 2) $y=\ln\frac{2}{2+x}$.

54. 1) $y=\lg 10x$; 2) $y=\lg(2x+1)$.

55. 1) $y=\ln\sqrt{2x-1}$; 2) $y=\ln\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y=\lg\sqrt{x^2+4}$; 4) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

56. 1) $y=\ln^3 3x$; 2) $y=\ln^2(2x+1)$; 3) $y=\ln^2(x^2-1)$.

§ 7. ПРОИЗВОДНЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Формулы дифференцирования

При условии $u=\varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u=x$	Номер формулы
$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	(7.15)	$(a^x)'=a^x\ln a$	(7.15a)
$(e^u)'=e^u u'$	(7.16)	$(e^x)'=e^x$	(7.16a)

Найти производные следующих функций:

57. $y=2\cdot 5^x+3e^x$.

○ По формулам (7.1), (7.15a), (7.16a) и (7.4) получим

$$y'=2\cdot 5^x\ln 5+3e^x=2\ln 5\cdot 5^x+3e^x.$$ ●

58. $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; вычислить $f'(-1)$.

○ I способ. Применив формулы (7.5), (7.1), (7.16a) и (7.9), получим

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x-1)'(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2};$$

$$f'(-1)=-\frac{2e^{-1}}{(e^{-1}-1)^2}=-\frac{2e}{(1-e)^2}.$$

II способ. Прологарифмировав функцию, находим производную логарифма:

$$\ln f(x)=\ln(e^x+1)-\ln(e^x-1);$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}.$$

Следовательно,

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}=\frac{e^x+1}{e^x-1}\cdot\frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}=-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}.$$ ●

59. 1) $y=3^{2x^2}$; 2) $y=e^{-2x}$.

○ 1) По формуле (7.15) получим

$$y'=3^{2x^2}\ln 3\cdot(2x^2)'=3^{2x^2}\ln 3\cdot 4x=4x\cdot 3^{2x^2}\ln 3.$$

2) По формуле (7.16) находим

$$y'=e^{-2x}(-2x)'=e^{-2x}\cdot(-2)=-2e^{-2x}.\ \bullet$$

Найдите производные следующих функций:

60. 1) $f(x)=\ln x\cdot e^x$; 2) $f(x)=x^2e^x$; 3) $f(x)=e^x-xe^x$; 4) $y=3^xe^x$; 5) $y=e^x/2^x$; 6) $f(x)=5\ln x+e^x$; вычислите $f'(1)$.

61. 1) $y=\dfrac{5-e^x}{e^x+2}$; 2) $y=\dfrac{1-e^x}{e^x}$.

62. 1) $y=5x^3$; 2) $y=2^{\sqrt{x}}$; 3) $y=3^{\ln x}$.

63. 1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=e^{\sqrt{x}}$; 3) $y=e^{\ln x}$.

64. 1) $y=3\left(e^{x/3}-e^{-x/3}\right)$; 2) $y=\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}$.

§ 8. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

Найдите производные следующих функций:

65. 1) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$; вычислите $f'(1)$; 3) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; 4) $f(u)=\dfrac{1}{u^2+3u+2}$; вычислите $f'(0)$.

66. 1) $s=\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}$; 2) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; вычислите $f'(4)$; 4) $f(x)=\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$; вычислите $f'(1)$.

67. 1) $f(t)=(t^m+t^n)^3$; вычислите $f'(1)$; 2) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$; 3) $y=\dfrac{3x^3}{(3x-1)^3}$; 4) $f(x)=(x^2-1)^2\sqrt{x^2+1}$; вычислите $f'(\sqrt{3})$.

68. 1) $f(u)=\sqrt{2+\sqrt{2u}}$; вычислите $f'(2)$; 2) $f(x)=\sqrt{5x^2+2x+1}$; вычислите $f'(-1)$; 3) $y=\sqrt{\dfrac{1+ax}{1-ax}}$; 4) $f(z)=\dfrac{\sqrt{4+z^2}}{z}$; вычислите $f'(\sqrt{5})$.

69. 1) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{8+x^3}}$; вычислите $f'(1)$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$; вычислите $f'(4)$; 3) $f(x)=\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$; вычислите $f'(\sqrt{3})$.

70. 1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-4x}{1+4x}}$; 2) $y=\ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$; 3) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$; 4) $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; 5) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+ax}{1-ax}}$; 6) $y=\ln\sqrt{x}\cdot\ln x^2$.

71. 1) $y=\sqrt{e^{3x}}$; 2) $y=xe^{2x}$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}+2x+6x^2\sqrt{x}$; найдите $f'(1)$.

2) $f(x)=(x^2-2)\sqrt{x^2+1}$; найдите $f'(\sqrt{3})$.

3) $f(z)=\dfrac{9z}{\sqrt{z^2+1}}$; найдите $f'(2\sqrt{2})$.

4) $f(x)=e^{2x}\cdot\ln x^2$; найдите $f'(1)$.

5) Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3-2t^2-4$ (s — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорение точки в конце 2-й секунды.

II вариант

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+3x-2x^2\sqrt{x}$; найдите $f'(1)$.

2) $f(u)=(u^2+3)\sqrt{u^2-1}$; найдите $f'(\sqrt{2})$.

3) $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$; найдите $f'(\sqrt{3})$.

4) $f(x)=\sqrt{e^x}\ln x^2$; найдите $f'(1)$.

5) Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3-3t^2+4$ (s — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорение точки в конце 3-й секунды.

Глава 8
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 1. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* в промежутке $a<x<b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* в промежутке $a<x<b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, — *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной: *если в некотором промежутке $f'(x)>0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x)<0$, то функция убывает в этом промежутке.*

Найти промежутки монотонности следующих функций:

1. 1) $f(x)=x^2-8x+12$; 2) $f(x)=x^3-6x^2+4$.

○ 1) Находим производную: $f'(x)=2x-8$; имеем $(2x-8=0)\Leftrightarrow(x=4)$. Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty<x<4$	4	$4<x<\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

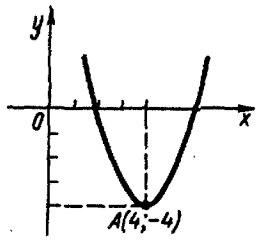


Рис. 23

Таким образом, данная функция в промежутке $-\infty<x<4$ убывает, а в промежутке $4<x<\infty$ возрастает (рис. 23).

2) Имеем $f'(x)=3x^2-12x, (3x^2-12x=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=4.\end{array}\right.$

Составим таблицу:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<4$	4	$4<x<\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Итак, в промежутках $-\infty<x<0$ и $4<x<\infty$ функция возрастает, а в промежутке $0<x<4$ — убывает (рис. 24). ●

2. 1) $y=\dfrac{1}{2x}$; 2) $y=\ln x$; 3) $y=\sqrt{x-x^2}$.

○ 1) Область определения данной функции — вся числовая прямая, кроме точки $x=0$. Находим $y'=-1/(2x^2)$. Очевидно, что $y'<0$ при всех x из области определения функции, т. е. функция $y=1/(2x)$ убывает в промежутках $-\infty<x<0$ и $0<x<\infty$ (рис. 25).

2) Область определения функции — промежуток $0<x<\infty$. Очевидно, что производная $y'=1/x$ в этом промежутке положительна. Следовательно, функция $y=\ln x$ в промежутке $0<x<\infty$ возрастает.

3) Для нахождения области определения функции решим неравенство $x-x^2\geqslant 0$, откуда получаем $0\leqslant x\leqslant 1$. Таким образом, данная функция определена в промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$.

Найдем производную $y'=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$. Так как знаменатель дроби положителен, то знак этой дроби совпадает со знаком ее числителя. Учитывая, что функция определена при $0\leqslant x\leqslant 1$, получаем: $y'>0$, при $1-2x>0$, т. е. при $0<x<1/2$; $y'<0$ при $1-2x<0$, т. е при $1/2<x<1$.

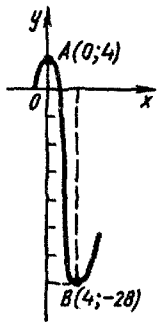


Рис. 24

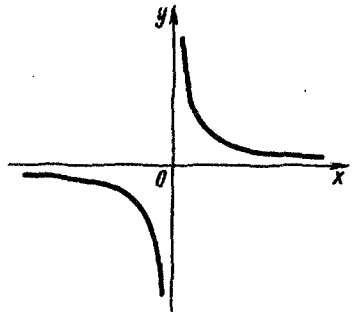


Рис. 25

Следовательно, в промежутке $0\leqslant x\leqslant 1/2$ функция возрастает, а в промежутке $1/2<x<1$ — убывает. ●

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

3. 1) $f(x)=x^2-6x+5$; 2) $f(x)=2x^2-4x+5$; 3) $f(x)=-x^2+4x+1$.

4. 1) $f(x)=x^3-3x^2+1$; 2) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2$.

5. 1) $f(x)=x^4-4x+3$; 2) $f(x)=x^4-32x+40$; 3) $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4-x+1$.

6. 1) $f(x)=2x^3-9x+12x-15$; 2) $f(x)=-2x^3+15x^2-36x+20$.

7. 1) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{3x-2}$.

8. 1) $y=\ln x^2$; 2) $y=\ln\dfrac{1}{x}$.

9. 1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$; 2) $y=\ln x-\dfrac{1}{3}x^3$.

10. 1) $y=e^{-x}$; 2) $y=e^{x^2}$; 3) $y=e^{1/x}$.

11. 1) $y=\sqrt{x-2x^2}$; 2) $y=\sqrt{x^2-3x}$.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если существует такая δ-окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)\geqslant f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если существует такая δ-окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)\leqslant f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называются *экстремальными точками* (или *точками экстремума*) данной функции, а значения функции в этих точках — *минимумом* и *максимумом* (или *экстремумами*) функции.

Точками экстремума могут служить только *критические точки*, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум — когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

Правило нахождения экстремумов функции $y=f(x)$ с помощью первой производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки функции $y=f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определеиия функции $f(x)$. При

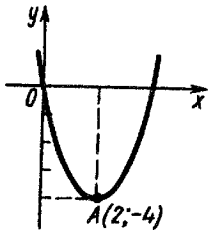
этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума — в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

IV. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Исследовать на экстремум следующие функции:

12. 1) $f(x)=x^2-4x$; 2) $f(x)=-x^2+5x+6$.

○ 1) Находим $f'(x)=2x-4$. Полагая $f'(x)=0$, получим единственную критическую точку $x=2$. Дальнейшие рассуждения представлены в таблице:

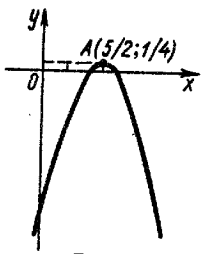


x	$-\infty<x<2$	2	$2<x<\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Минимум $f_{\min}=f(2)=-4$	↗

Рис. 26

График функции $f(x)=x^2-4x$ есть парабола, изображенная на рис. 26. Точка минимума $(2;-4)$ является вершиной параболы.

2) Находим $f'(x)=-2x+5$; $(-2x+5=0)\Leftrightarrow(x=5/2)$. Составим таблицу:



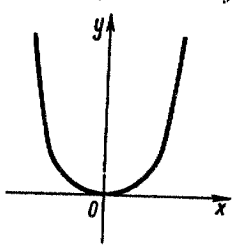
x	$-\infty<x<\frac{5}{2}$	$5/2$	$\frac{5}{2}<x<\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	Максимум $f_{\max}=f(5/2)=1/4$	↘

Рис. 27

Графиком функции $f(x)=-x^2+5x-6$ служит парабола, изображенная на рис. 27. ●

13. 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4$; 2) $f(x)=x^3-3x^2$.

○ 1) Находим $f'(x)=2x^3$; $(2x^3=0)\Leftrightarrow(x=0)$. Составим таблицу:

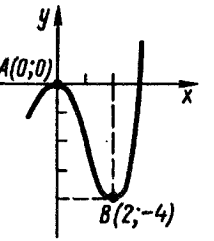


x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Минимум $f_{\min}=f(0)=0$	↗

Рис. 28

График функции $f(x)=\frac{1}{2}x^4$ изображен на рис. 28.

2) Имеем $f'(x)=3x^2-6x$; $(3x^2-6x=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=2.\end{array}\right.$ Составим таблицу:



x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Максимум $f_{\max}=f(0)=0$	↘	Минимум $f_{\min}=f(2)=-4$	↗

Рис. 29

График функции $f(x)=x^3-3x^2$ изображен на рис. 29. ●

14. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$.

○ Находим $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-5)+\sqrt[3]{x^2}=\frac{2(x-5)+3x}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$. В данном случае критическими являются точки $x=0$ (в ней производная терпит разрыв) и $x=2$ (в ней производная обращается в нуль). Составим таблицу:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<\infty$
$f'(x)$	$+$	Не сущ.	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Максимум $f_{\max}=f(0)=0$	↘	Минимум $f_{\min}=f(2)=-3\sqrt[3]{4}\approx-4{,}8$	↗

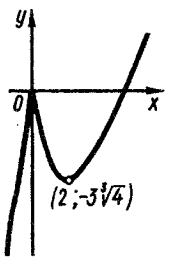


Рис. 30

График функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-5)$ изображен на рис. 30. ●

Исследуйте на экстремум следующие функции:

15. 1) $f(x)=x^2-x$; 2) $f(x)=x^2+3x$.

16. 1) $f(x)=-x^2+2x$; 2) $f(x)=-x^2-x$.

17. 1) $f(x)=x^2-8x+12$; 2) $f(x)=x^2-4x+3$; 3) $f(x)=x^2-10x+9$.

18. 1) $f(x)=-x^2+2x+3$; 2) $f(x)=-x^2-x+6$. 3) $f(x)=-2x^2+x+1$.

19. 1) $f(x)=2x^4-x$; 2) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+8x$.

20. 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$.

21. 1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$; 2) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$; 3) $f(x)=2x^3+9x^2+12x-2$.

22. 1) $f(x)=5-2\sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x$.

23. 1) $f(x)=6\sqrt[3]{x^2}\,(x+1)$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(10-x)$.

24. 1) $f(x)=e^x+e^{-x}$; 2) $f(x)=x^2e^{-x}$.

25. 1) $f(x)=x-2\ln x$; 2) $f(x)=x\ln x$.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Если y' есть производная от функции $y=f(x)$, то производная от y' по x (если она существует) называется *второй производной* (или *производной второго порядка*). Для второй производной употребляются следующие обозначения: y'', y''_x, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Правило нахождения экстремумов функции $y=f(x)$ с помощью второй производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x)=0$.

III. Найти вторую производную $f''(x)$.

IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

V. Вычислить значения функции в точках экстремума.

26. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функции:

$$1)\ f(x)=x^2-2x-3; \quad 2)\ f(x)=x^3-9x^2+24x-12.$$

○ 1) Находим производную: $f'(x)=2x-2$. Решая уравнение $f'(x)=0$, получим критическую точку $x=1$. Найдем теперь вторую производную: $f''(x)=2$. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при $x=1$ функция имеет минимум: $f_{\min}=f(1)=-4$.

2) Находим $f'(x)=3x^2-18x+24$; $(3x^2-18x+24=0)\Leftrightarrow(x^2-6x+8=0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=4.\end{array}\right.$ Найдем теперь $f''(x)=6x-18$. Определим знак второй производной в критических точках. Так как $f''(2)=6\cdot2-18<0$, то при $x=2$ функция имеет максимум; так как $f''(4)=6\cdot4-18>0$, то при $x=4$ функция имеет минимум. Вычислим значения функции в точках экстремума: $f_{\max}=f(2)=2^3-$ йй$-9\cdot2^2+24\cdot2-12=8$, $f_{\min}=f(4)=4^3-9\cdot4^2+24\cdot4-12=4$. ●

Исследуйте на экстремум с помощью второй производной следующие функции:

27. 1) $f(x)=2x^2-3$; 2) $f(x)=x^2-2x$; 3) $f(x)=2x^2-5x+2$; 4) $f(x)=-x^2+4x$; 5) $f(x)=-x^2+x+6$.

28. 1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$;

3) $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-2$; 4) $f(x)=x^4+3x^2-4$.

29. 1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

§ 4. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти значения функции на концах промежутка;

3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

30. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2-4x+3$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant3$.

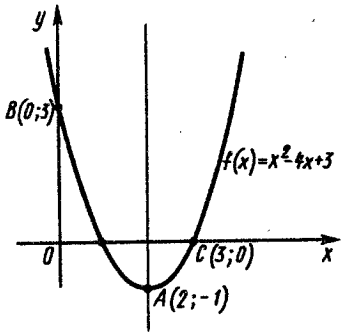


Рис. 31

○ Имеем $f'(x)=2x-4$; $2x-4=0$, т. е. $x=2$ — критическая точка. Находим $f(2)=-1$; далее, вычисляем значения функции на концах промежутка: $f(0)=3$, $f(3)=0$.

Итак, наименьшее значение функции равно -1 и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 3 и достигается на левом конце промежутка (рис. 31). ●

Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках.

31. 1) $f(x)=x^2-6x+13$, $0\leqslant x\leqslant6$; 2) $f(x)=8-0{,}5x^2$, $-2\leqslant x\leqslant2$.

32. 1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3$, $1\leqslant x\leqslant3$; 2) $f(x)=6x^2-x^3$, $-1\leqslant x\leqslant6$.

33. 1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+35$, $-4\leqslant x\leqslant4$; 2) $f(x)=-x^3+9x^2-$ $-24x+10$, $0\leqslant x\leqslant3$.

§ 5. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИМЕНЬШИХ И НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

34. Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, у которого площадь наибольшая.

○ Пусть периметр прямоугольника равен p. Обозначим длину одной из сторон прямоугольника через x, тогда длина другой стороны равна $\dfrac{p-2x}{2}=$ $=\dfrac{p}{2}-x$. Обозначив площадь прямоугольника через y, имеем

$$y=x\left(\frac{p}{2}-x\right)=\frac{p}{2}x-x^2\ \left(0<x<\frac{p}{2}\right).$$

Исследуем функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

$$y'=\frac{p}{2}-2x;\ \frac{p}{2}-2x=0;\ x=\frac{p}{4};\ y''=-2.$$

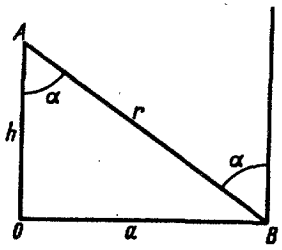


Рис. 32

Вторая производиая отрицательиа, следовательио, фуикция имеет максимум при $x=p/4$. Таким образом, из всех прямоугольииков даииого периметра иаибольшую площадь имеет квадрат. ●

35. На какой высоте h надо повесить фонарь над центром круговой площадки радиуса a, чтобы площадка была максимально освещена у ее границы?

○ Из курса физики известио, что освещеииость E обратно пропорциоиальиа квадрату расстояиия от источиика света и прямо пропорциоиальиа косинусу угла падеиия (угла, образоваиного иормалью к поверхиости с иаправлеиием светового потока), т. е.

$$E=k\cdot\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

где k зависит от силы источиика света, помещеиного в точке A (рис. 32). Из треугольника OAB имеем $\cos\alpha=h/r$ и $r=\sqrt{h^2+a^2}$. Приияв h за иезависимую переменную, получим

$$E=k\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}\,(h^2+a^2)}=k\cdot\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}\quad(h>0).$$

Исследуем фуикцию иа экстремум с помощью первой производиой:

$$E'=k\cdot\frac{(h^2+a^2)^{3/2}-\frac{3}{2}(h^2+a^2)^{1/2}\cdot 2h\cdot h}{(h^2+a^2)^3}=k\cdot\frac{(h^2+a^2)^{1/2}(h^2+a^2-3h^2)}{(h^2+a^2)^3}=$$

$$=k\cdot\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}=k\cdot\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-h\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+h\right)}{(h^2+a^2)^{5/2}};\quad E'=0\ \text{при}\ h=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Так как $E'>0$ в промежутке $0<h<a/\sqrt{2}$ и $E'<0$ в промежутке $a/\sqrt{2}<h<\infty$, то при $h=a/\sqrt{2}$ фуикция имеет максимум, т. е. при зиачении $h=a/\sqrt{2}\approx 0{,}7a$ освещеииость в точке B является иаибольшей. ●

36. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $s=-t^3+9t^2-24t-8$. Найти максимальную скорость движения тела (s — в метрах, t — в секундах).

○ Скорость движеиия тела есть первая производиая от пути по времени: $v=s''=-3t^2+18t-24$. Исследуем эту фуикцию иа максимум и мииимум с помощью второй производной:

$$v''=-6t+18;\quad -6t+18=0;\quad t=3;\quad v''=-6.$$

Вторая производная отрицательиа, следовательно, скорость является иаибольшей при $t=3$. Найдем зиачение скорости в момент $t=3$:

$$v(3)=-3\cdot 3^2+18\cdot 3-24=3\ (\text{м/с}).\ ●$$

37. Сумма двух положительных чисел равна a. Каковы эти числа, если сумма их кубов является наименьшей?

38. Произведение двух положительных чисел равно a. Чему равны эти числа, если их сумма является наименьшей?

39. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади, который можно согнуть из куска проволоки длиной 50 см?

40. Из всех прямоугольников данного периметра $2p$ найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

41. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса R, найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

42. В полукруг радиуса R впишите прямоугольник наибольшей площади.

43. В полукруг радиуса R впишите прямоугольник наибольшего периметра.

44. Из всех треугольников, у которых сумма основания и высоты равна a, найдите тот, у которого площадь наибольшая.

45. В круг радиуса a вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь?

46. В треугольник, основание которого a и высота h, вписан прямоугольник наибольшей площади (основание прямоугольника лежит на основании треугольника). Найдите длины сторон прямоугольника.

47. В прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Найдите длины сторон прямоугольника.

48. В равносторонний треугольник с периметром $3m$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите длины сторон прямоугольника.

49. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $s=-t^3+3t^2+9t+3$. Найдите максимальную скорость движения тела (s — в метрах, t — в секундах).

50. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $s=v_0t-0{,}5gt^2$. Найдите наибольшую высоту подъема тела.

51. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $s=19{,}6t-4{,}9t^2$. Найдите наибольшую высоту подъема тела (s — в метрах, t — в секундах).

§ 6. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Кривая $y=f(x)$ иазывается *выпуклой вниз* в промежутке $a<x<b$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка (рис. 33, *а*).

Кривая $y=f(x)$ иазывается *выпуклой вверх* в промежутке $a<x<b$, если оиа лежит иже касательиой в любой точке этого промежутка (рис. 33, *б*).

Промежутки, в которых график фуикции обращеи выпуклостью вверх или вииз, иазываются *промежутками выпуклости графика функции*.

Выпуклость вииз или вверх кривой, являющейся графиком фуикции $y=f(x)$, характеризуется знаком ее второй производиой: *если в некотором промежутке* $f''(x)>0$, *то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же* $f''(x)<0$, *то кривая выпукла вверх в этом промежутке.*

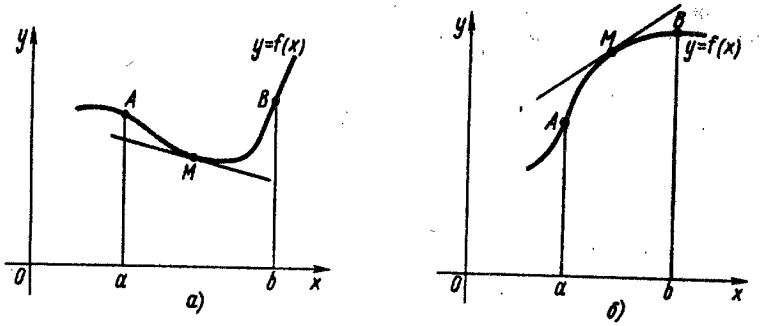


Рис. 33

52. Исследовать на направление выпуклости кривую $f(x)=1/x$ в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$.

○ Находим $f'(x)=-1/x^2$, $f''(x)=2/x^3$. Подставляя во вторую производную значения $x_1=-2$ и $x_2=1$, получим $f''(-2)=2/(-2)^3<0$, $f''(1)=2/1>0$. Таким образом, в точке $x=-2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x=1$ — выпукла вниз. ●

53. Найти промежутки выпуклости кривых:

$$1)\ f(x)=x^3; \quad 2)\ f(x)=x^4-2x^3+6x-4.$$

○ 1) Находим $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$. В промежутке $-\infty<x<0$ имеем $f''(x)<0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх; в промежутке $0<x<\infty$ имеем $f''(x)>0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вниз (рис. 34).

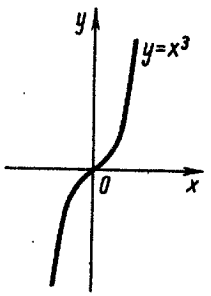


Рис. 34

2) Находим $f'(x)=4x^3-6x^2+6$, $f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$. Очевидно, что в промежутках $-\infty<x<0$ и $1<x<\infty$ выполняется неравенство $f''(x)>0$, т. е. в этих промежутках кривая выпукла вниз, а в промежутке $0<x<1$ имеет место неравенство $f''(x)<0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх. ●

54. Исследуйте на направление выпуклости кривые: 1) $y=-1/x$ в точках $x_1=-1$ и $x_2=1$; 2) $y=1/x^2$ в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$.

Найдите промежутки выпуклости кривых:

55. 1) $y=2x^3$; 2) $y=x^2$; 3) $y=-x^2-1$; 4) $y=x^2+3x-1$.

56. 1) $y=x^3-6x^2+2x-6$; 2) $y=x^4-2x^3-12x^2+24x+8$.

§ 7. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Точка графика функции $y=f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется *точкой перегиба*.

Точками перегиба могут служить только *критические точки*, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y=f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y=f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

57. Найти точки перегиба кривых:

$$1)\ f(x)=6x^2-x^3; \quad 2)\ f(x)=x+\sqrt[3]{x^5}-2.$$

○ 1) Находим $f'(x)=12x-3x^2$, $f''(x)=12-6x$. Полагая $f''(x)=0$, получим единственную критическую точку $x=2$. Так как в промежутке $-\infty<x<2$ имеем $f''(x)>0$, а в промежутке $2<x<\infty$ имеем $f''(x)<0$, то при $x=2$ кривая имеет точку перегиба. Найдем ординату этой точки: $f(2)=16$. Итак, $(2; 16)$ — точка перегиба.

2) Находим $f'(x)=1+\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Здесь критической является точка $x=0$, в которой вторая производная терпит разрыв. Очевидно, что $f''(x)<0$ в промежутке $-\infty<x<0$ и $f''(x)>0$ в промежутке $0<x<\infty$, т. е. кривая при $x=0$ имеет точку перегиба $(0; -2)$. ●

Найдите точки перегиба следующих кривых:

58. 1) $f(x)=x^3-x$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-4$.

59. 1) $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-100$;
2) $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-48x+31$;
3) $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-10$.

60. 1) $f(x)=xe^{-x}$; 2) $f(x)=e^{-x^2}$.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Общая схема построения графиков функций

I. Найти область определения функции.

II. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической*.

III. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).

IV. Найти асимптоты графика функции.

V. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.

VI. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

---

* См. § 4 и 6 гл. 9

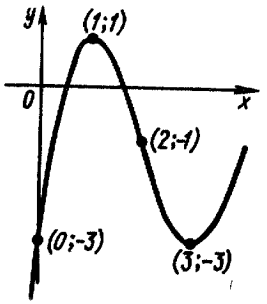


Рис. 35

VII. Построить график, используя полученные результаты исследования.

61. Построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$.

○ 1. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $D(y)=\mathbf{R}$.

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.

3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x=0$, получим $y=-3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.

4. Очевидно, что график функций не имеет асимптот.

5. Найдем производную: $y'=3x^2-12x+9$. Далее, имеем $(3x^2-12x+9=0)\Leftrightarrow(x^2-4x+3=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=3.\end{array}\right.$ Точки $x=1$ и $x=3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty<x<1$, $1<x<3$ и $3<x<\infty$. В промежутках $-\infty<x<1$ и $3<x<\infty$ $y'>0$, т. е. функция возрастает, а в промежутке $1<x<3$ $y'<0$, т. е. функция убывает. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=3$ — с минуса на плюс. Значит, $y_{\max}=y(1)=1$, $y_{\min}=y(3)=-3$.

6. Найдем вторую производную: $y''=6x-12$; $6x-12=0$, $x=2$. Точка $x=2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty<x<2$ и $2<x<\infty$. В первом из них $y''<0$, а во втором $y''>0$, т. е. в промежутке $-\infty<x<2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2<x<\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получаем точку перегиба $(2;-1)$.

7. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 35). ●

62. Построить график функции $y=\dfrac{x^2}{x-3}$.

○ 1. Находим область определения функции: $D(y)=\left[\begin{array}{l}-\infty<x<3\\3<x<\infty.\end{array}\right.$

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3. При $x=0$ получим $y=0$, т. е. график проходит через начало координат.

4. Так как $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=3$ служит вертикальной асимптотой графика.

Далее находим:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-3)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-3}=3.$$

Следовательно, прямая $y=x+3$ является наклонной асимптотой графика.

5. Находим

$$y'=\frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}=\frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Производная y' обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=6$ и терпит разрыв при $x=3$. Этими точками числовая прямая делится на четыре промежутка: $-\infty<x<0$, $0<x<3$, $3<x<6$ и $6<x<\infty$. Исследуем знак y' в каждом из них; очевидно, что $y'>0$ в промежутках $-\infty<x<0$ и $6<x<\infty$ (в этих промежутках функция возрастает) и $y'<0$ в промежутках $0<x<3$ и $3<x<6$ (в этих промежутках функция убывает). При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус, т. е. это точка максимума, а при переходе через $x=6$ — с минуса на плюс, т. е. это точка минимума. Находим $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(6)=12$.

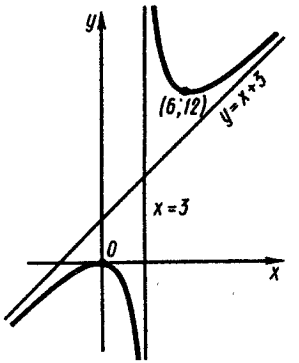


Рис. 36

6. Находим

$$y''=\frac{(2x-6)(x-3)^2-2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4}=\frac{18}{(x-3)^3}.$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается и терпит разрыв при $x=3$. В промежутке $-\infty<x<3$ имеем $y''<0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх; в промежутке $3<x<\infty$ имеем $y''>0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вниз. Точек перегиба нет.

7. На основании полученных данных строим график функции (рис. 36). ●

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

63. 1) $y=2x^2-8x$; 2) $y=-3x^2+12x$; 3) $y=x^2+5x+4$; 4) $y=-x^2+2x+15$.

64. 1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-9$; 2) $y=x^3-3x$; 3) $y=3x^3-x$; 4) $y=-x^3+x$.

65. 1) $y=\dfrac{1}{4}x^4$; 2) $y=\dfrac{1}{5}x^5$.

66. 1) $y=x^3+6x^2+9x+8$; 2) $y=2x^3-3x^2-12x-1$; 3) $y=x^3-6x^2+16$; 4) $y=2x^3+3x^2-12x-10$.

67. 1) $y=x^4-5x^2+4$; 2) $y=-x^4+8x^2+9$.

68. 1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; 2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

69. 1) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; 2) $y=\dfrac{x^2-4}{x}$.

70. 1) $y=\dfrac{1}{x^2-7x+12}$; 2) $y=\dfrac{(x+1)(x+8)}{x}$.

71. 1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; 2) $y=\dfrac{6-x^3}{x^2}$.

72. 1) $y=x-\sqrt{x}$; 2) $y=x^2\sqrt{x-3}$.

73. 1) $y=\ln(x^2+1)$; 2) $y=x\ln x$.

74. 1) $y=3^{1/x}$; 2) $y=e^{-x^2}$.

75. 1) $y=(x-1)e^x$; 2) $y=x^2e^{-x}$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Найдите промежутки монотонности функции $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+1$.

2) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{3}$ на отрезке $-2\leqslant x\leqslant 2$.

3) Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

а) $y=x^3+3x^2$; б) $y=\frac{1}{3}x^3-4x$.

4) Дан закон прямолинейного движения точки $s=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1$ (t — в секундах, s — в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.

II вариант

1) Найдите промежутки монотонности функции $y=x^4-4x+4$.

2) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$ на отрезке $-4\leqslant x\leqslant 2$.

3) Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

а) $y=x^3-12x^2+145$; б) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}$.

4) Дан закон прямолинейного движения точки $s=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+5t+3$ (t — в секундах, s — в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.

Глава 9
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ДУГ И УГЛОВ

1. Основные формулы, связанные с радианным измерением дуг. При радианном измерении дуг (и соответствующих им центральных углов) за единицу измерения принимается *радиан* — дуга, длина которой равна радиусу этой дуги.

Радианная мера дуги вычисляется по формуле

$$a=l/R, \tag{9.1}$$

где a — радианная мера дуги; l — длина дуги окружности; R — радиус этой дуги.

Формула перехода от градусного измерения к радианному имеет вид

$$a=(\pi/180^\circ)\cdot\alpha, \tag{9.2}$$

где α — градусная мера дуги (угла).

Радианная мера 1° равна 0,0175 рад.

Формула перехода от радианного измерения к градусному имеет вид

$$\alpha^\circ=(180^\circ/\pi)\cdot a. \tag{9.3}$$

Градусная мера 1 рад равна $57^\circ17'44'',8\approx 57^\circ,3$.

Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги:

$$l=aR. \tag{9.4}$$

Площадь кругового сектора равна половине радианной меры дуги сектора, умноженной на квадрат радиуса круга:

$$S_{\text{сект}}=aR^2/2. \tag{9.5}$$

2. Основные понятия, связанные с вращательным движением точки. При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси различают две скорости: линейную и угловую.

Скорость любой точки твердого тела во вращательном движении называется *линейной скоростью.*

Линейная скорость v точки при равномерном движении по окружности радиуса R вычисляется по формуле

$$v=2\pi R/T, \tag{9.6}$$

где T — период вращения, т. е. время (в секундах), за которое совершается один полный оборот точки.

Угол, на который поворачивается радиус любой точки равномерно вращающегося твердого тела за одну секунду, называется *угловой скоростью.* Угловая скорость выражается в радианах в секунду (рад/с).

Зависимость между угловой скоростью ω и периодом вращения T выражается формулой

$$\omega=2\pi/T. \tag{9.7}$$

Линейная скорость v точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения, и ее угловая скорость связаны соотношением

$$v=\omega R. \tag{9.8}$$

При неравномерном вращении твердого тела его угловой скоростью ω называется скорость изменения угла φ за время t. Угловая скорость (рад/с) в этом случае есть производная угла поворота φ по времени t:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}. \tag{9.9}$$

Угловое ускорение ε (рад/с^2) есть производная от угловой скорости ω по времени t:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}. \tag{9.10}$$

1. Чему равна точная радианная мера дуг: 1) 240°; 2) 300°?

○ По формуле (9.2) получим:

1) $a=(\pi/180^\circ)\cdot 240^\circ=4\pi/3$; 2) $a=(\pi/180^\circ)\cdot 300^\circ=5\pi/3$. ●

2. Чему равна точная градусная мера дуг: 1) $7\pi/6$; 2) $5\pi/4$?

○ По формуле (9.3) получим:

1) $\alpha=(180^\circ/\pi)\cdot(7\pi/6)=210^\circ$; 2) $\alpha=(180^\circ/\pi)\cdot(5\pi/4)=225^\circ$. ●

3. Колесо, радиус которого равен 0,65 м, повернулось на угол 1,4 рад. Найти длину пути, пройденного точкой обода колеса.

○ По формуле (9.4) находим $l=1,4\cdot 0,65=0,91$ (м). ●

4. Дуга кругового сектора составляет 0,94 рад. Вычислить площадь сектора, если радиус круга равен 0,65 м.

○ По формуле (9.5) находим $S_{сект}=0{,}5\cdot 0{,}94\cdot 0{,}65^2\approx 0{,}20$ (м^2). ●

5. Точка колеса, находящаяся от его центра на расстоянии 0,56 м, равномерно вращается с линейной скоростью 4,6 м/с. Найти период вращения колеса.

○ Из формулы (9.6) находим T и подставляем в найденное для T выражение числовые значения R и v:

$$T=2\pi R/v=2\pi\cdot 0{,}56/4{,}6\approx 0{,}76 \text{ (с)}.$$ ●

6. Линейная скорость на ободе равномерно вращающегося маховика, радиус которого 0,64 м, равна 256 м/с. Найти угловую скорость маховика.

○ Из формулы (9.8) находим угловую скорость ω и подставляем в полученное выражение числовые значения v и R:

$$\omega=v/R=256/0{,}64=400 \text{ (рад/с)}.$$ ●

7. При торможении маховик за t с поворачивается на угол $\varphi=3+8t-t^2$. Найти: 1) угловую скорость вращения маховика при $t=3$ с; 2) угловое ускорение в момент t; 3) момент, когда вращение прекратится.

○ 1) Угловая скорость есть производная угла поворота φ по времени t, т. е. $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}=8-2t$. Найдем угловую скорость в момент $t=3$ с: $\omega(3)=8-2\cdot 3=2$ (рад/с).

2) Угловое ускорение ε есть производная от угловой скорости ω по времени t, т. е. $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}=-2$ (рад/с^2).

3) Полагая $\omega=0$, найдем t: $8-2t=0$, $t=4$ с. ●

8. Чему равна точная радианная мера дуг (устно): 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 120°; 6) 135°; 7) 150°; 8) 180°; 9) 210°; 10) 225°; 11) 270°; 12) 330°?

9. На микрокалькуляторе с помощью алгоритма [A°] [F] [Г→Р] переведите градусы в радианы: 1) 15°,3; 2) 71°17; 3) 15°28; 4) 115°,73; 5) 215°,2; 6) 312°,32; 7) 57°42; 8) 87°,5; 9) 1°; 10) 0°,1.

10. Найдите радианную меру дуг: 1) 14°5; 2) 27°,3; 3) 75°; 4) 130°; 5) 38°,7; 6) 86°.

11. Найдите градусную меру дуг: 1) $5\pi/36$; 2) $7\pi/12$; 3) $11\pi/18$; 4) $5\pi/9$; 5) $11\pi/20$; 6) $13\pi/30$; 7) $11\pi/6$; 8) $4\pi/3$.

12. На микрокалькуляторе с помощью алгоритма [A°] [F] [Р→Г] переведите радианы в градусы: 1) 0,3008; 2) 0,5728; 3) 1,0472; 4) 1,3454; 5) 1,4850; 6) 1,7453.

13. Вычислите радиус окружности, если ее дуга длиной 0,84 м содержит 1,5 рад.

14. Вычислите периметр сектора, дуга которого содержит 0,85 рад, а радиус окружности равен 0,38 м.

15. Радиус круга равен 0,56 м, а площадь кругового сектора составляет 0,72 м^2. Найдите дугу сектора в радианах.

16. Круговой сектор, имеющий площадь 0,39 м^2, стягивается дугой в 1,4 рад. Найдите радиус круга.

17. Точка на ободе равномерно вращающегося маховика имеет линейную скорость 1,6 м/с. Период вращения маховика равен $\pi/4$ с. Найдите радиус маховика.

18. Точка, находящаяся на расстоянии 0,12 м от оси вращения равномерно вращающейся шестеренки, имеет линейную скорость 0,48 м/с. Найдите период вращения шестеренки.

19. Колесо, радиус которого 0,125 м, равномерно вращается с угловой скоростью 24 рад/с. Вычислите линейную скорость в точке, лежащей на ободе колеса.

20. Тело вращается вокруг оси по закону $\varphi=10t-t^2$. Найдите: 1) угловую скорость вращения в момент $t=2$ с; 2) угловое ускорение в момент t; 3) момент, когда вращение прекратится.

21. Углы треугольника относятся, как 1:3:5. Вычислите их величины в радианной мере.

22. Четыре точки делят окружность в отношении 3:4:5:6. Вычислите в радианной мере величины соответствующих дуг.

23. Радиусом $R=0{,}12$ м описана дуга, радианная мера которой равна 2,5. Найдите длину этой дуги.

24. Вычислите в радианной мере величину вписанного угла, опирающегося на дугу, радианная мера которой равна $4\pi/15$.

25. Величина дуги в радианной мере равна $5\pi/9$. Под каким углом из точек этой дуги видна стягивающая ее хорда?

26. Вычислите (рад/с) угловую скорость часовой, минутной и секундной стрелок.

§ 2. ЕДИНИЧНАЯ ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1, называется *единичной окружностью*. Уравнение единичной окружности имеет вид $x^2+y^2=1$ (рис. 37).

Точку $A(1;0)$ единичной окружности примем за начало отсчета дуг, а положительную полуось OX—за начальную сторону центрального угла, образуемого радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью OX (точка M лежит на единичной окружности).

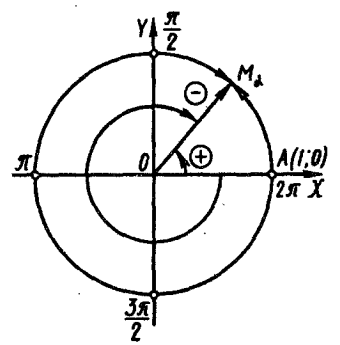


Рис. 37

Вращение радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ от положительной полуоси OX против движения часовой стрелки назовем положительным, а дугу $\overset{\smile}{AM}$ и центральный угол $\angle AOM$—положительными; при противоположном вращении (по часовой стрелке)—отрицательными.

Дуги I четверти заключены в промежутке $0<\alpha<\pi/2$, II четверти—в промежутке $\pi/2<\alpha<\pi$, III четверти—в промежутке $\pi<\alpha<3\pi/2$ и IV четверти—в промежутке $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

Существует бесконечное множество дуг, имеющих данное начало A и данный конец M (данные начальную и конечную стороны угла). Множество этих дуг (углов), как положительных, так и отрицательных, выражается формулой

$$\alpha=2\pi k+\alpha_1, \text{ или } \alpha=360^\circ k+\alpha_1, \qquad (9.11)$$

где $0\leqslant\alpha_1<2\pi$ $(0\leqslant\alpha<360^\circ)$ и $k\in\mathbf{Z}$.

Если каждому действительному числу α на единичной окружности соответствует точка M_α — конец дуги AM, для которой дуга AM имеет величину α, то такая единичная окружность называется *числовой единичной окружностью*.

Длина всей числовой единичной окружности равна 2π. Если два числа отличаются друг от друга на целое кратное 2π, то на числовой единичной окружности им соответствует одна и та же точка. Если два числа соответствуют одной и той же точке числовой единичной окружности, то их разность кратна 2π.

27. Указать на единичной окружности: 1) точку M дуги $\overset{\smile}{AM}=17\pi$; 2) точку M дуги $\overset{\smile}{AM}=1950^\circ$; 3) точку M дуги $\overset{\smile}{AM}=-1380^\circ$.

○ 1) По формуле (9.11) получим $17\pi=16\pi+\pi=2\pi\cdot 8+\pi$, $k=8$. Конец дуги $\overset{\smile}{AM}$ оканчивается в точке M $(-1; 0)$.

2) Находим $\overset{\smile}{AM}=1950^\circ=360^\circ\cdot 5+150^\circ$, $k=5$. Конец дуги $\overset{\smile}{AM}$ оканчивается во II четверти.

3) Имеем $\overset{\smile}{AM}=-1380^\circ=360^\circ\cdot(-4)+60^\circ$, $k=-4$. Конец дуги $\overset{\smile}{AM}$ оканчивается в I четверти. Здесь дуга α_1 представлена наименьшим по абсолютной величине числом $(\alpha_1=60^\circ)$. Чтобы α_1 было наименьшим по абсолютной величине числом, его надо брать в промежутке $0\leqslant\alpha_1<180^\circ$ или $-180^\circ<\alpha_1\leqslant 0$. ●

28. Записать в общем виде концы дуг единичной окружности: 1) абсциссы которых равны нулю; 2) ординаты которых равны нулю.

○ 1) Концы дуг $\pi/2$ и $3\pi/2$ $(-\pi/2)$ имеют абсциссы, равные нулю; следовательно, множество концов дуг с абсциссой, равной нулю, записывается в виде $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Концы дуг 0 (2π) и π имеют ординаты, равные нулю; следовательно, множество концов дуг с ординатой, равной нулю, записывается в виде πk, $k\in\mathbf{Z}$. ●

29. Укажите, в какой четверти единичной окружности оканчиваются дуги: 1) 120°; 2) 315°; 3) −220°; 4) 850°; 5) 500°; 6) −120°; 7) $\pi/4$; 8) $7\pi/6$; 9) $-5\pi/3$; 10) $4\pi/15$; 11) $8\pi/3$; 12) $-5\pi/4$; 13) 0,76; 14) 5,8; 15) −7,2; 16) −3,7; 17) 15; 18) 3,3.

30. Представьте угол α по формуле (9.11), взяв наименьший по абсолютной величине угол α_1, если: 1) $\alpha=2200^\circ$; 2) $\alpha=-550^\circ$; 3) $\alpha=-740^\circ$; 4) $\alpha=1170^\circ$; 5) $\alpha=-1450^\circ$; 6) $\alpha=520^\circ$.

31. Запишите в общем виде дуги, оканчивающиеся в точках: 1) A (1; 0); 2) B (0; 1); 3) C (−1; 0); 4) D (0; −1).

32. Единичная окружность разделена на 12 равных частей, начиная от точки A (1; 0). Запишите множества концов дуг, оканчивающихся в точках деления.

33. Найдите значения дуг: 1) πk; 2) $\pi/4+2\pi k$; 3) $\pi/3+2\pi k$; 4) $(-1)^k\pi/6+\pi k$ при $k=-2; -1; 0; 1; 2$.

34. На единичной окружности отметьте дуги α, удовлетворяющие условиям: 1) $0<\alpha<\pi/4$; 2) $\pi/4<\alpha<\pi/3$; 3) $-\pi/6<\alpha<\pi/6$; 4) $-2\pi/3<\alpha<0$; 5) $|\alpha|\leqslant\pi/3$; 6) $|\alpha|\leqslant\pi/2$.

35. На единичной окружности: 1) постройте точки, соответствующие числам $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $2\pi/3$; $-2\pi/3$; $-3\pi/4$;

2) постройте приближенно точки, соответствующие числам 1,5; 3,5; 5; 6; −2; −4.

36. Точка единичной окружности, лежащая в конце дуги $\pi/6$, начала равномерное движение по окружности в положительном направлении со скоростью $\omega=4\pi/3$ рад/с. В какой четверти окажется точка через: 1) 2 с; 2) 3 с; 3) 4 с; 4) 10 с?

37. Напишите общий вид дуг α, если: 1) $2\alpha=\pi/4+2\pi k$; 2) $3\alpha-\pi/6=5\pi/6+2\pi k$; 3) $4\alpha+\pi/3=2\pi/3+\pi k$; 4) $10^\circ+\alpha=50^\circ+180^\circ k$.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Абсцисса X точки M_α числовой единичной окружности (рис. 38) называется *косинусом* числа α:

$$X=\cos\alpha. \qquad (9.12)$$

Ордината Y точки M_α числовой единичной окружности называется *синусом* числа α:

$$Y=\sin\alpha. \qquad (9.13)$$

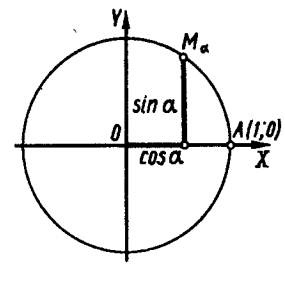


Рис. 38

Областью определения косинуса и синуса служит множество всех действительных чисел, т. е. $D(\cos\alpha)=\mathbf{R}$, $D(\sin\alpha)=\mathbf{R}$.

Отношение синуса числа α к его косинусу называется *тангенсом* числа α:

$$\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha. \qquad (9.14)$$

Область определения тангенса — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Отношение косинуса числа α к его синусу называется *котангенсом* числа α:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha. \qquad (9.15)$$

Область определения котангенса — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида πk, $k\in\mathbf{Z}$.

Величина, обратная косинусу числа α, называется *секансом* числа α:

$$\sec\alpha=1/\cos\alpha. \qquad (9.16)$$

Область определения секанса — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Величина, обратная синусу числа α, называется *косекансом* числа α:

$$\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha. \qquad (9.17)$$

Область определения косеканса — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида πk, $k \in \mathbf{Z}$.

При решении задач тригонометрические функции рассматриваются или как функции числа, или как функции дуги (угла), заданные на множестве всех действительных чисел или на множестве всех дуг (углов). При этом каждому действительному числу или каждой дуге (углу) соответствует единственное значение тригонометрической функции.

Функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ ограничены, так как $-1 \leqslant E(\cos\alpha) \leqslant 1$ и $-1 \leqslant E(\sin\alpha) \leqslant 1$.

Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не ограничены, так как каждая из них может принимать любое действительное значение, т. е. $E(\operatorname{tg}\alpha) = \mathbf{R}$ и $E(\operatorname{ctg}\alpha) = \mathbf{R}$.

38. Могут ли синус и косинус быть равными: 1) 0,85; 2) 7/6; 3) $-\sqrt[3]{3}/\sqrt{3}$; 4) $-1{,}01$; 5) $3/\sqrt{10}$; 6) $\sqrt{10}/\pi$; 7) $a/\sqrt{a^2+b^2}$, $a>0$, $b>0$; 8) $a/\sqrt{a^2-b^2}$, $a>0$, $|b|<a$?

39. Могут ли синус, косинус, тангенс и котангенс принимать значение, равное: 1) 1/2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $-5{,}1$; 4) $\sqrt{0{,}5}$; 5) 2,2; 6) $\sqrt{3}/2$?

40. Могут ли функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ принимать отрицательные значения, если α выражает величину угла треугольника?

41. Чем отличаются друг от друга области определения $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$?

42. Сравните абсолютную величину тангенса любого числа с абсолютной величиной синуса этого числа.

43. Какие множества значений имеют функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$?

44. Найдите значения α в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, для которых выполняется равенство: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\sin\alpha = 1$; 3) $\sin\alpha = -1$; 4) $\cos\alpha = 0$; 5) $\cos\alpha = 1$; 6) $\cos\alpha = -1$.

45. Найдите значения α в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, для которых выполняется равенство: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; 5) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$.

§ 4. ЗНАКИ, ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СВОЙСТВА ЧЕТНОСТИ И НЕЧЕТНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при всех значениях x и области определения этой функции $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если при всех значениях x из области определения этой функции $f(-x)=-f(x)$.

Свойства четности и нечетности тригонометрических функций выражаются следующими формулами:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad (9.18)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \qquad (9.19)$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \qquad (9.20)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (9.21)$$

Таблица III

Функция \ Четверть	I $0<\alpha<\pi/2$	II $\pi/2<\alpha<\pi$	III $\pi<\alpha<3\pi/2$	IV $3\pi/2<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

Знаки тригонометрических функций по четвертям приведены в табл. III.

Значения тригонометрических функций некоторых дуг (углов) приведены в табл. IV.

46. Какие знаки имеют: 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 320°$; 3) $\operatorname{tg} 220°$; 4) $\operatorname{ctg} 400°$?

○ 1) $90° < 150° < 180°$ (II четверть); $\cos 150° < 0$;
2) $270° < 320° < 360°$ (IV четверть); $\sin 320° < 0$;
3) $180° < 220° < 270°$ (III четверть); $\operatorname{tg} 220° > 0$;
4) $360° < 400° < 360° + 90°$ (I четверть); $\operatorname{ctg} 400° > 0$. ●

47. Используя единичную окружность, определить знаки разностей: 1) $\sin(2\pi/3) - \sin(3\pi/4)$; 2) $\cos(2\pi/3) - \cos(3\pi/4)$; 3) $\operatorname{tg}(2\pi/3) - \operatorname{tg}(3\pi/4)$; 4) $\operatorname{ctg}(2\pi/3) - \operatorname{ctg}(3\pi/4)$.

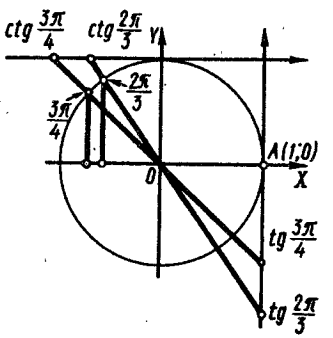


Рис. 39

○ 1) Сравнивая ординаты концов дуг $2\pi/3$ и $3\pi/4$, находим $\sin(2\pi/3) - \sin(3\pi/4) > 0$ (рис. 39).

2) Сравнивая абсциссы концов дуг $2\pi/3$ и $3\pi/4$, получим $\cos(2\pi/3) - \cos(3\pi/4) > 0$.

3) Сравнивая ординаты точек на оси тангенсов, имеем $\operatorname{tg}(2\pi/3) - \operatorname{tg}(3\pi/4) < 0$.

4) Сравнивая абсциссы точек на оси котангенсов, получим $\operatorname{ctg}(2\pi/3) - \operatorname{ctg}(3\pi/4) > 0$. ●

48. Упростить:
1) $\sin^2(-\alpha) - \cos(-\alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha)$;
2) $\sin(-3\pi/2) + \cos(-\pi) + \operatorname{tg}(-2\pi)$.

○ Используя формулы (9.18), (9.19) и (9.20), получим:
1) $\sin^2(-\alpha) - \cos(-\alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha) = (-\sin\alpha)^2 - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \sin^2\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;
2) $\sin(-3\pi/2) + \cos(-\pi) + \operatorname{tg}(-2\pi) = -\sin(3\pi/2) + \cos\pi - \operatorname{tg} 2\pi = 1 + (-1) - 0 = 0$. ●

49. В какой четверти может оканчиваться дуга α, если: 1) $|\operatorname{tg}(-\alpha)| = -\operatorname{tg}\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| = -\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\sin(-\alpha) > 0$?

○ 1) $|\operatorname{tg}(-\alpha)| = -\operatorname{tg}\alpha$; $-\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$; α — дуга II или IV четверти;
2) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| = -\operatorname{ctg}\alpha$; $-\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$; α — дуга II или IV четверти;
3) $\sin(-\alpha) > 0$; $-\sin\alpha > 0$; $\sin\alpha < 0$; α — дуга III или IV четверти. ●

Таблица IV

	I четверть				II четверть					III четверть					IV четверть				
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не сущ.

50. Вычислить

$$\operatorname{tg}^2(\pi/3)+\operatorname{ctg}(\pi/6)-2\sin(\pi/3)+\sin\pi+4\cos(3\pi/2)-2\cos(\pi/3).$$

○ $\operatorname{tg}^2(\pi/3)+\operatorname{ctg}(\pi/6)-2\sin(\pi/3)+\sin\pi+4\cos(3\pi/2)-2\cos(\pi/3)=(\sqrt{3})^2+$
$+\sqrt{3}-2\cdot(\sqrt{3}/2)+0+4\cdot 0-2\cdot(1/2)=2.$ ●

51. Какие знаки имеют: 1) $\sin 170°$; 2) $\cos 300°$; 3) $\operatorname{tg}160°$; 4) $\operatorname{ctg}315°$; 5) $\operatorname{tg}450°$; 6) $\sin 400°$; 7) $\sin(7\pi/3)$; 8) $\cos(4\pi/3)$; 9) $\sin(5\pi/4)$; 10) $\cos(7\pi/5)$; 11) $\operatorname{tg}(8\pi/3)$; 12) $\operatorname{ctg}(9\pi/4)$?

52. Используя единичную окружность, определите знаки разностей: 1) $\sin 130°-\sin 140°$; 2) $\cos 50°-\cos 70°$; 3) $\operatorname{tg}220°-\operatorname{tg}210°$; 4) $\operatorname{ctg}220°-\operatorname{ctg}210°$; 5) $\sin 50°-\operatorname{tg}50°$; 6) $\cos 50°-\operatorname{ctg}50°$; 7) $\operatorname{ctg}300°-$ $-\operatorname{ctg}315°$; 8) $\sin 70°-\cos 70°$.

53. Используя единичную окружность, определите знаки произведений: 1) $\sin 100°\cdot\sin 120°$; 2) $\cos 210°\cdot\sin 210°$; 3) $\cos 200°\cdot\sin 110°$; 4) $\operatorname{tg}140°\cdot\operatorname{tg}220°$; 5) $\cos 315°\cdot\operatorname{tg}215°$; 6) $\sin 150°\cdot\cos 150°\cdot\operatorname{tg}150°$; 7) $\sin 320°\cdot\cos 125°\cdot\operatorname{tg}250°$; 8) $\sin 230°\cdot\operatorname{tg}160°\cdot\operatorname{ctg}340°$.

54. Вычислите: 1) $\cos(-\pi)\cdot\sin(-\pi/2)\cdot\sin(-3\pi/2)$; 2) $2\cos(-\pi)\times$ $\times\cos(-2\pi)\cdot\sin(-3\pi/2)$; 3) $\sin(-\pi)+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}(-\pi)$.

55. В какой четверти может оканчиваться дуга α, если: 1) $\operatorname{tg}(-\alpha)>0$; 2) $|\sin(-\alpha)|=-\sin\alpha$; 3) $|\cos(-\alpha)|=\cos\alpha$; 4) $\sin(-\alpha)<0$?

56. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg}(\pi/2)+\operatorname{tg}\pi-\sin(3\pi/2)-\cos(-\pi/2)+\sin\pi$;
2) $\sin(\pi/2)-\cos(3\pi/2)+\cos\pi-\operatorname{tg}0+\operatorname{ctg}(3\pi/2)$;
3) $2\sin(\pi/3)+2\cos(\pi/4)-3\operatorname{tg}(\pi/3)+\operatorname{ctg}(\pi/2)$;
4) $\sin^2(\pi/4)-2\cos^2(\pi/3)-5\operatorname{tg}^2(\pi/4)$;
5) $\dfrac{5+\operatorname{ctg}^4(\pi/6)-\operatorname{tg}^2(\pi/4)}{\operatorname{ctg}(\pi/4)-4\cos^2(\pi/3)-8\sin^3(\pi/6)}$;
6) $\dfrac{(2a\sin(\pi/6))^3-(b\operatorname{tg}(\pi/4))^3-(2ab\cos(\pi/2))^2}{(a\cos 0)^2+2ab\cos(\pi/3)+2b^2\cos^2(\pi/4)}$;
7) $\sin(-\pi/6)-2\operatorname{tg}(-\pi/4)+\cos(-\pi/3)-\operatorname{ctg}(-\pi/2)$;
8) $\cos^3(-\pi/3)-\operatorname{ctg}^3(-\pi/6)+\sin^3(-\pi/6)$.

57. 1) $f(x)=4\sin 3x+5\cos 3x-2\sin x$; вычислите $f(0)$; $f(\pi/6)$; $f(\pi/3)$; $f(\pi)$;

2) $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$; вычислите $f(\pi/6)$;

3) $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$; вычислите при $\alpha=\pi/3$ и $\beta=\pi/6$.

58. Определите знаки следующих выражений, если $0<\alpha<\pi/2$: 1) $\sin(\pi/2+\alpha)$; 2) $\cos(3\pi/2+\alpha)$; 3) $\sin(\pi+\alpha)$; 4) $\cos(3\pi/2-\alpha)$; 5) $\sin(3\pi/2+\alpha)$; 6) $\sin(3\pi+\alpha)$; 7) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$; 9) $\sin(2\pi-\alpha)$; 10) $\cos(2\pi+\alpha)$; 11) $\operatorname{tg}(3\pi/2+\alpha)$; 12) $\operatorname{tg}(1{,}57-\alpha)$.

59. Определите знаки выражений:

1) $\sin(7\pi/6)\cdot\cos(3\pi/5)$; 2) $\sin^2(4\pi/3)\cdot\sin(5\pi/4)$; 3) $\sin(2\pi/3)\times$ $\times\cos(2\pi/3)\cdot\cos(\pi/4)$; 4) $\sin 2{,}3\cdot\cos(-1{,}7)\cdot\sin(-1{,}5)$.

60. Какой четверти принадлежит дуга α, если: 1) $\sin\alpha=\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha=\cos^2\alpha$; 3) $\sin\alpha=\cos^3\alpha$; 4) $\sin\alpha=\cos^4\alpha$; 5) $\cos\alpha=\sin^2\alpha$; 6) $\cos\alpha=\sin^3\alpha$; 7) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$; 8) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha$?

61. Определите знаки выражений, если $0<\alpha<\pi/2$:

1) $\cos(\pi/2-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\pi/2+\alpha)$;

2) $\sin(3\pi/2+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;

3) $\cos^2(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2(\pi/2+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}^3(\pi-\alpha)$.

62. Вычислите:

1) $\sin\pi+\operatorname{ctg}(-\pi/2)+\cos(-3\pi/2)+\operatorname{tg}\pi$;

2) $\cos(-\pi)+\sin(-\pi)+\operatorname{tg}(-\pi/4)+\operatorname{ctg}(-\pi/4)$;

3) $a^2\cos 0+2ab\cos\pi+b^2\sin(\pi/2)$;

4) $\sin(\pi/6)\cdot\cos(\pi/3)\cdot\operatorname{tg}(\pi/4)\cdot\operatorname{ctg}(\pi/6)$;

5) $5\operatorname{tg}^2(\pi/4)-8\sin^2(\pi/6)+4\cos^2(\pi/3)$.

63. Упростите:

1) $\dfrac{(a\cos 0)^2-(b\operatorname{ctg}(\pi/4))^2}{2a^2\cos(\pi/3)+2ab\cos\pi+b^2\operatorname{tg}(\pi/4)}$;

2) $\dfrac{(a\sin(\pi/2))^4-(b\operatorname{tg}(\pi/4))^4}{(a\cos 2\pi)^2-(b\sin(-\pi/2))^2}$;

3) $(-a\sin(-3\pi/2))^3+(ab\operatorname{tg}2\pi)^3+(b\cos 0)^3$;

4) $\dfrac{a\cos 0-ab\sin 0+b\operatorname{tg}(\pi/4)}{a\cos 2\pi-b\sin 2\pi}$.

64. Проверьте равенства:

1) $\sin\pi+3\cos(3\pi/2)-\operatorname{tg}^2(\pi/3)+\operatorname{ctg}^2(\pi/6)=0$;

2) $2\sin^2(\pi/4)+4\sin^2(\pi/3)+\cos^2(\pi/4)-\sin(\pi/6)=4$;

3) $\sin^3(\pi/4)+\cos^3(\pi/4)-\sin(\pi/4)=0$;

4) $2\sin(-\pi/6)+3\cos(-\pi/2)-3\operatorname{ctg}(-\pi/4)+4\operatorname{tg}0=2$.

§ 5. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Если две функции от одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех допустимых значениях аргументов, то они называются *тождественно равными*.

Равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов, называется *тождеством*.

Если в состав тождества входят тригонометрические функции, то тождество называется *тригонометрическим*.

Переход от данной функции к тождественно равной ей называется *тождественным преобразованием функции*.

При доказательстве тригонометрических тождеств обычно применяют следующие приемы: 1) производят преобразования над любой частью равенства (обычно над той, которая представляет более сложное выражение), так чтобы в результате тождественных преобразований над ней получилось выражение, стоящее в другой части равенства; 2) преобразуют одновременно обе части доказываемого тождества, пока не станет очевидным, что в обеих частях получились тождественно равные выражения; 3) используя свойство пропорции о равенстве произведений крайних и средних членов, убеждаются в равенстве этих произведений.

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{9.22}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\pi k/2,\ k\in Z; \tag{9.23}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1/\cos^2\alpha,\ \alpha\neq\pi/2+\pi k,\ k\in Z; \tag{9.24}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1/\sin^2\alpha,\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z. \tag{9.25}$$

Используя основные тригонометрические тождества, можно выразить через данную тригонометрическую функцию остальные функции. Эти выражения приведены в табл. V.

Таблица V

Данная функция	Искомая функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

65. Дано: $\sin\alpha=3/5$, $\pi/2<\alpha<\pi$. Вычислить: 1) $\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha$.

○ 1) $\cos\alpha=-\sqrt{1-(3/5)^2}=-4/5$ (перед радикалом стоит минус, так как во II четверти $\cos\alpha<0$); 2) $\operatorname{tg}\alpha=(3/5):(-4/5)=-3/4$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=-4/3$. ●

66. Дано: $\cos\alpha=-12/13$, $\pi<\alpha<3\pi/2$. Вычислить: 1) $\sin\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha$.

○ 1) $\sin\alpha=-\sqrt{1-(-12/13)^2}=-5/13$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=(-5/13):(-12/13)=5/12$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=12/5$. ●

67. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-3/4$; $\pi/2<\alpha<\pi$. Вычислить: 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\sin\alpha$.

○ 1) $\operatorname{ctg}\alpha=-4/3$; 2) по формуле (9.24) получим $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{1+(-3/4)^2}}=-\dfrac{4}{5}$; 3) $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$. ●

68. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=8/15$, $0<\alpha<\pi/2$. Вычислить: 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha$.

○ 1) $\operatorname{tg}\alpha=15/8$; 2) по формуле (9.25) получим $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+(8/15)^2}}=\dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha=\sqrt{1-(15/17)^2}=\dfrac{8}{17}$. ●

69. Упростить выражения:

1) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

○ 1) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha+\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=$

$=\frac{1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z\right)$; 2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\times$

$\times\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2=1$. ●

70. Доказать тождества: 1) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 2) $1+\sin\alpha+$

$+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$; 3) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

○ 1) $\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1+1+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)$, $\alpha\neq\pi k$,

$k\in Z$.

2) Преобразуем левую часть:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Преобразуем правую часть:

$$(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=(1+\cos\alpha)\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Поскольку левая и правая части равны, искомое тождество доказано.

3) На основании свойства пропорции получим

$$(\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha))\Leftrightarrow(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha)\Leftrightarrow(\sin^2\alpha=\sin^2\alpha),$$

$$\alpha\neq\pi k,\quad k\in Z.$$ ●

71. Найти значение функции:

1) $y=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^3 x-\cos^3 x}$, если $\operatorname{tg}x=2$;

2) $y=\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+2}{3\sin x\cos x+\cos^2 x-4}$, если $\operatorname{tg}x=3$.

○ 1) Так как числитель и знаменатель — однородные многочлены одной и той же степени от $\sin x$ и $\cos x$, то их можно разделить на $\cos^2 x$; тогда получим

$$y=\frac{\operatorname{tg}^3 x+1}{\operatorname{tg}^3 x-1}=\frac{2^3+1}{2^3-1}=\frac{9}{7}.$$

2) Умножив 2 в числителе и 4 в знаменателе на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x+\cos^2 x)$ и разделив затем числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, получим

$$y=\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{3\sin x\cos x+\cos^2 x-4(\sin^2 x+\cos^2 x)}=$$

$$=\frac{3\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x}{3\sin x\cos x+4\sin^2 x-3\cos^2 x}=\frac{3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+2}{3\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}^2 x-3}=$$

$$=\frac{3\cdot 3^2+3+2}{3\cdot 3-4\cdot 3^2-3}=-\frac{16}{15}.$$ ●

72. Вычислите значения остальных трех тригонометрических функций, если 1) $\sin\alpha=-5/13$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$; 2) $\cos\alpha=-8/17$ и $\pi/2<\alpha<\pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=8/15$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-7/24$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

73. Упростите выражения:

1) $\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 4) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$; 6) $\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\sin^2 x$;

7) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$; 8) $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

74. Докажите тождества:

1) $\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\sin x+\cos x$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;

3) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

4) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$; 5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$;

6) $1-\sin^6 z-\cos^6 z=3\sin^2 z\cos^2 z$;

7) $\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

75. Вычислите:

1) $y=\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$, если $\operatorname{tg}x=3$;

2) $y=\frac{3\sin^2 x+2\cos^2 x-1}{\sin^2 x-\sin x\cos x+2}$, если $\operatorname{tg}x=1$.

76. Упростите выражения:

1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; 2) $\sin^2\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

3) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$;

5) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; 6) $(1+\sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$;

7) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2$; 8) $\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$.

77. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{ctg}\alpha+1)^2+(\operatorname{ctg}\alpha-1)^2=2/\sin^2\alpha$;

2) $\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha-1/\cos\alpha=0$;

3) $\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2=4\operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\operatorname{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

5) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$;

6) $\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha=1$.

78. Вычислите значения выражений, если $\operatorname{tg} z=2$:

1) $\sin^4 z+\cos^4 z$; 2) $\sin^6 z+\cos^6 z$;

3) $\dfrac{\sin^4 z-\cos^4 z}{\sin^6 z-\cos^6 z}$; 4) $\dfrac{\sin^3 z-2\cos^3 z+3\cos z}{3\sin z+2\cos z}$.

79. Дано: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$. Найдите: 1) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Вычислите

$$\frac{(\sin(\pi/4)+\cos(3\pi/2))\cdot\operatorname{tg}(\pi/3)}{\operatorname{ctg}(\pi/6)-\operatorname{ctg}(\pi/2)}.$$

2) Определите знак выражения

$$\frac{\cos 100^\circ\operatorname{tg}250^\circ}{\sin 300^\circ\operatorname{ctg}100^\circ}.$$

3) Вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α, если $\sin\alpha=-3/5$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

4) Вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α, если $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}/3$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

5) Докажите тождество $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\times\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$ и укажите допустимые значения для α.

II вариант

1) Вычислите

$$\frac{2\operatorname{tg}(\pi/4)(\operatorname{tg}(\pi/3)+\cos(\pi/6))}{\cos\pi-2\sin(3\pi/2)}.$$

2) Определите знак выражения

$$\frac{\operatorname{tg}150^\circ\sin200^\circ}{\cos320^\circ\operatorname{ctg}140^\circ}.$$

3) Вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α, если $\cos\alpha=-4/5$ и $\pi/2<\alpha<\pi$.

4) Вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α, если $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

5) Докажите тождество $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-1$ и укажите допустимые значения для α.

§ 6. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция f называется *периодической*, если существует такое число $\lambda\neq0$, что при любом α из области определения функции числа $\alpha-\lambda$ и $\alpha+\lambda$ также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$f(\alpha-\lambda)=f(\alpha)=f(\alpha+\lambda).$$

В этом случае число λ называется *периодом* функции f; ее периодами являются также числа вида $n\lambda$, $n\in Z$, $n\neq0$. Наименьший положительный период для синуса и косинуса равен 2π, а для тангенса и котангенса он равен π.

Свойство периодичности тригонометрических функций можно выразить тождествами:

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi k),\ k\in Z; \tag{9.26}$$

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+2\pi k),\ k\in Z; \tag{9.27}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi k),\ k\in Z; \tag{9.28}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha+\pi k),\ k\in Z. \tag{9.29}$$

80. Вычислить:

1) $\cos3660^\circ$; 2) $2\cos4{,}5\pi+\sin(19\pi/3)$; 3) $\sin(-300^\circ)-\operatorname{tg}(-150^\circ)$.

○ На основании свойства периодичности косинуса и синуса получим:

1) $\cos3660^\circ=\cos(360^\circ\cdot10+60^\circ)=\cos60^\circ=1/2$;

2) $2\cos4{,}5\pi+\sin(19\pi/3)=2\cos(2\pi\cdot2+0{,}5\pi)+\sin(2\pi\cdot3+\pi/3)=2\cos0{,}5\pi+\sin(\pi/3)=0+\sqrt{3}/2=\sqrt{3}/2$.

3) Прибавив по одному периоду к каждому из аргументов, получим

$$\sin(-300^\circ)-\operatorname{tg}(-150^\circ)=\sin(-300^\circ+360^\circ)-\operatorname{tg}(-150^\circ+180^\circ)=$$
$$=\sin60^\circ-\operatorname{tg}30^\circ=\sqrt{3}/2-\sqrt{3}/3=\sqrt{3}/6.\ \bullet$$

81. Найти периоды функций: 1) $y=\sin3x$; 2) $y=\cos(x/2)$.

○ 1) Обозначив искомый период через λ, получим

$$\sin3(x+\lambda)=\sin3x,\ \text{или}\ \sin(3x+3\lambda)=\sin3x.$$

Отсюда заключаем, что $3\lambda=2\pi$, т. е. $\lambda=2\pi/3$.

2) Аналогично имеем

$$\cos\left(\frac{x+\lambda}{2}\right)=\cos\frac{x}{2},\ \text{или}\ \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)=\cos\frac{x}{2},$$

откуда $\lambda/2=2\pi$, т. е. $\lambda=4\pi$. ●

82. Найти периоды функций:

1) $y=\sin2x+\cos3x$; 2) $y=\sin(3x/2)+\sin(2x/3)$.

○ 1) Найдем период каждого из слагаемых:

$$\sin2(x+\lambda_1)=\sin2x,\ \sin(2x+2\lambda_1)=\sin2x,\ 2\lambda_1=2\pi,\ \lambda_1=\pi;$$
$$\cos3(x+\lambda_2)=\cos3x,\ \cos(3x+3\lambda_2)=\cos3x,\ 3\lambda_2=2\pi,\ \lambda_2=2\pi/3.$$

Каждое число, кратное периоду, само является периодом, поэтому общее кратное чисел λ_1 и λ_2 является периодом функции y. Наименьшее общее кратное чисел π и $2\pi/3$, равное наименьшему общему кратному числителей периодов λ_1 и λ_2, есть 2π.

2) Имеем

$$\sin\frac{3(x+\lambda_1)}{2}=\sin\frac{3x}{2},\ \sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{3\lambda_1}{2}\right)=\sin\frac{3x}{2},\ 3\lambda_1/2=2\pi,\ \lambda_1=4\pi/3;$$

$$\sin\frac{2(x+\lambda_2)}{3}=\sin\frac{2x}{3},\ \sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\lambda_2}{3}\right)=\sin\frac{2x}{3};\ 2\lambda_2/3=2\pi,\ \lambda_2=3\pi.$$

Наименьшее общее кратное числителей периодов λ_1 и λ_2 равно 12π; следовательно, период фуикции равен 12π. ●

83. Вычислите: 1) $\cos7230^\circ$; 2) $\sin900^\circ$; 3) $\operatorname{tg}585^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}750^\circ$; 5) $\sin1843^\circ$.

84. Вычислите: 1) $\sin6{,}2\pi+\cos4{,}1\pi$; 2) $\operatorname{tg}(13\pi/4)+\operatorname{ctg}(21\pi/4)$; 3) $\sin(19\pi/3)-\cos(19\pi/3)$; 4) $\sin(82\pi-0{,}192)+\cos(22\pi+1{,}501)$; 5) $\sin7{,}854\cdot\operatorname{tg}3{,}927$.

85. Найдите периоды функций: 1) $y=\cos3x$; 2) $y=\cos(x/4)$; 3) $y=\operatorname{tg}2x$; 4) $y=\operatorname{ctg}(x/5)$.

86. Найдите периоды функций: 1) $y=\sin 5x-\cos 4x+1$; 2) $y=2\sin(x/4)-3\sin(x/3)$; 3) $y=\operatorname{tg}(2x/3)-4\operatorname{ctg}(3x/2)-2$; 4) $y=\sin(3x/4)-3\cos(5x/8)+\cos 5x$.

87. Вычислите: 1) $2\sin 750^\circ-3\cos 900^\circ+\operatorname{tg}405^\circ$; 2) $\operatorname{tg}^2 600^\circ+\operatorname{ctg}^2 585^\circ+3$; 3) $\sin(-330^\circ)+\sin(-690^\circ)$; 4) $\operatorname{tg}(-135^\circ)-\operatorname{tg}225^\circ$; 5) $\cos(-3\pi)-\sin(-7\pi)$; 6) $\dfrac{\sin(-11\pi/2)+\operatorname{tg}(-5\pi)}{\cos(-5\pi)+\operatorname{ctg}(-21\pi/4)}$.

88. Упростите выражения:

1) $\sin^2(6\pi-\alpha)+\sin^2(10\pi+\alpha)$; 2) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-4\pi\right)+\cos^2\left(8\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$;

3) $\cos(\alpha-6\pi)+\cos(12\pi+\alpha)$; 4) $\sin^2(2\pi+\alpha)+\cos^2(6\pi-\alpha)+1$.

89. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos^2(4\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(9\pi+\alpha)+1}=\cos^4\alpha$; 2) $\dfrac{\cos(6\pi+\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}{\sin(4\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(5\pi+\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}(13\pi-x)+\operatorname{tg}(4\pi+x)}{\operatorname{tg}(5\pi+x)-\operatorname{ctg}(7\pi+x)}=1$;

4) $\sin(6\pi-x)\cos(8\pi-x)\operatorname{tg}(9\pi-x)\operatorname{ctg}(10\pi-x)=-\sin x\cos x$.

§ 7. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция $y=\sin x$ на отрезке $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ имеет обратную функцию, которая называется *арксинусом* и обозначается $y=\arcsin x$:

$$-1\leqslant D(\arcsin x)\leqslant 1,\quad -\pi/2\leqslant E(\arcsin x)\leqslant\pi/2;$$

$$\sin(\arcsin x)=x,\ \text{где}\ -1\leqslant x\leqslant 1;\quad \arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

Функция $y=\cos x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ имеет обратную функцию, которая называется *арккосинусом* и обозначается $y=\arccos x$:

$$-1\leqslant D(\arccos x)\leqslant 1,\quad 0\leqslant E(\arccos x)\leqslant\pi;$$

$$\cos(\arccos x)=x,\ \text{где}\ -1\leqslant x\leqslant 1\quad \arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Функция $y=\operatorname{tg}x$ на промежутке $-\pi/2<x<\pi/2$ имеет обратную функцию, которая называется *арктангенсом* и обозначается $y=\operatorname{arctg}x$:

$$D(\operatorname{arctg}x)=\mathbf{R},\quad -\pi/2<E(\operatorname{arctg}x)<\pi/2;$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x,\ \text{где}\ x\in\mathbf{R};\quad \operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x.$$

Функция $y=\operatorname{ctg}x$ на промежутке $0<x<\pi$ имеет обратную функцию, которая называется *арккотангенсом* и обозначается $y=\operatorname{arcctg}x$:

$$D(\operatorname{arcctg}x)=\mathbf{R},\quad 0<E(\operatorname{arcctg}x)<\pi;$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)=x,\ \text{где}\ x\in\mathbf{R};\quad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x.$$

90. Проверить, справедливы ли равенства: 1) $\arcsin(1/2)=\pi/6$; 2) $\arccos(-\sqrt{3}/2)=5\pi/6$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\pi/3$.

○ 1) $\arcsin(1/2)=\pi/6$, так как $\sin(\pi/6)=1/2$ и $-\pi/2<\pi/6<\pi/2$;

2) $\arccos(-\sqrt{3}/2)=5\pi/6$, так как $\cos(5\pi/6)=-\sqrt{3}/2$ и $0<5\pi/6<\pi$;

3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\pi/3$, так как $\operatorname{tg}(-\pi/3)=-\sqrt{3}$ и $-\pi/2<-\pi/3<\pi/2$. ●

91. Вычислить: 1) $\arcsin 0{,}7880$; 2) $\arccos 0{,}9063$; 3) $\operatorname{arctg}2{,}145$; 4) $\operatorname{arcctg}0{,}9657$.

○ 1) Установим переключатель Г□Р в положение «Р». Согласно алгоритму [0,7880] [arc] [sin], находим $\arcsin 0{,}7880\approx 0{,}9076$;

2) аналогично получим $\arccos 0{,}9063\approx 0{,}4363$;

3) $\operatorname{arctg}2{,}145\approx 1{,}1345$;

4) $\operatorname{tg}\alpha=1/0{,}9657=1{,}0355$, $\alpha=\operatorname{arctg}1{,}0355=0{,}8028$. ●

92. Проверьте, справедливы ли равенства: 1) $\arcsin(\sqrt{2}/2)=\pi/4$; 2) $\arcsin(-1/2)=-\pi/6$; 3) $\arccos(\sqrt{3}/2)=\pi/6$; 4) $\arccos(\sqrt{2}/2)=3\pi/4$; 5) $\operatorname{arctg}1=\pi/4$; 6) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi/3$; 7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3)=\pi/6$; 8) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=-2\pi/3$.

93. Вычислите: 1) $\arcsin 0{,}4067$; 2) $\arcsin 0{,}9962$; 3) $\arccos 0{,}9848$; 4) $\arccos 0{,}1736$; 5) $\operatorname{arctg}0{,}2679$; 6) $\operatorname{arctg}2{,}747$; 7) $\operatorname{arcctg}2{,}145$; 8) $\operatorname{arcctg}0{,}1944$.

94. Вычислите: 1) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$; 2) $\arccos(-1/2)$; 3) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3)$; 4) $\operatorname{arcctg}(-1)$; 5) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; 6) $\arcsin(-0{,}9033)$; 7) $\arccos(-0{,}8965)$; 8) $\operatorname{arctg}(-1{,}4659)$; 9) $\operatorname{arcctg}(-1{,}3663)$; 10) $\operatorname{arcctg}(-0{,}3096)$.

95. Докажите справедливость неравенств: 1) $\arcsin(1/2)<\arccos(1/2)$; 2) $\arccos 0>\arcsin 0$; 3) $\arcsin(1/4)>\arcsin(1/6)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}>\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

96. Вычислите: 1) $\arcsin(\sqrt{2}/2)+\arccos(\sqrt{2}/2)$; 2) $\arcsin(-1/2)+\arccos(-1/2)$; 3) $\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arcctg}(-1)$; 4) $\arcsin 1+\arccos 1+\operatorname{arctg}1+\operatorname{arcctg}1$; 5) $\arcsin(-1)+\arccos(-1)$; 6) $\arcsin 0+\arccos 0$; 7) $\arcsin 0+\arcsin 1+\arcsin(-1)$; 8) $\arccos 0+\arccos 1+\arccos(-1)$.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ ДУГИ (УГЛА) ПО ДАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

97. Найти множество дуг α, синус которых равен a.

○ 1) На оси OY единичной окружности построим точку $N(0;\ a)$ и проведем через нее прямую, параллельную оси OX. Рассмотрим два случая.

I случай. Пусть $|a|<1$; тогда прямая $y=a$ пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2 (рис. 40), симметричных относительно оси OY. Точке M_1 соответствует дуга $\overset{\smile}{AM}_1=\arcsin a$, а точке M_2 — дуга $\pi-\arcsin a$. Каждая из этих дуг имеет синус, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точке M_1 и имеющих синус, равный a, выражается формулой

$$\alpha=\arcsin a+2\pi k\ (k\in Z),$$

а множество дуг, оканчивающихся в точке M_2 и имеющих синус, также равный a,— формулой

$$\alpha=\pi-\arcsin a+2\pi k,$$

или

$$\alpha=-\arcsin a+\pi(2k+1)\ (k\in Z).$$

Так как $(-1)^n=1$ при $n=2k$ (т. е. если n — четное) и $(-1)^n=-1$ при $n=2k+1$ (т. е. если n — нечетное), то эти две формулы можно объединить в одну:

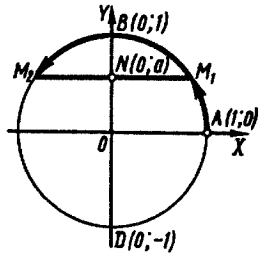


Рис. 40

$$\alpha=(-1)^n\arcsin a+\pi n\,(n\in Z).$$

II случай. Пусть $a=\pm 1$; тогда точка $N(0; a)$ совпадает с точкой $B(0; 1)$, если $a=1$, и с точкой $D(0; -1)$, если $a=-1$ (рис. 40). Множество дуг, оканчивающихся в точке $B(0; 1)$ (при $a=1$), выражается формулой

$$\alpha=\pi/2+2\pi k\,(k\in Z),$$

а множество дуг, оканчивающихся в точке $D(0; -1)$ (при $a=-1$),— формулой

$$\alpha=-\pi/2+2\pi k\,(k\in Z).$$

Из всех дуг (углов), синус которых равен a, где $|a|\leqslant 1$, главной считается дуга $\arcsin a$ из промежутка $-\pi/2<\arcsin a\leqslant\pi/2$. ●

98. Записать главные дуги, синус которых равен: 1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) $\sqrt{3}/2$; 5) $-1/2$.

○ 1) $\alpha=\arcsin 0=0$; 2) $\alpha=\arcsin(-1)=-\arcsin 1=-\pi/2$; 3) $\alpha=\arcsin 1=\pi/2$; 4) $\alpha=\arcsin(\sqrt{3}/2)=\pi/3$; 5) $\alpha=\arcsin(-1/2)=-\arcsin(1/2)=-\pi/6$. ●

99. Построить главные дуги $\arcsin(2/5)$ и $\arcsin(-2/5)$.

○ Построение выполнено на рис. 41: $\overset{\smile}{AM}_1=\arcsin(2/5)$, $\overset{\smile}{AM}_2=\arcsin(-2/5)=-\arcsin(2/5)$. ●

100. Записать множество дуг, синус которых равен 1/2.

○ На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α_1 и α_2, синус которых равен 1/2: $\alpha_1=\arcsin(1/2)=\pi/6$ и $\alpha_2=\pi-\arcsin(1/2)=\pi-\pi/6$. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулами

$$\alpha=\pi/6+2\pi k \text{ и } \alpha=\pi-\pi/6+2\pi k=-\pi/6+\pi(2k+1),$$

или

$$\alpha=(-1)^n\pi/6+\pi n\,(n\in Z).$$ ●

101. Найти множество дуг α, косинус которых равен a.

○ На оси OX единичной окружности построим точку $N(a; 0)$ и проведем через нее прямую, параллельную оси OY. Рассмотрим два случая.

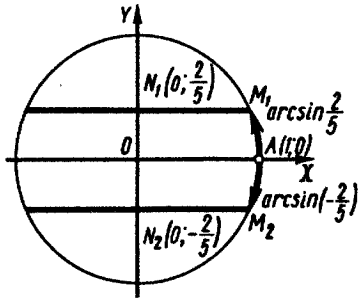


Рис. 41

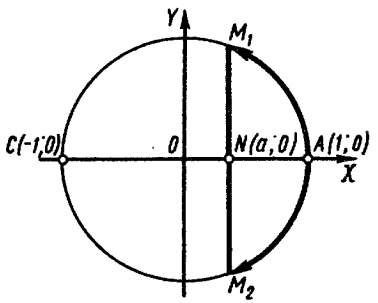


Рис. 42

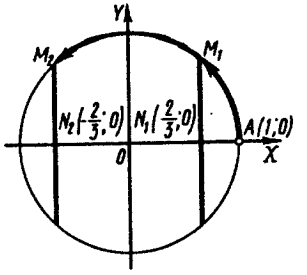


Рис. 43

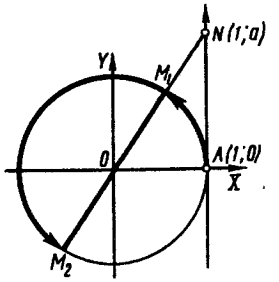


Рис. 44

I случай. Пусть $|a|<1$; тогда прямая $x=a$ пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2, симметричных относительно оси OX (рис. 42). Точке M_1 соответствует дуга $\overset{\smile}{AM}_1=\arccos a$, а точке M_2 — дуга $\overset{\smile}{AM}_2=-\arccos a$. Каждая из этих дуг имеет косинус, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точке M_1 и имеющих косинус, равный a, выражается формулой

$$\alpha=\arccos a+2\pi k\,(k\in Z),$$

а множество дуг, оканчивающихся в точке M_2 и имеющих косинус, также равный a,— формулой

$$\alpha=-\arccos a+2\pi k\ (k\in Z).$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$\alpha=\pm\arccos a+2\pi k\ (k\in Z).$$

II случай. Пусть $a=\pm 1$; тогда точка $N(a; 0)$ совпадает с точкой $A(1; 0)$, если $a=1$, и с точкой $C(-1; 0)$, если $a=-1$ (рис. 42). Множество дуг, оканчивающихся в точке $A(1; 0)$ (при $a=1$), выражается формулой

$$\alpha=2\pi k\ (k\in Z),$$

а множество дуг, оканчивающихся в точке $C(-1; 0)$ (при $a=-1$),— формулой

$$\alpha=\pi+2\pi k=\pi(2k+1)\ (k\in Z).$$

Из всех дуг (углов), косинус которых равен a, где $|a|\leqslant 1$, главной считается дуга $\arccos a$ из промежутка $0\leqslant\arccos a\leqslant\pi$. ●

102. Записать главные дуги, косинус которых равен: 1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) 1/2; 5) $-\sqrt{2}/2$; 6) $-3/4$.

○ 1) $\alpha=\arccos 0=\pi/2$; 2) $\alpha=\arccos 1=0$; 3) $\alpha=\arccos(-1)=\pi$; 4) $\alpha=\arccos(1/2)=\pi/3$; 5) $\alpha=\arccos(-\sqrt{2}/2)=\pi-\arccos(\sqrt{2}/2)=\pi-\pi/4=3\pi/4$; 6) $\alpha=\arccos(-3/4)=\pi-\arccos(3/4)$. ●

103. Построить главные дуги $\arccos(2/3)$ и $\arccos(-2/3)$.

○ Построение выполнено на рис. 43: $\overset{\smile}{AM}_1=\arccos(2/3)$, $\overset{\smile}{AM}_2=\arccos(-2/3)=\pi-\arccos(2/3)$. ●

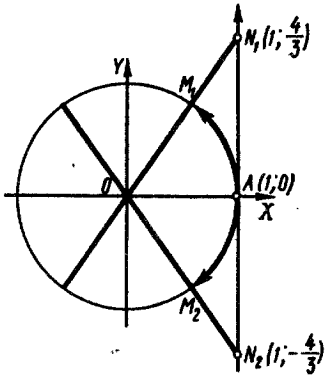


Рис. 45

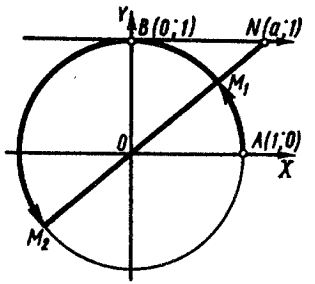


Рис. 46

104. Записать множество дуг, косинус которых равен 1/2.

○ На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α_1 и α_2, косинус которых равен 1/2: $\alpha_1=\arccos(1/2)=\pi/3$ и $\alpha_2=-\arccos(1/2)=-\pi/3$. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулой

$$\alpha=\pm\pi/3+2\pi k\ (k\in\mathbf{Z}).$$ ●

105. Найти множество дуг α, тангенс которых равен a.

○ На оси тангенсов (рис. 44) построим точку $N(1; a)$. Через эту точку и начало координат проведем прямую, которая пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2. Тангенс дуг AM_1 и AM_2 равен ординате a точки N — точки пересечения продолжения радиуса OM_1 с осью тангенсов. Точке M_1 соответствует дуга $\breve{AM}_1=\operatorname{arctg}a$, а точке M_2 — дуга $\breve{AM}_2=\operatorname{arctg}a+\pi$. Каждая из этих дуг имеет таигенс, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точках M_1 и M_2, записывается общей формулой

$$\alpha=\operatorname{arctg}a+\pi k\ (k\in\mathbf{Z}).$$

Из всех дуг (углов), имеющих данный таигенс a, главной считается дуга $\operatorname{arctg}a$ из промежутка $-\pi/2<\operatorname{arctg}a<\pi/2$. ●

106. Записать главные дуги, тангенс которых равен: 1) 0; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}/3$; 4) 1; 5) -1.

○ 1) $\alpha=\operatorname{arctg}0=0$; 2) $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi/3$; 3) $\alpha=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3)=-\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)=-\pi/6$; 4) $\alpha=\operatorname{arctg}1=\pi/4$; 5) $\alpha=\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg}1=-\pi/4$. ●

107. Построить главные дуги $\operatorname{arctg}(4/3)$ и $\operatorname{arctg}(-4/3)$.

○ Построение выполнено на рис. 45: $\breve{AM}_1=\operatorname{arctg}(4/3)$; $\breve{AM}_2=\operatorname{arctg}(-4/3)=-\operatorname{arctg}(4/3)$. ●

108. Записать множество дуг, тангенс которых равен $\sqrt{3}$.

○ На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α_1 и α_2, тангенс которых равен $\sqrt{3}$: $\alpha_1=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi/3$ и $\alpha_2=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi=\pi/3+\pi$. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулой

$$\alpha=\pi/3+\pi k\ (k\in\mathbf{Z}).$$ ●

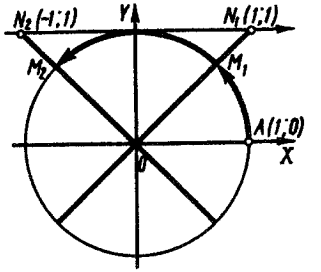


Рис. 47

109. Найти множество дуг α, котангенс которых равен a.

○ На оси котангенсов (рис. 46) построим точку $N(a; 1)$. Через эту точку и начало координат проведем прямую, которая пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2. Котангенс дуг AM_1 и AM_2 равен абсциссе a точки N — точки пересечения продолжения радиуса OM_1 с осью котангенсов. Точке M_1 соответствует дуга $\breve{AM}_1=\operatorname{arcctg}a$, а точке M_2 — дуга $AM_2=\operatorname{arcctg}a+\pi$. Каждая из этих дуг имеет котангенс, равный a. Множество дуг, оканчивающихся в точках M_1 и M_2, записывается общей формулой

$$\alpha=\operatorname{arcctg}a+\pi k\ (k\in\mathbf{Z}).$$

Из всех дуг (углов), имеющих данный котангенс a, главной считается дуга $\operatorname{arcctg}a$ из промежутка $0<\operatorname{arcctg}a<\pi$. ●

110. Записать главные дуги, котангенс которых равен: 1) $\sqrt{3}/3$; 2) -1; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$.

○ 1) $\alpha=\operatorname{arcctg}(\sqrt{3}/3)=\pi/3$; 2) $\alpha=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\pi/4=3\pi/4$; 3) $\alpha=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi/6$; 4) $\alpha=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\pi/6=5\pi/6$. ●

111. Построить главные дуги $\operatorname{arcctg}1$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$.

○ Построение выполнено на рис. 47: $AM_1=\operatorname{arcctg}1=\pi/4$; $\breve{AM}_2=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\pi/4=3\pi/4$. ●

112. Записать множество дуг, котангенс которых равен $\sqrt{3}$.

○ На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α_1 и α_2, котангенс которых равен $\sqrt{3}$: $\alpha_1=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi/6$ и $\alpha_2=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}+\pi=\pi/6+\pi$. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулой

$$\alpha=\pi/6+\pi k\ (k\in\mathbf{Z}).$$ ●

113. Запишите главные дуги, синус которых равен: 1) 1/2; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $-\sqrt{2}/2$; 4) $-\sqrt{3}/2$; 5) 3/4.

114. Запишите множество дуг, синус которых равен: 1) $\sqrt{3}/2$; 2) $-1/2$; 3) 1; 4) $-\sqrt{2}/2$.

115. Постройте дуги, синус которых равен: 1) 1/3; 2) $-2/3$; 3) 0,6. Запишите множество дуг, соответствующих этим значениям синуса.

116. Запишите множество дуг, косинус которых равен: 1) $-1/2$; 2) $\sqrt{3}/2$; 3) $-\sqrt{2}/2$; 4) $-\sqrt{3}/2$.

117. Постройте дуги, косинус которых равен: 1) 4/5; 2) $-4/5$; 3) 0,6. Запишите множество дуг, соответствующих этим значениям косинуса.

118. Запишите главные дуги, тангенс которых равен: 1) $\sqrt{3}/3$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) 1/2; 4) $-0{,}7$.

119. Запишите множество дуг, тангенс которых равен: 1) 0; 2) $\sqrt{3}/3$; 3) -1; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{2}$.

120. Постройте дуги, тангенс которых равен: 1) $-2/3$; 2) 2; 3) $-1{,}5$. Запишите множество дуг, соответствующих этим значениям тангенса.

121. Запишите множество дуг, котангенс которых равен: 1) $-\sqrt{3}/3$; .2) $-\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 1/2.

122. Постройте дуги, котангенс которых равен: 1) -2; 2) 0,8; 3) $-2/3$. Запишите множество дуг, соответствующих этим значениям котангенса.

§ 9. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения

$$\sin x=m,\ \cos x=m,\ \operatorname{tg} x=m,\ \operatorname{ctg} x=m,$$

где m — данное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), при которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение m.

Решить уравнения:

123. 1) $\sin x=m$; 2) $\sin x=1/2$.

○ 1) Если $|m|\leqslant 1$, то на единичной окружности имеются две дуги $\arcsin m$ и $\pi-\arcsin m$, синус которых равен m и концы которых симметричны относительно оси OY (рис. 48).

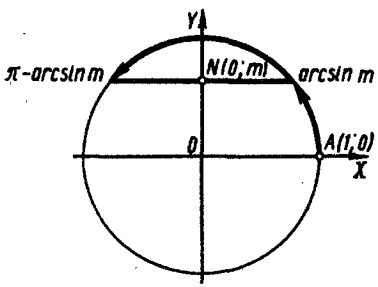


Рис. 48

Дуга $\arcsin m$ из промежутка $-\pi/2\leqslant\arcsin m\leqslant\pi/2$, синус которой равен m, называется главным решением уравнения $\sin x=m$. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\sin x=m$, находится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа периодов синуса:

$$x=\begin{cases}\arcsin m+2\pi k,\\ \pi-\arcsin m+2\pi k,\end{cases}$$

или

$$x=\begin{cases}\arcsin m+2\pi k,\\ -\arcsin m+\pi(2k+1).\end{cases}$$

Множество корней уравнения можно записать одной формулой (см. задачу 97):

$$x=(-1)^n\arcsin m+\pi n\ (n\in\mathbf{Z}).$$

В дальнейшем при записи ответа решения тригонометрического уравнения (или неравенства) будем считать, что параметры k, n, m могут принимать

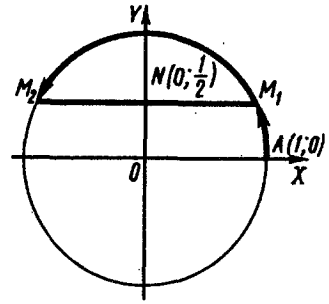


Рис. 49

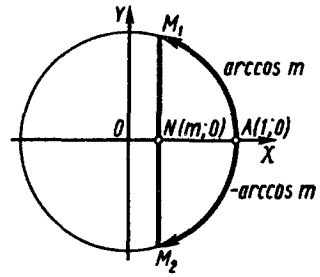


Рис. 50

любые целые значения, но при этом ради краткости записи не будем указывать, что $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$.

Если $|m|>1$, то уравнение решений не имеет.

Частные случаи:

$$\sin x=-1,\ x=-\pi/2+2\pi k,$$

$$\sin x=0,\ x=\pi k,$$

$$\sin x=1,\ x=\pi/2+2\pi k.$$

2) Главным решением является дуга $\overset{\smile}{AM}_1=\pi/6$ из промежутка $-\pi/2\leqslant\pi/6\leqslant\pi/2$, синус которой 1/2 (рис. 49). Множество корней уравнения имеет вид $(-1)^n\pi/6+\pi n$. ●

124. 1) $\cos x=m$; 2) $\cos x=-1/2$.

○ 1) Если $|m|\leqslant 1$, то на единичной окружности имеются две симметричные относительно оси OX дуги: $\overset{\smile}{AM}_1=\arccos m$ и $\overset{\smile}{AM}_2=-\arccos m$, косинус которых равен m (рис. 50).

Дуга $\arccos m$ из промежутка $0\leqslant\arccos m\leqslant\pi$, косинус которой равен m, называется главным решением уравнения $\cos x=m$. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\cos x=m$, находится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа периодов косинуса:

$$x=\pm\arccos m+2\pi k.$$

Если $|m|>1$, то уравнение решений не имеет.

Частные случаи:

$\cos x=-1$, $x=\pm\pi+2\pi k$, или $x=\pi(2k+1)$;

$\cos x=0$, $x=\pi/2+\pi k$;

$\cos x=1$, $x=2\pi k$.

2) Главным решением является дуга $\overset{\smile}{AM}_1=\pi-\pi/3=2\pi/3$ из промежутка $0\leqslant 2\pi/3\leqslant\pi$, косинус которой равен $-1/2$ (рис. 51). Множество корней уравнения имеет вид $\pm 2\pi/3+2\pi k$. ●

125. 1) $\operatorname{tg} x=m$; 2) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

○ 1) Дуга $\operatorname{arctg} m$ из промежутка $-\pi/2<\operatorname{arctg} m<\pi/2$, тангенс которой равен m, иазывается главным решением уравнения $\operatorname{tg} x=m$. Множество всех

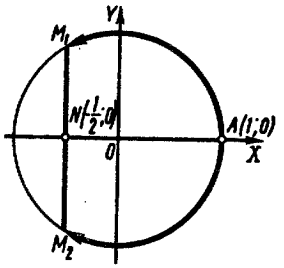


Рис. 51

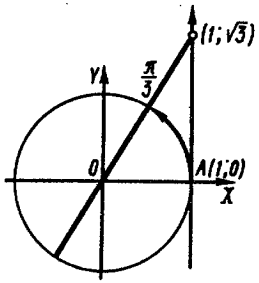


Рис. 52

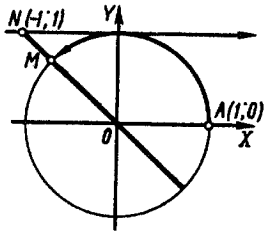


Рис. 53

искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{tg} x=m$, находится прибавлением любого целого числа периодов тангенса:

$$x=\operatorname{arctg} m+\pi k.$$

Частный случай: $\operatorname{tg} x=0$, $x=\pi k$.

2) Главным решением является дуга $\pi/3$ из промежутка $-\pi/2<\pi/3<\pi/2$, тангенс которой равен $\sqrt{3}$ (рис. 52). Множество корней уравнения имеет вид $\pi/3+\pi k$. ●

126. 1) $\operatorname{ctg} x=m$; 2) $\operatorname{ctg} x=-1$.

○ 1) Дуга $\operatorname{arcctg} m$ из промежутка $0<\operatorname{arcctg} m<\pi$, котангенс которой равен m, называется главным решением уравнения $\operatorname{ctg} x=m$. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{ctg} x=m$, находится прибавлением любого целого числа периодов котангенса:

$$x=\operatorname{arcctg} m+\pi k.$$

Частный случай: $\operatorname{ctg} x=0$, $x=\pi/2+\pi k$.

2) Главным решением является дуга $AM=\pi-\pi/4=3\pi/4$ из промежутка $0<3\pi/4<\pi$, котангенс которой равен -1 (рис. 53). Множество корней уравнения имеет вид $3\pi/4+\pi k$. ●

127. 1) $\sin 2x=1/2$; 2) $\operatorname{tg}(3x+2)=-1$; 3) $\cos(\cos x)=1/2$.

○ 1) $2x=(-1)^k\pi/6+\pi k$; множество корней уравнения имеет вид

$$(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};$$

2) $3x+2=-\pi/4+\pi k$; $3x=-\pi/4-2+\pi k$; множество корней уравнения имеет вид

$$-\frac{\pi}{12}-\frac{2}{3}+\frac{\pi k}{3};$$

3) $\cos x=\pm\pi/3+2\pi k$; последнее уравнение не имеет корней, так как при любом $k\in\mathbf{Z}$ его правая часть по абсолютной величине превосходит единицу. ●

128. 1) $\sin^2 x=m$; 2) $\cos^2 x=m$ $(0\leqslant m\leqslant 1)$.

○ 1) $\sin^2 x=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{m},\\ \sin x=-\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k+(-1)^k\arcsin\sqrt{m},\\ x=\pi k-(-1)^k\arcsin\sqrt{m}.\end{array}\right.$

В этой записи решения множитель $(-1)^k$, регулирующий знак вторых членов, является лишним. Если для некоторого целого k перед $\arcsin\sqrt{m}$ в первой формуле берется знак плюс, то для этого же k во второй — знак минус, и наоборот (в зависимости от четности или нечетности k). Поэтому обе формулы можно объединить в одну, более простую:

$$x=\pi n\pm\arcsin\sqrt{m}.$$

$$2)\ \cos^2 x=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\sqrt{m},\\ \cos x=-\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi k\pm\arccos\sqrt{m},\\ x=2\pi k\pm(\pi-\arccos\sqrt{m})\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi k\pm\arccos\sqrt{m},\\ x=\pi(2k\pm1)\pm\arccos\sqrt{m}.\end{array}\right.$$

Объединив обе формулы, получим

$$x=\pi n\pm\arccos\sqrt{m}.\ ●$$

129. 1) $\operatorname{tg}^2 x=m$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x=m$ $(m>0)$.

○ 1) $\operatorname{tg}^2 x=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=\sqrt{m},\\ \operatorname{tg} x=-\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k+\operatorname{arctg}\sqrt{m},\\ x=\pi k-\operatorname{arctg}\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pi k\pm\operatorname{arctg}\sqrt{m}.$

2) Аналогично находим $x=\pi k\pm\operatorname{arcctg}\sqrt{m}$. ●

130. 1) $2\sin^2 x-7\sin x+3=0$; 2) $4\cos^2 x+\sin x-1=0$; 3) $\operatorname{tg} x\cos x+\operatorname{tg} x-\cos x-1=0$; 4) $\operatorname{tg}^3 x=\operatorname{tg} x$.

○ 1) Решаем это уравнение относительно $\sin x$:

$$2\sin^2 x-7\sin x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1/2,\\ \sin x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\pi/6+\pi k,\\ \text{нет решения.}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^k\pi/6+\pi k$.

2) Имеем

$$4(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0\Leftrightarrow 4\sin^2 x-\sin x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-3/4,\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=(-1)^{k+1}\arcsin(3/4)+\pi k,\\ x=\pi/2+2\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^{k+1}\arcsin(3/4)+\pi k$, $\pi/2+2\pi k$.

$$3)\ \operatorname{tg} x\cos x+\operatorname{tg} x-\cos x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos x+1)(\operatorname{tg} x-1)=0,\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=-1,\\ \operatorname{tg} x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi(2k+1),\\ x=\pi/4+\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi(2k+1),\\ x=\pi/4+\pi k.\end{array}\right.\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}$$

Ответ: $\pi(2k+1)$; $\pi/4+\pi k$.

$$4)\ \operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x=0\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x-1)=0,\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \operatorname{tg}^2 x=1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\pi/4+\pi k\end{array}\right.\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\pi/4+\pi k.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $\pi k;\ \pm\pi/4+\pi k$. ●

131. 1) $\sin x-\cos x=0$; 2) $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$; 3) $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x-4=0$.

○ 1) $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x/\cos x=1,\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{tg} x=1,\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow x=\pi/4+\pi k.$

2) Решаем однородное уравнение:

$$\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x}+\dfrac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+3=0,\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \operatorname{tg} x=3\end{array}\right.\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi/4+\pi k,\\ x=\operatorname{arctg} 3+\pi k\end{array}\right.\\ x\neq\pi/2+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/4+\pi k,\\ x=\operatorname{arctg} 3+\pi k.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg} 3+\pi k$.

3) Умножив свободный член на $\sin^2 x+\cos^2 x$, получим однородное уравнение:

$$2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x-4(\sin^2 x+\cos^2 x)=0,$$

или

$$2\sin^2 x-5\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$$

Разделив все члены на $\cos^2 x$ ($x\neq\pi/2+\pi k$), получим

$$2\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg} x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \operatorname{tg} x=3/2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/4+\pi k,\\ x=\operatorname{arctg}(3/2)+\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}(3/2)+\pi k$. ●

Решите уравнения:

132. 1) $\sin x=\sqrt{2}/2$; 2) $\sin x=-\sqrt{2}/2$; 3) $\sin x=-\sqrt{3}/2$; 4) $\sin x=\sqrt{3}/2$; 5) $\sin x=4/5$.

133. 1) $\cos x=1/2$; 2) $\cos x=-\sqrt{2}/2$; 3) $\cos x=-\sqrt{3}/2$; 4) $\cos x=\sqrt{3}/2$; 5) $\cos x=-0{,}3$.

134. 1) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}/3$; 2) $\operatorname{tg} x=1$; 3) $\operatorname{tg} x=1{,}327$.

135. 1) $\operatorname{ctg} x=1$; 2) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}/3$; 4) $\operatorname{ctg} x=2{,}05$.

136. 1) $\sin(x/2+\pi/6)=1/4$; 2) $\operatorname{tg}(3x+1)=1$; 3) $\operatorname{tg} 3x=\sqrt{3}/3$; 4) $\sin\pi x=\sqrt{2}/2$; 5) $\cos x^2=1$.

137. 1) $\sin^2 x=1/2$; 2) $\sin^2 x=1$; 3) $\sin^2 x=3/4$; 4) $\sin^2 x=0$.

138. 1) $\cos^2 x=1$; 2) $\cos^2 x=1/2$; 3) $\cos^2 x=1/9$; 4) $\cos^2 x=0$.

139. 1) $\operatorname{tg}^2 x=1$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x=3$; 3) $\operatorname{tg}^2 x=1/3$.

140. 1) $2\sin^2 x+3\cos x-3=0$; 2) $\cos^2 x-\cos x-2=0$; 3) $5\operatorname{ctg}^2 x-8\operatorname{ctg} x+3=0$; 4) $3\sin^2 x+\cos^2 x-2=0$; 5) $7\sin^2 x-5\cos^2 x+2=0$; 6) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=0$; 7) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$.

141. 1) $\cos 2x=1$; 2) $\operatorname{tg}(x-\pi/2)=1$; 3) $\operatorname{tg}(2x+\pi/2)=-1$; 4) $\operatorname{tg} x(\sin x+\cos x)=0$; 5) $\cos x(\operatorname{tg} x-1)=0$; 6) $\operatorname{tg}(x/2)(1+\cos x)=0$.

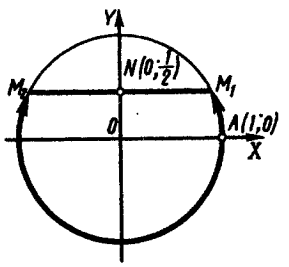


Рис. 54

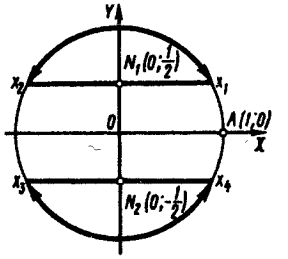


Рис. 55

142. 1) $\sin 2x/\cos x=0$; 2) $\cos^2 x+\sin x\cos x-1=0$; 3) $\sin x=1/\cos x$; 4) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-3=0$; 5) $2\sin x-3\cos x=0$.

143. 1) $\sin^2 x-10\sin x\cos x+21\cos^2 x=0$; 2) $8\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x-4=0$; 3) $\sin^2 x-6\sin x\cos x+5\cos^2 x=0$; 4) $9\sin^2 x+25\cos^2 x+32\sin x\cos x=25$.

§ 10. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

$$\sin x<m,\ \sin x>m,\ \cos x<m,\ \cos x>m,$$
$$\operatorname{tg} x<m,\ \operatorname{tg} x>m,\ \operatorname{ctg} x<m,\ \operatorname{ctg} x>m,$$

где m — данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство — значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Решить неравенства:

144. 1) $\sin x<1/2$; 2) $|\sin x|>1/2$.

○ 1) Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так: $-1\leqslant\sin x<1/2$. Имеем $\breve{AM}_1=\pi/6$, $\breve{AM}_2=-\pi-\pi/6=-7\pi/6$ (рис. 54). Неравенству $\sin x<1/2$ удовлетворяют дуги из промежутка $-7\pi/6<x<\pi/6$. В силу периодичности синуса общим решением служит множество дуг вида $-7\pi/6+2\pi k<x<\pi/6+2\pi k$.

2) Это неравенство выполняется для всех дуг $x_1<x<x_2$ и $x_3<x<x_4$, где $x_1=\pi/6$, $x_2=\pi-\pi/6=5\pi/6$, $x_3=x_1+\pi=\pi/6+\pi$ и $x_4=x_2+\pi=5\pi/6+\pi$, т. е. для $\pi/6<x<5\pi/6$ и $\pi/6+\pi<x<5\pi/6+\pi$ (рис. 55). Общим решением служит множество дуг вида $\pi/6+\pi k<x<5\pi/6+\pi k$. ●

145. 1) $\cos x>-1/2$; 2) $\cos x<-1/2$; 3) $|\cos x|>\sqrt{2}/2$.

○ 1) Перепишем данное неравенство так: $-1/2<\cos x\leqslant 1$. Неравенству $\cos x>-1/2$ удовлетворяют дуги из промежутка $-2\pi/3<x<2\pi/3$ (см. рис. 51). Общим решением служит множество дуг вида $-2\pi/3+2\pi k<x<2\pi/3+2\pi k$.

2) Учитывая свойство ограниченности косинуса, неравенство можно переписать так: $-1\leqslant\cos x<-1/2$. Имеем: $\breve{AM}_1=\pi-\pi/3=2\pi/3$, $\breve{AM}_2=$

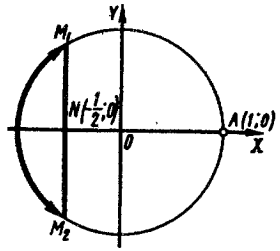


Рис. 56

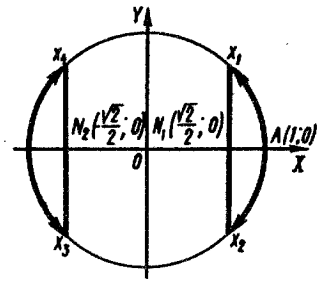


Рис. 57

$=\pi+\pi/3=4\pi/3$ (рис. 56). Неравенству $\cos x>-1/2$ удовлетворяют дуги из промежутка $]2\pi/3,\ 4\pi/3[$. В силу периодичности косинуса общим решением служит миожество дуг вида $2\pi/3+2\pi k<x<4\pi/3+2\pi k$.

3) Это неравенство выполняется для всех дуг $x_2<x<x_1$ и $x_4<x<x_3$, где $x_1=\pi/4$, $x_2=-\pi/4$, $x_3=x_1+\pi=\pi/4+\pi$ и $x_4=x_2-\pi=-\pi/4-\pi$, т. е. для $-\pi/4<x<\pi/4$ и $-\pi/4-\pi<x<\pi/4+\pi$. Общим решением неравенства служит множество дуг вида $-\pi/4+\pi k<x<\pi/4+\pi k$ (рис. 57). ●

146. 1) $\operatorname{tg}x>\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}x>1$.

○ 1) Учитывая свойство неограниченности тангенса, имеем $\sqrt{3}<\operatorname{tg}x<+\infty$. Неравенству $\operatorname{tg}x>\sqrt{3}$ удовлетворяют дуги из промежутка $\pi/3<x<\pi/2$. В силу периодичности тангенса общим решением служит множество дуг вида $\pi/3+\pi k<x<\pi/2+\pi k$.

2) Учитывая свойство неограниченности котангенса, имеем $1<\operatorname{ctg}x<+\infty$. Неравенству $\operatorname{ctg}x>1$ удовлетворяют дуги из промежутка $0<x<\pi/4$ (рис. 58). Общим решением служит множество дуг вида $\pi k<x<\pi/4+\pi k$. ●

147. 1) $\sin(x/2)>1/2$; 2) $\operatorname{tg}2x<-1$.

○ 1) $\pi/6+2\pi k<x/2<5\pi/6+2\pi k$, $\pi/3+4\pi k<x<5\pi/3+4\pi k$.
2) $-\pi/2+\pi k<2x<-\pi/4+\pi k$, $-\pi/4+\pi k/2<x<\pi/8+\pi k/2$.

Решите неравенства:

148. 1) $\sin x<0$; 2) $\sin x>0$; 3) $\sin x<1$; 4) $\sin x<-1/2$; 5) $\sin x>-1/2$; 6) $\sin x>-\sqrt{3}/2$; 7) $|\sin x|<1/2$; 8) $\sin x>1/2$.

149. 1) $\cos x<0$; 2) $\cos x>0$; 3) $\cos x>-1$; 4) $\cos x<1$; 5) $\cos x<1/2$; 6) $\cos x>1/2$; 7) $|\cos x|<1/2$.

150. 1) $\operatorname{tg}x<-\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg}x>-\sqrt{3}$; 3) $|\operatorname{tg}x|<\sqrt{3}$.

151. 1) $\operatorname{ctg}x<-1$; 2) $\operatorname{ctg}x>-1$; 3) $\operatorname{ctg}x>\sqrt{3}$; 4) $|\operatorname{ctg}x|<1$.

152. 1) $\sin 2x<-1/2$; 2) $\cos(x/2)>-1/2$; 3) $\operatorname{ctg}(x/3)>1$; 4) $\operatorname{tg}3x>-1$; 5) $\sin x>-1$; 6) $\sin x<-\sqrt{2}/2$; 7) $\sin x>-\sqrt{2}/2$; 8) $\cos x<-\sqrt{3}/2$; 9) $\operatorname{tg}x<\sqrt{3}/3$; 10) $\operatorname{ctg}x<1$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Решите неравенство и уравнения:
1) $\sin(x/2)<0$;
2) $\cos(x/2)=0$;
3) $\sin 3x=0{,}5$;
4) $2\cos x+\operatorname{tg}x-2\operatorname{tg}x\cos x-1=0$;
5) $2\sin^2 x-3\cos^2 x+\sin x\cos x=0$.

II вариант

Решите неравенство и уравнения:
1) $\operatorname{ctg}x>-\sqrt{3}$;
2) $3\sin(x/2+\pi/6)=3/2$;
3) $\cos 2x\operatorname{tg}x=0$;
4) $4\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x-3=0$;
5) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$.

§ 11. СВОЙСТВО ПОЛУПЕРИОДА СИНУСА И КОСИНУСА

Функции синус и косинус при увеличении или уменьшеиии аргумента иа π изменяются только по знаку:

$$\sin\alpha=-\sin(\alpha\pm\pi); \qquad (9.30)$$
$$\cos\alpha=-\cos(\alpha\pm\pi). \qquad (9.31)$$

Если к аргументу прибавить π, умноженное на любое нечетное число, то получатся формулы

$$\sin\alpha=-\sin[\alpha+\pi(2k+1)], \qquad (9.32)$$
$$\cos\alpha=-\cos[\alpha+\pi(2k+1)], \qquad (9.33)$$

т. е. функции синус и косинус при изменении аргумента на $\pi(2k+1)$ изменяются только по знаку.

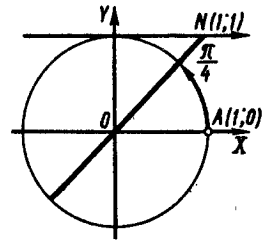


Рис. 58

153. Вычислить: 1) $\sin 150°$; 2) $\sin(-120°)$; 3) $\cos 225°$; 4) $\cos(-240°)$; 5) $\sin 570°$; 6) $\sin(-585°)$; 7) $\cos 600°$.

○ В примерах 1)—4) используем формулы (9.30) и (9.31), а также свойства четности и нечетности тригонометрических функций:

1) $\sin 150°=-\sin(150°-180°)=-\sin(-30°)=\sin 30°=1/2$;
2) $\sin(-120°)=-\sin(-120°+180°)=-\sin 60°=-\sqrt{3}/2$;
3) $\cos 225°=-\cos(225°-180°)=-\cos 45°=-\sqrt{2}/2$;
4) $\cos(-240°)=-\cos(-240°+180°)=-\cos(-60°)=-\cos 60°=-1/2$.

В примерах 5)—7) применяем формулы (9.32) и (9.33):

5) $\sin 570°=-\sin(570°-3\cdot 180°)=-\sin 30°=-1/2$;
6) $\sin(-585°)=-\sin(-585°+3\cdot 180°)=-\sin(-45°)=\sin 45°=\sqrt{2}/2$;
7) $\cos 600°=-\cos(600°-3\cdot 180°)=-\cos 60°=-1/2$. ●

154. Вычислить: 1) $\sin(-7\pi/6)$; 2) $\cos(-2\pi/3)$; 3) $\sin 7\frac{1}{3}\pi$.

○ 1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi+\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

2) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

3) $\sin 7\frac{1}{3}\pi=-\sin\left(7\frac{1}{3}\pi-7\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ●

Вычислите:

155. 1) $\sin(-225°)$; 2) $\cos(-150°)$; 3) $\cos 135°$; 4) $\sin 135°$; 5) $\sin 210°$; 6) $\cos 570°$.

156. 1) $\sin(2\pi/3)$; 2) $\cos(-3\pi/4)$; 3) $\sin(5\pi/4)$; 4) $\sin(-5\pi/4)$; 5) $\sin(31\pi/6)$; 6) $\cos(5\pi/4)$.

157. 1) $\sin(-2{,}76)$; 2) $\cos(-3{,}87)$; 3) $\cos 4{,}33$; 4) $\sin 4{,}26$.

§ 12. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции углов $\pi/2\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $3\pi/2\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через тригонометрические функции угла α (табл. VI).

При применении формул приведения рекомендуется пользоваться следующими правилами:

1. Если α откладывается от оси OX, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента — α, $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$, не изменяется. Если же α откладывается от оси OY, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $\pi/2\pm\alpha$, $3\pi/2\pm\alpha$, заменяется на сходное (синус — на косинус, тангенс — на котангенс, и наоборот).

2. Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части в предположении, что $0<\alpha<\pi/2$.

158. Составить формулу приведения для $\operatorname{tg}(3\pi/2+\alpha)$.

○ Так как α откладывается от оси OY, то тангенс следует заменить на котангенс. Формула верна при всех допустимых значениях аргумента α, следовательно, она верна и для $0<\alpha<\pi/2$; но в этом случае дуга $3\pi/2+\alpha$ оканчивается в IV четверти, в которой тангенс отрицателен. Значит, $\operatorname{tg}(3\pi/2+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$. ●

Таблица VI

	Функция / Аргумент	sin	cos	tg	ctg
1	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
2	$\pi/2-\alpha\,(90°-\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
3	$\pi/2+\alpha\,(90°+\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
4	$\pi-\alpha\,(180°-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
5	$\pi+\alpha\,(180°+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
6	$3\pi/2-\alpha\,(270°-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
7	$3\pi/2+\alpha\,(270°+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
8	$2\pi-\alpha\,(360°-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
9	$2\pi+\alpha\,(360°+\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Вычислить:

159. 1) $\sin 135°$; 2) $\operatorname{ctg}150°$; 3) $\cos 70°$; 4) $\cos 240°$; 5) $\sin 310°$; 6) $\operatorname{tg}320°$.

○ 1) $\sin 135°=\sin(90°+45°)=\cos 45°=\sqrt{2}/2$;
2) $\operatorname{ctg}150°=\operatorname{ctg}(90°+60°)=-\operatorname{tg}60°=-\sqrt{3}$;
3) $\cos 70°=\cos(90°-20°)=\sin 20°=0{,}3420$;
4) $\cos 240°=\cos(270°-30°)=-\sin 30°=-1/2$;
5) $\sin 310°=\sin(270°+40°)=-\cos 40°=-0{,}7660$;
6) $\operatorname{tg}320°=\operatorname{tg}(270°+50°)=-\operatorname{ctg}50°=-0{,}8391$. ●

160. 1) $\sin 225°$; 2) $\cos 150°$; 3) $\operatorname{tg}210°$; 4) $\sin 330°$; 5) $\operatorname{tg}315°$; 6) $\cos 240°$; 7) $\sin 200°$; 8) $\operatorname{ctg}140°$.

○ 1) $\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\sqrt{2}/2$;
2) $\cos 150°=\cos(180°-30°)=-\cos 30°=-\sqrt{3}/2$;
3) $\operatorname{tg}210°=\operatorname{tg}(180°+30°)=\operatorname{tg}30°=\sqrt{3}/3$;
4) $\sin 330°=\sin(360°-30°)=-\sin 30°=-1/2$;
5) $\operatorname{tg}315°=\operatorname{tg}(360°-45°)=-\operatorname{tg}45°=-1$;
6) $\cos 240°=\cos(180°+60°)=-\cos 60°=-1/2$;
7) $\sin 200°=\sin(180°+20°)=-\sin 20°=-0{,}3420$;
8) $\operatorname{ctg}140°=\operatorname{ctg}(180°-40°)=-\operatorname{ctg}40°=-1{,}1918$. ●

161. 1) $\sin 2{,}15$; 2) $\operatorname{tg}4{,}85$.

○ 1) $\sin 2{,}15=\sin(3{,}14-0{,}99)=\sin 0{,}99=\sin 57°=0{,}84$;
2) $\operatorname{tg}4{,}85=\operatorname{tg}(4{,}85-3{,}14)=\operatorname{tg}1{,}71=\operatorname{tg}(1{,}57+0{,}14)=-\operatorname{ctg}0{,}14=$
$=-\operatorname{ctg}8°=-7{,}1$. ●

Вычислите:

162. 1) $\cos 150°$; 2) $\operatorname{tg}135°$; 3) $\sin 120°$; 4) $\operatorname{ctg}130°$; 5) $\cos 210°$; 6) $\sin 260°$; 7) $\operatorname{tg}220°$; 8) $\operatorname{ctg}200°$; 9) $\sin 210°$; 10) $\sin 350°$; 11) $\cos 280°$; 12) $\operatorname{tg}340°$; 13) $\operatorname{ctg}325°$; 14) $\sin 345°$; 15) $\cos 295°$; 16) $\operatorname{tg}335°$.

163. 1) $\cos 225°$; 2) $\sin 150°$; 3) $\operatorname{ctg}210°$; 4) $\operatorname{tg}225°$; 5) $\cos 315°$; 6) $\operatorname{tg}120°$; 7) $\operatorname{ctg}150°$; 8) $\sin 220°$; 9) $\cos 230°$; 10) $\operatorname{tg}250°$; 11) $\sin 315°$; 12) $\cos 340°$.

164. 1) $\sin 3{,}52$; 2) $\cos 3{,}68$; 3) $\operatorname{ctg}5{,}11$.

§ 13. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

165. Вычислите:

1) $\sin 9135°+\cos(-585°)+\operatorname{tg}1395°+\operatorname{ctg}(-630°)$;
2) $\sin(-810)+\cos(-900°)+\operatorname{tg}(-395°)\operatorname{ctg}575°$;
3) $\sin(-2383°)-\sin(-2023°)+\cos(-485°)-\cos(-125°)$;
4) $3\operatorname{tg}930°+\sin 1200°-\cos 1410°$;
5) $\cos 510°-\sin 480°+\cos 840°+\sin 1230°$;
6) $\sin(-13\pi/6)+\cos(17\pi/3)+\operatorname{tg}(22\pi/3)-\operatorname{ctg}(37\pi/4)$;
7) $\sin(-47\pi/3)-\operatorname{tg}(21\pi/4)+\operatorname{tg}(-23\pi/4)-\operatorname{ctg}(19\pi/6)$.

166. Упростите:

1) $\sin(\alpha-3\pi/2)\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)$;
2) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi/2)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\cos(\alpha-3\pi/2)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

167. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos^2(3\pi/2-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-3\pi/2)}=1$;
2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos(3\pi/2-\alpha)}=\sin\alpha$;

3) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-3\pi/2)}{\operatorname{ctg}(\alpha+\pi/2)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi/2)}{1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}=-1.$

168. Решите уравнения:

1) $\cos^2(\pi-x)+8\cos(\pi+x)+7=0;$
2) $2\cos^2(x-\pi)+3\sin(\pi+x)=0;$
3) $2\sin^2 x+5\sin(3\pi/2-x)-2=0;$
4) $5\cos^2(x-3\pi/2)-2\cos(x-\pi/2)=0;$
5) $3\sin^2(x-3\pi/2)-\cos(x+4\pi)=0;$
6) $5\operatorname{tg}^2(x-\pi)+12\operatorname{tg}(\pi-x)=0;$
7) $2\operatorname{tg}^2(3\pi/2+x)+3\operatorname{tg}(\pi/2+x)=0.$

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Упростите $\cos(3\pi/2+\alpha)\operatorname{tg}(\pi/2-\alpha)-\sin(\pi/2-\alpha)+\operatorname{ctg}(3\pi/2-\alpha)-\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha).$

2) Вычислите $\operatorname{ctg}225°-\operatorname{ctg}675°-\cos495°++\cos765°.$

3) Докажите тождество $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi/2+\alpha)}\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha.$

4) Решите уравнение $\sin^2(x-\pi)+6\cos(x-\pi/2)\times\cos(x+\pi)+8\sin^2(x-3\pi/2)=0.$

5) Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2(x-\pi/2)-\operatorname{ctg}(x-3\pi/2)-2=0.$

II вариант

1) Упростите $\sin(\alpha-2\pi)\times\cos(3\pi/2-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\times\operatorname{tg}(3\pi/2+\alpha)+\cos^2(\pi/2-\alpha).$

2) Вычислите $\dfrac{\cos^2336°-\cos^2156°+\operatorname{tg}100°\operatorname{tg}350°}{\operatorname{tg}^272°+\operatorname{ctg}^2162°}-\dfrac{\operatorname{tg}^218°}{2}.$

3) Докажнте тождество $\dfrac{\sin^2(3\pi/2+\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-3\pi/2)}=1.$

4) Решите уравнение $\sin^2(x+\pi)-10\sin(x+\pi)\times\cos(x-\pi)+21\sin^2(3\pi/2+x)=0.$

5) Решите уравнеиие $\operatorname{ctg}^2(x-3\pi/2)-4\operatorname{tg}(x-\pi)++3=0.$

§ 14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ ДВУХ АРГУМЕНТОВ (ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ)

Для нахождения тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов применяются следующие формулы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \tag{9.34}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \tag{9.35}$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \tag{9.36}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \tag{9.37}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq1; \tag{9.38}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq-1; \tag{9.39}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi k,\ \alpha\neq-\beta+\pi k; \tag{9.40}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi k,\ \alpha\neq\beta+\pi k. \tag{9.41}$$

Вычислить:

169. 1) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=3/5$, $\cos\beta=-5/13$, $\pi/2<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<3\pi/2$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-4/5$, $\sin\beta=-24/25$, $\pi<\alpha<3\pi/2$, $3\pi/2<\beta<2\pi$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-24/7$, $\operatorname{tg}\beta=15/8$, $\pi/2<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<3\pi/2$.

○ 1) Найдем $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ при условии $\pi/2<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<3\pi/2$: $\cos\alpha=-\sqrt{1-(3/5)^2}=-4/5$, $\sin\beta=-\sqrt{1-(-5/13)^2}=-12/13$. По формуле (9.34) получим

$$\sin(\alpha+\beta)=(3/5)\cdot(-5/13)+(-4/5)\cdot(-12/13)=33/65.$$

2) Находим $\sin\alpha=-\sqrt{1-(4/5)^2}=-3/5$; $\cos\beta=\sqrt{1-(-24/25)^2}=7/25$. По формуле (9.35) получим

$$\sin(\alpha-\beta)=(-3/5)\cdot(7/25)-(-4/5)\cdot(-24/25)=-117/125.$$

3) Из формулы $1+\operatorname{tg}^2\alpha=1/\cos^2\alpha$ имеем $\cos\alpha=\pm1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Учитываем, что $\pi/2<\alpha<\pi$, находим $\cos\alpha=-1/\sqrt{1+(-24/7)^2}=-7/25$, $\sin\alpha=\sqrt{1-(-7/25)^2}=24/25$. Аналогично находим $\cos\beta=-8/17$ и $\sin\beta=-15/17$. По формулам (9.36) получаем

$$\cos(\alpha+\beta)=(-7/25)\cdot(-8/17)-(24/25)\cdot(-15/17)=416/425.\ \bullet$$

170. 1) $\sin(\arcsin(3/5)+\arcsin(4/5))$; 2) $\cos(\arccos(3/5)+\arcsin(8/17))$.

○ 1) Обозначив $\arcsin(3/5)=\alpha$ и $\arcsin(4/5)=\beta$, имеем $\sin\alpha=3/5$, $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ и $\sin\beta=4/5$, $-\pi/2\leqslant\beta\leqslant\pi/2$. Находим $\cos\alpha=\sqrt{1-(3/5)^2}=4/5$ и $\cos\beta=\sqrt{1-(4/5)^2}=3/5$. Следовательно,

$$\sin(\arcsin(3/5)+\arcsin(4/5))=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$$
$$=(3/5)\cdot(3/5)+(4/5)\cdot(4/5)=1.$$

2) Обозначив $\arccos(3/5)=\alpha$ и $\arcsin(8/17)=\beta$, имеем $\cos\alpha=3/5$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ и $\sin\beta=8/17$, $-\pi/2\leqslant\beta\leqslant\pi/2$. Находим $\sin\alpha=\sqrt{1-(3/5)^2}=4/5$ и $\cos\beta=\sqrt{1-(8/17)^2}=15/17$. Таким образом,

$$\cos(\arccos(3/5)+\arcsin(8/17))=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-\sin\alpha\sin\beta=(3/5)\cdot(15/17)-(4/5)\cdot(8/17)=13/85.\ \bullet$$

171. 1) $\sin20°\cos40°+\cos20°\sin40°$; 2) $\cos47°\cos17°++\sin47°\sin17°$.

○ 1) $\sin20°\cos40°+\cos20°\sin40°=\sin(20°+40°)=\sin60°=\sqrt{3}/2$;

2) $\cos47°\cos17°+\sin47°\sin17°=\cos(47°-17°)=\cos30°=\sqrt{3}/2.\ \bullet$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad (9.43а)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha. \qquad (9.43б)$$

192. Вычислить: 1) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 4/5$ и $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$; 2) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}2$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

○ 1) Находим $\sin\alpha = -\sqrt{1-(4/5)^2} = -3/5$. По формуле (9.42) получим

$$\sin 2\alpha = 2\cdot(-3/5)\cdot(4/5) = -24/25.$$

2) По формуле (9.43а) находим $\cos 2\alpha = 2(-0{,}2)^2 - 1 = -0{,}92$.

3) По формуле (9.44) находим $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\cdot(3/4)}{1-(3/4)^2} = 3\dfrac{3}{7}$. ●

193. Выразить: 1) $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$.

○ 1) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

2) $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. ●

Вычислите:

194. *$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если: 1) $\sin\alpha = -3/5$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$;* 2) $\cos\alpha = 5/13$ и $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -3/4$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$.

195. 1) $\operatorname{ctg} z$, если $\operatorname{tg}(z/2) = 5/3$; 2) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin(3\alpha/2) = -5/13$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$; 3) $\cos 4x$ и $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{tg} x = 1/5$ и $\pi < x < 3\pi/2$.

196. Найдите числовые значения выражений: 1) $\sin 2\alpha/(2\cos\alpha)$, если $\cos\alpha = -4/5$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$; 2) $\cos 2\alpha/\sin\alpha$, если $\sin\alpha = -3/5$ и $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

197. Выразите: 1) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; 2) $\cos 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$; 5) $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$.

198. Упростите: 1) $1 - 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{4x}{3}\right)$; 2) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3x}{2}\right) - 1$; 3) $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5x}{2}\right)$; 4) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) - 1$.

199. Докажите тождества:

1) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$; 2) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$; 4) $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 0{,}5\sin^2 2\alpha$;

6) $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - 0{,}75\sin^2 2\alpha$;

7) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; 8) $\dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

9) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; 10) $\dfrac{2 - \sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

11) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2$; 12) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

13) $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$.

200. Решите уравнения:

1) $\sin 2x - \sin x = 0$; 2) $\sin x \cdot \cos x = 1/2$; 3) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$.

§ 17. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Формулы для тригонометрических функций половинного аргумента позволяют выразить функции аргумента $\alpha/2$ через функции аргумента α:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad (9.46)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad (9.47)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \alpha \neq \pi(2k+1); \qquad (9.48)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \quad \alpha \neq 2\pi k; \qquad (9.49)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2k+1); \qquad (9.50)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \begin{array}{l}\text{в левой части } \alpha \neq \pi(2k+1),\\ \text{в правой части } \alpha \neq \pi k;\end{array} \qquad (9.51)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \begin{array}{l}\text{в левой части } \alpha \neq 2\pi k,\\ \text{в правой части } \alpha \neq \pi k;\end{array} \qquad (9.52)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi k. \qquad (9.53)$$

В формулах (9.46) и (9.47) знак перед корнем определяется по знаку четверти, которой принадлежит дуга $\alpha/2$.

В формулах (9.48) и (9.49) знак перед корнем берется так, чтобы он совпадал со знаком $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, т. е. ставится плюс, если $\alpha/2$ — дуга I или III четверти, и минус, если $\alpha/2$ — дуга II или IV четверти.

Вместо формул (9.48) и (9.49) можно применять формулы (9.50) – (9.53), дающие рациональное выражение $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ через тригонометрические функции аргумента α.

В равенствах (9.51) и (9.52) левая и правая части имеют различные области определения. В равенстве (9.51) область определения левой части $\alpha \neq \pi(2k+1)$, а область определения правой части $\alpha \neq \pi k$. В равенстве (9.52) левая часть определена при $\alpha \neq 2\pi k$, а правая — при $\alpha \neq \pi k$. Применяя формулы (9.51) и (9.52) при решении тригонометрических уравнений, надо учитывать несовпадение областей определения этих формул.

Все тригонометрические функции любого аргумента можно выразить через тангенс полоаины этого аргумента по формулам

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi(2k+1); \qquad (9.54)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)},\quad \alpha\neq\pi(2k+1); \tag{9.55}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)},\quad \alpha\neq\pi(2k+1),\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k; \tag{9.56}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)},\quad \alpha\neq\pi k. \tag{9.57}$$

201. Дано: $\cos\alpha=1/2$ и $\pi/2<\alpha<\pi$. Вычислить $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

○ 1) По формулам (9.46) и (9.47) находим

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-1/2}{2}}=\frac{1}{2};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+1/2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(перед корнем в обоих случаях ставим плюс, так как из условия следует, что $\pi/4<\alpha/2<\pi/2$). Далее, имеем $\operatorname{tg}(\alpha/2)=(1/2):(\sqrt{3}/2)=1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$. ●

202. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если: 1) $\sin\alpha=4/5$ и $\pi/2<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-4/5$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

○ 1) Находим $\cos\alpha=-\sqrt{1-(4/5)^2}=-3/5$. По формуле (9.50) получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}:\left(1-\frac{3}{5}\right)=2$.

2) Находим $\sin\alpha=-\sqrt{1-(-4/5)^2}=-3/5$. По формуле (9.50) получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\left(-\frac{3}{5}\right):\left(1-\frac{4}{5}\right)=-3$.

3) Вычисляем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}}=-\frac{1}{3}.$$

По формуле (9.50) получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}:\left(1-\frac{1}{3}\right)=-\sqrt{2}$. ●

203. Упростить: 1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

○ 1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\sin^2(\alpha/2)}=\dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}=\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$. ●

204. Доказать тождества:
1) $1+\cos\alpha=2\cos^2(\alpha/2)$; 2) $1-\cos\alpha=2\sin^2(\alpha/2)$.

○ 1) Заменив в формуле $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ аргумент α на $\alpha/2$, получим

$$\cos\alpha=2\cos^2(\alpha/2)-1,\ \text{или}\ 1+\cos\alpha=2\cos^2(\alpha/2).$$

2) Аналогично, заменив в формуле $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ аргумент α на $\alpha/2$, получим

$$\cos\alpha=1-2\sin^2(\alpha/2),\ \text{или}\ 1-\cos\alpha=2\sin^2(\alpha/2).$$ ●

205. Вычислить: 1) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=2$; 2) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=3$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=-\sqrt{2}$; 5) $\dfrac{5\cos\alpha-3}{10\sin\alpha+1}$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=3$.

○ Используя формулы (9.54)—(9.57), получим:

1) $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{2\cdot 2}{1+2^2}=\dfrac{4}{5}$;

2) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{1-3^2}{1+3^2}=-\dfrac{4}{5}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-(-\sqrt{3})^2}=-\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}=\dfrac{1-(-\sqrt{2})^2}{2\cdot(-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

5) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{1-9}{1+9}=-\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\dfrac{6}{1+9}=\dfrac{3}{5}$;

$\dfrac{5\cos\alpha-3}{10\sin\alpha+1}=\dfrac{5\cdot(-4/5)-3}{10\cdot(3/5)+1}=-1$. ●

206. Решить уравнения: 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-\cos(\pi+x)+1=0$; 2) $\sin x+\cos x=1$; 3) $3\sin x+4\cos x=4$.

○ 1) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-\cos(\pi+x)+1=0\right)\Leftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}+\cos x+1=0\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0\right)\Leftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}\left(1+2\cos\frac{x}{2}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ 1+2\cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ \frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi(2k+1),\\ x=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi(2k+1)$; $\frac{4\pi}{3}(3k\pm 1)$.

2) $(\sin x+\cos x=1)\Leftrightarrow(\sin x=1-\cos x)\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0,\\ \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi k,\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k.\end{array}\right.$$ *Ответ:* $2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k$.

3) Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $z=\operatorname{tg}(x/2)$; имеем $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$. Тогда

$$\frac{6z}{1+z^2}+\frac{4-4z^2}{1+z^2}=4\Leftrightarrow 4z^2-3z=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=0,\\ z=3/4.\end{array}\right.$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg}(x/2)=0$ и $\operatorname{tg}(x/2)=3/4$, откуда $x/2=\pi k$ и $x/2=\operatorname{arctg}(3/4)+\pi k$. *Ответ:* $2\pi k$; $2\operatorname{arctg}(3/4)+2\pi k$.

Вычислите:

207. $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если: 1) $\cos\alpha=-7/25$ и $\pi/2<\alpha<\pi$; 2) $\sin\alpha=-15/17$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=4/3$ и $0<\alpha<\pi/2$.

208. 1) $\cos(\alpha/2)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-12/5$ и $5\pi/2<\alpha<3\pi$; 2) $\sin(\alpha/2)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=5/12$ и $3\pi<\alpha<7\pi/2$.

209. 1) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2)=1/3$; 2) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2)=1/2$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha/2)=\sqrt{3}/3$; 4) $\frac{5\cos\alpha+4}{10\sin\alpha-1}$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=2$.

210. Решите уравнения: 1) $1-\cos x=\sin(x/2)$; 2) $1+\cos x=\cos(x/2)$; 3) $1+\cos x=\sin x$.

§ 18. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

Вычислите:

211. 1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha=4/5$ и $0<\alpha<\pi/2$; 2) $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если $\cos\alpha=1/2$ и $0<\alpha<\pi/2$; 3) $\sin(\alpha/4)$, $\cos(\alpha/4)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/4)$, если $\sin\alpha=-24/25$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

212. 1) $\frac{\operatorname{tg}(\pi/8)}{1-\operatorname{tg}^2(\pi/8)}$; 2) $\frac{1-\operatorname{tg}^2(\pi/12)}{1+\operatorname{tg}^2(\pi/12)}$; 3) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$.

213. 1) $\sin(2\arcsin(40/41))$; 2) $\cos(2\arccos(2/3))$; 3) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(7/25))$.

Упростите:

214. 1) $1-\cos 40^\circ$; 2) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha(1-\cos 2\alpha)$; 5) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)$; 6) $\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

215. 1) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 2) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

5) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$; 6) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin 2\alpha$.

Докажите тождества:

216. 1) $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

3) $\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}{\sin\alpha-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

217. 1) $\frac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=3$;

4) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; 5) $\operatorname{tg}(\pi/12)+\operatorname{ctg}(\pi/12)=4$;

6) $\cos^3\alpha\cos 3\alpha+\sin^3\alpha\sin 3\alpha=\cos^3 2\alpha$.

218. 1) $\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha)+\operatorname{tg}(\alpha-\pi/4)=2\operatorname{tg}2\alpha$:

2) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

3) $\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)+\cos(\cos\alpha-\cos\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

219. Решите уравнения:

1) $\sin x\cos x=1/4$; 2) $\cos^2 x-\sin^2 x=-1/2$;
3) $\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x=2$; 4) $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(\pi/3+x)\operatorname{tg}(\pi/3-x)=1$.
5) $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x=0$; 6) $1+\cos x=2\cos(x/2)$;
7) $1-\cos x=2\sin(x/2)$; 8) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha=1/2$ и $\pi/2<\alpha<\pi$.

2) Вычислите $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если $\cos\alpha=3/5$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

3) Докажите тождество
$$\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

4) Докажите тождество
$4\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\sin 80^\circ$.

5) Решите уравнение
$\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$.

II вариант

1) Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha=3/5$ и $0<\alpha<\pi/2$.

2) Вычислите $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если $\sin\alpha=\sqrt{3}/2$ и $0<\alpha<\pi/2$.

3) Докажите тождество
$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

4) Докажите тождество
$8\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=1$.

5) Решите уравнение
$1-\cos x=\sin x\sin(x/2)$.

§ 19. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ СУММУ

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \tag{9.58}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]; \tag{9.59}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \tag{9.60}$$

220. Преобразовать в алгебраическую сумму:

1) $\sin 5x\sin 3x$; 2) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}$.

○ 1) По формуле (9.60) получим

$$\sin 5x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x))=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 8x.$$

2) Используя дважды формулу (9.59), получим

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{13x}{12}+\cos\frac{5x}{12}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7x}{12}+\cos\frac{x}{12}\right)\right)=\frac{1}{4}\cos\frac{13x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{5x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{7x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{12}.$$ ●

221. Представить в виде сумм первых степеней следующие тригонометрические функции: 1) $\sin^2 x$; 2) $\cos^2 x$; 3) $\sin^3 x$.

○ 1) $\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x=\frac{1}{2}(\cos 0-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$;

2) $\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(\cos 0+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$;

3) $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin x=\frac{1}{2}\sin x-$

$-\frac{1}{2}\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x+$

$+\frac{1}{4}\sin x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$.

Отсюда получаем формулу для синуса утроенного аргумента: $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$. ●

Преобразуйте в алгебраическую сумму:

222. 1) $\cos 7x\cos 5x$; 2) $\sin 11x\sin x$; 3) $\sin 5x\cos 2x$; 4) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$; 5) $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)$; 6) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.

223. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$; 4) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

224. Представьте в виде сумм первых степеней: 1) $\cos^3 x$; 2) $\sin^4 x$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\sin^5 x$; 5) $\cos^5 x$.

§ 20. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1. Основные формулы. Для преобразования алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение (приведения к виду, удобному для логарифмирования) используются формулы

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{9.61}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{9.62}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{9.63}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}; \tag{9.64}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k; \tag{9.65}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k. \tag{9.66}$$

Часто используются также следующие формулы:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \tag{9.67}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \tag{9.68}$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right); \tag{9.69}$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right). \tag{9.70}$$

2. Условия равенства одноименных тригонометрических функций. Для того чтобы синусы двух аргументов были равны, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(\sin x=\sin y)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=(2k+1)\pi,\\ x-y=2\pi k.\end{array}\right.$$

Для того чтобы косинусы двух аргументов были равны, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(\cos x=\cos y)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=2\pi k,\\ x-y=2\pi k.\end{array}\right.$$

Для того чтобы тангенсы двух аргументов были равны, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pi/2+\pi k,\ y\neq\pi/2+\pi k,\\ x-y=\pi k.\end{cases}$$

Преобразовать в произведение:

225. 1) $\sin 40^\circ+\sin 20^\circ$; 2) $\cos(\pi/5)-\cos(7\pi/10)$; 3) $\operatorname{ctg}(2\pi/7)-\operatorname{ctg}(\pi/7)$; 4) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta$; 5) $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha$.

○ 1) По формуле (9.61) получим

$$\sin 40^\circ+\sin 20^\circ=2\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2}=$$

$$=2\sin 30^\circ\cos 10^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^\circ=\cos 10^\circ.$$

2) По формуле (9.64) получим

$$\cos(\pi/5)-\cos(7\pi/10)=2\sin(9\pi/20)\sin(\pi/4)=\sqrt{2}\sin(9\pi/20).$$

3) Выразив котангенсы через тангенсы, используем формулу (9.66):

$$\operatorname{ctg}(2\pi/7)-\operatorname{ctg}(\pi/7)=\operatorname{tg}(\pi/2-2\pi/7)-\operatorname{tg}(\pi/2-\pi/7)=$$

$$=\operatorname{tg}(3\pi/14)-\operatorname{tg}(5\pi/14)=-\frac{\sin(\pi/7)}{\cos(3\pi/14)\cos(5\pi/14)}.$$

4) Используя формулы (9.67), (9.68) и (9.63), получим

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)-\left(\frac{1-\cos 2\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{2(\alpha-\beta)}{2}=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

5) $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha=$
$=2\sin\alpha(\cos\alpha\cos 3\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha)=2\sin\alpha\cos 4\alpha$. ●

226. 1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$,
3) $\sin 20^\circ+\sin 34^\circ+\sin 24^\circ+\sin 30^\circ$.

○ 1) Преобразуя выражение $1+\cos\alpha$ в произведение по формуле (9.67) и используя формулу удвоенного аргумента для $\sin\alpha$, получим

$$1+\cos\alpha+\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Преобразуем в произведение сумму двух первых слагаемых (можно любых двух слагаемых), а третье слагаемое преобразуем по формуле удвоенного аргумента:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=2\sin\frac{3x}{2}\cdot 2\cos x\cos\frac{x}{2}=4\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}.$$

3) Заметив, что $20^\circ+34^\circ=24^\circ+30^\circ$, выполним последовательно преобразования по формулам (9.61) и (9.63):

$$\sin 20^\circ+\sin 34^\circ+\sin 24^\circ+\sin 30^\circ=2\sin 27^\circ\cos 7^\circ+$$
$$+2\sin 27^\circ\cos 3^\circ=2\sin 27^\circ(\cos 7^\circ+\cos 3^\circ)=4\sin 27^\circ\cos 5^\circ\cos 2^\circ.$$ ●

227. Решить уравнения: 1) $\sin 4x=\sin 3x$; 2) $\cos 5x=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\cos x=\sin 3x$; 4) $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg} x$.

○ Воспользуемся условиями равенства одноименных тригонометрических функций:

1) $(\sin 4x=\sin 3x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+3x=(2k+1)\pi,\\ 4x-3x=2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x=(2k+1)\pi,\\ x=2\pi k.\end{array}\right.$ *Ответ:* $(2k+1)\frac{\pi}{7}$; $2k\pi$.

2) $\left(\cos 5x=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x+x-\frac{\pi}{4}=2\pi k,\\ 5x-x+\frac{\pi}{4}=2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\\ 4x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k.\end{array}\right.$ *Ответ:* $\frac{\pi}{24}(8k+1)$; $\frac{\pi}{16}(8k-1)$.

3) $(\cos x=\sin 3x)\Leftrightarrow\left(\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\pi/2-3x=2\pi k,\\ x-\pi/2+3x=2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x=2\pi k-\pi/2,\\ 4x=2\pi k+\pi/2.\end{array}\right.$ *Ответ:* $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $\frac{\pi}{8}(4k+1)$.

4) $(5x-x=\pi k)\Leftrightarrow(4x=\pi k)\Leftrightarrow(x=\pi k/4)$.

Из множества решений надо исключить те значения аргумента x, при которых левая и правая части уравнения не существуют, т. е. значения вида $\pi/2(2k+1)$. В множестве $x=\pi k/4=(\pi/2)\cdot(k/2)$ такие значения получаются, если $k/2$ — нечетное число: $k/2=2n+1$, т. е. $k=4n+2$. Следовательно, уравнению удовлетворяет множество корней вида $\pi k/4$ при $k\neq 4n+2$. ●

Преобразуйте в произведение:

228. 1) $\cos(\pi/3)-\cos(2\pi/3)$; 2) $\cos\beta-\sin\alpha$; 3) $2\cos^2\alpha-\sin 2\alpha$; 4) $\cos 20^\circ+\sin 50^\circ$; 5) $\operatorname{tg}25^\circ-\operatorname{ctg}75^\circ$; 6) $\sin^2 5\alpha-\sin^2 3\alpha$.

229. 1) $\sin\alpha\cos\beta+2\sin^2(\alpha/2)\sin\beta$; 2) $\sin 10^\circ+2\sin 5^\circ\cos 15^\circ+\cos 50^\circ$.

230. 1) $\sin 16^\circ+\sin 26^\circ-\sin 42^\circ$; 2) $\sin A+\sin B+\sin(A+B)/2$; 3) $\sin(\alpha/2)-\sin(3\alpha/2)+\cos\alpha$; 4) $\sin A+\cos B+\cos C$, где $A+B+C=\pi$; 5) $\sin 25^\circ+\sin 37^\circ+\sin 27^\circ+\sin 35^\circ$.

231. Покажите, что для углов A, B и C всякого треугольника имеют место соотношения:

1) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

2) $1-\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

3) $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$;

4) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$.

232. Докажите тождества:

1 $1+\sin\alpha+\cos\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\sin\alpha+\cos\alpha-1=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=2\cos(3\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

233. Решите уравнения:

1) $\sin 5x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$; 4) $\cos(x-70^\circ)-\sin(x+70^\circ)=0$:

§ 21. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Данное число a можно рассматривать как значение тригонометрической функции от некоторого аргумента, называемого *вспомогательным углом*, так как при любом значении a имеет место равенство $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$ и при $|a|\leqslant 1$ — равенства $\sin(\arcsin a)=a$ и $\cos(\arccos a)=a$. Это позволяет представлять алгебраическую сумму любых двух чисел как алгебраическую сумму значений тригонометрических функций, а следовательно, применять

формулы преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение.

234. Преобразовать в произведение с помощью введения вспомогательного аргумента: 1) $\sqrt{2}\sin\alpha+1$; 2) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$; 3) $4\cos^2\alpha-1$; 4) $a+b$; 5) a^2+b^2.

○ 1) $\sqrt{2}\sin\alpha+1=\sqrt{2}\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$;

2) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$;

3) $4\cos^2\alpha-1=4\left(\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\right)=4\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)=$

$=4\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\times$

$\times\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

4) $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1+\operatorname{tg}\varphi)=a\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi\right)=\frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi}=$

$=\frac{a\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

5) $a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. ●

235. Преобразовать в произведение $4\sin\alpha+3\cos\alpha$.

○ Представим данное выражение следующим образом:

$$4\sin\alpha+3\cos\alpha=\sqrt{4^2+3^2}\left(\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\sin\alpha+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cos\alpha\right)=$$

$$=5\left((4/5)\sin\alpha+(3/5)\cos\alpha\right).$$

Так как $(4/5)^2+(3/5)^2=1$, то можно найти такой угол φ, что $4/5=\cos\varphi$, $3/5=\sin\varphi$. Тогда

$$4\sin\alpha+3\cos\alpha=5(\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)=5\sin(\alpha+\varphi),$$

где $\operatorname{tg}\varphi=\sin\varphi/\cos\varphi=3/4$. Итак,

$$4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\sin(\alpha+\operatorname{arctg}(3/4)).$$ ●

236. Методом введения вспомогательного аргумента решить тригонометрическое уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$.

○ Преобразуем в произведение левую часть данного уравнения:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Таким образом,

$$\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\right)\Leftrightarrow\left(x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2\pi k.\ \bullet$$

Преобразуйте в произведение с помощью введения вспомогательного аргумента:

237. 1) $0{,}5+\cos\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha$; 3) $1-2\sin\alpha$; 4) $1+2\sin\alpha$; 5) $1+\operatorname{tg}\alpha$; 6) $1-\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha$; 8) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; 9) $\sin^2\alpha-0{,}75$; 10) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$; 11) $(a-b)/(a+b)$.

238. 1) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$; 2) $4\sin\alpha-3\cos\alpha$; 3) $2\sin\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha$.

239. Решите уравнения: 1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$; 2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$; 3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$.

§ 22. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

240. Преобразуйте в суммы тригонометрических функций первой степени следующие произведения:

1) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$; 2) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{5\alpha}{2}$;

3) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2}$.

241. Упростите путем преобразования в суммы следующие произведения: 1) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$; 2) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ$.

242. Преобразуйте в произведение:

1) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha$; 2) $\sin 3\alpha+\sin 2\alpha+2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

243. Решите уравнения:

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$; 2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$.

Докажите тождества:

244. 1) $\sin^2\alpha\cos\alpha=(1/4)(\cos\alpha-\cos 3\alpha)$;
2) $\sin^3\alpha\cos\alpha=(1/8)(2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha)$;
3) $\sin^2\alpha\cos^3\alpha=(1/16)(2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)$,
4) $\sin^3\alpha\cos^3\alpha=(1/32)(3\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)$.

245. 1) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha=\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha$;
2) $4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2(\alpha+\beta)-1$;
3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos 2\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\alpha$.

246. 1) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 80^\circ-\sin 70^\circ}{\sin 29^\circ-\sin 19^\circ}=\dfrac{\cos 20^\circ-\cos 50^\circ}{\cos 31^\circ+\sin 11^\circ}$;

4) $\dfrac{(\cos\alpha+\cos(\alpha/2))^2-(\sin\alpha+\sin(\alpha/2))^2}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}(\alpha/4)$;

5) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}-\dfrac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Упростите
$\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ$.

2) Докажите тождество
$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ=(1/4)\cos 50^\circ\cos 70^\circ$.

3) Докажите тождество
$1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

4) Решите уравнение
$\sin 3x+\sin x=2\sin 2x$.

5) Решите уравнение
$\sin 2x=\cos x-\cos 3x$.

II вариант

1) Упростите
$\cos 65^\circ+\sqrt{3}\sin 5^\circ+\sin 85^\circ$.

2) Докажите тождество
$\cos 10^\circ\sin 20^\circ\cos 70^\circ\sin 80^\circ=\cos^2 10^\circ\sin^2 20^\circ$.

3) Докажите тождество
$1+\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

4) Решите уравнение
$\sin^4 x-\cos^4 x=\sin 2x$.

5) Решите уравнение
$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin 2x$.

§ 23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ $\frac{\sin x}{x}$ ПРИ $x\to 0$

При вычислении пределов тригонометрических функций часто используется предел отношения синуса дуги к самой дуге:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1. \tag{9.71}$$

Вычислить пределы:

247. 1) $\lim\limits_{x\to -\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$; 3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^3 2z}{z^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$.

○ 1) Очевидно, что при $x\to -\pi/2$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на $1+\sin x$, получим

$$\lim_{x\to -\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}=\lim_{x\to -\pi/2}\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to -\pi/2}\frac{1-\sin x}{1-\sin x+\sin^2 x}=\frac{1-\sin(-\pi/2)}{1-\sin(-\pi/2)+\sin^2(-\pi/2)}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

2) Преобразуя заданное выражение и используя соотношение (9.71), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{3\cdot 4x}=\frac{4}{3}\lim_{4x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}.$$

3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^3 2z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sin 2z}{z}\right)^3=8\left(\lim\limits_{2z\to 0}\dfrac{\sin 2z}{2z}\right)^3=8\cdot 1=8.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\sin x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\sin x\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\times$

$\times\lim\limits_{x\to 0}\sin x=1^2\cdot 0=0.$

5) Преобразовав разность косинусов в произведение, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x}=4\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\sin x=4\cdot 1\cdot 0=0.$$ ●

248. 1) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x-\pi/2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$.

○ 1) Введем подстановку $x-\pi/2=y$, тогда $x=\pi/2+y$, если $x\to\pi/2$, то $y\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{\operatorname{ctg} x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(\pi/2+y)}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=-1\cdot 1=-1.$$

2) Полагая $\arcsin 3x=\alpha$, имеем $\sin\alpha=3x$. Произведем преобразования:

$$\frac{\arcsin 3x}{2x}=\frac{3\arcsin 3x}{2\cdot 3x}=\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$ ●

Вычислите пределы:

249. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$.

250. 1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-1}$.

251. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{5\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/4)}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^3 3z}{z^3}$.

252. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^4}$.

253. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x}$.

254. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x}$.

255. 1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi/2-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi/2-x}{\operatorname{ctg} x}$.

256. 1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\arcsin 2z}{7z}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{3x}$.

§ 24. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Формулы дифференцирования

При условии $u=\varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u=x$	Номер формулы
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	(9.72)	$(\sin x)'=\cos x$	(9.72a)
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	(9.73)	$(\cos x)'=-\sin x$	(9.73a)
$(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$	(9.74)	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	(9.74a)
$(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$	(9.75)	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	(9.75a)

Найти производные следующих функций:

257. 1) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; вычислить $f'(\pi/4)$; 2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x}$; вычислить $f'(\pi/3)$.

○ 1) По формулам (7.5) и (9.72а) получим

$$f'(x)=\frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1+\sin x)'(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2};$$

$$f'(\pi/4)=-\frac{2\cos(\pi/4)}{(1+\sin(\pi/4))^2}=-\frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}/2)^2}=8-6\sqrt{2}.$$

2) По формулам (7.5) и (9.74а) получим

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg}x-1)}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x+1)}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$f'(\pi/3)=\frac{1}{\sin^2(\pi/3)}=\frac{4}{3}.\ \bullet$$

258. $y=\sin(2x^2+3)$; 2) $y=\sin^3 mx$.

○ 1) Полагая $2x^2+3=u$, получим $y=\sin u$. По формуле (9.72) находим $y'=\cos u\cdot u'=\cos(2x^2+3)(2x^2+3)'=\cos(2x^2+3)\cdot 4x=4x\cos(2x^2+3)$.

2) Полагая $mx=u$, получим $y=\sin^3 u$. Применяя последовательно формулы (7.10) и (9.72), получим

$$y'=3\sin^2 u(\sin u)'=3\sin^2 u\cos u\cdot u'=3\sin^2 mx\cos mx(mx)'=$$

$$=3\sin^2 mx\cos mx\cdot m=3m\sin^2 mx\cos mx.\ \bullet$$

Найдите производные следующих функций:

259. 1) $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sin x}$; вычислите $f'(\pi/3)$; 2) $y=x^2+\sin x$; 3) $y=x\sin x$.

260. 1) $y=\sin 3x$; 2) $f(x)=\sin(4x-1)$; 3) $s=\sin t^2$; 4) $f(\theta)=\sin(\theta/2)$; вычислите $f'(\pi/2)$.

261. 1) $y=\sin^2 x$; 2) $t=\sin^3 5\varphi^2$; 3) $y=1/\sin x$; 4) $y=1/\sin 3x$.

262. 1) $f(t)=\sqrt{\sin t}$; 2) $y=\sqrt{\sin 2x}$; 3) $y=1/\sqrt{\sin 3x}$.

263. 1) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$; вычислите $f'(\pi/4)$; 2) $f(x)=\dfrac{\cos x+1}{\cos x-1}$; вычислите $f'(\pi/3)$; 3) $y=2\sin x-\cos x+3$; 4) $f(x)=2\sin x-2\cos x$; вычислите $f'(\pi/6)$.

264. 1) $f(t)=\sin t\cos t$; 2) $f(x)=\sin x(1-\cos x)$; 3) $y=x\cos x$; 4) $f(x)=\cos x(1+\sin x)$.

265. 1) $y=\cos x^3$; 2) $y=\cos(1/x^2)$; 3) $y=\cos^3 x$; 4) $y=1/\cos 2x$; 5) $y=1/\cos^2 x$.

266. 1) $y=\sqrt{\cos 2x}$; 2) $y=1/\sqrt{\cos x^2}$.

267. 1) $y=(1-\cos 2x)\sin 2x$; 2) $y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$; 3) $f(x)=\cos^3 x\sin x$; вычислите $f'(\pi/3)$.

268. 1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$; 2) $y=\operatorname{tg}x-x$; 3) $f(u)=u^2\operatorname{tg}u$; 4) $f(x)=\sin x+\operatorname{tg}x$; вычислите $f'(\pi)$.

269. 1) $y=\operatorname{tg}(ax+b)$; 2) $y=\operatorname{tg}(x/3)$; 3) $y=\operatorname{tg}x^2$; 4) $y=\operatorname{tg}\sqrt{2x}$.

270. 1) $y=\operatorname{tg}x\sin^2 x$; 2) $y=3x-\operatorname{tg}3x$; 3) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x\sin x$; вычислите $f'(\pi/3)$; 4) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}$.

271. 1) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)}$; вычислите $f'(\pi/2)$; 2) $y=\dfrac{1-\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}2x}$.

272. 1) $y=\operatorname{ctg}x+x$; 2) $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}x}$; 3) $f(x)=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$; вычислите $f'(\pi/4)$.

273. 1) $y=\operatorname{ctg}x^3$; 2) $y=\operatorname{ctg}^3 x$; 3) $y=-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}$.

274. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s=4\sin 3t$, в момент времени $t=\pi/9$ (s—в метрах, t—в секундах).

275. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s=-2\cos 2t$, в момент времени $t=\pi/6$.

§ 25. ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Формулы дифференцирования

При условии $u=\varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u=x$	Номер формулы
$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, $\lvert u\rvert<1$	(9.76)	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$	(9.76а)
$(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, $\lvert u\rvert<1$	(9.77)	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$	(9.77а)
$(\operatorname{arctg}u)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$	(9.78)	$(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	(9.78а)
$(\operatorname{arcctg}u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$	(9.79)	$(\operatorname{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	(9.79а)

Найти производные следующих функций:

276. 1) $f(x)=5\arcsin x-3\arccos x$; вычислить $f'(\sqrt{3}/2)$; 2) $f(x)=3\operatorname{arctg}x-2\operatorname{arcctg}x$; вычислить $f'(2)$.

○ 1) Используя формулы (9.76а) и (9.77а), получим

$$f'(x)=\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{8}{\sqrt{1-x^2}};\quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8}{\sqrt{1-3/4}}=16.$$

2) По формулам (7.1), (9.78а) и (9.79а) находим

$$f'(x)=\frac{3}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{5}{1+x^2};\quad f'(2)=\frac{5}{1+2^2}=1.\ \bullet$$

277. 1) $y=\arcsin 2x$; 2) $y=\arccos\sqrt{2x}$; 3) $y=\operatorname{arcctg}3x$.

○ 1) По формуле (9.76) получим

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)'=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

2) По формуле (9.77) получим

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}(\sqrt{2x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x}}=-\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}.$$

3) По формуле (9.79) находим

$$y'=-\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot(3x)'=-\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3=-\frac{3}{1+9x^2}.\ \bullet$$

Найдите производные следующих функций:

278. 1) $f(x)=2\arcsin x+\arccos x$; вычислите $f'(\sqrt{2}/2)$; 2) $f(x)=5\arcsin x+2\arccos x$; вычислите $f'(1/2)$; 3) $y=x(\arcsin x+\arccos x)$.

279. 1) $y=\arcsin 3x$; 2) $y=\arccos(x/a)$; 3) $y=\arcsin x^2$; 4) $y=\arccos ax$.

280. 1) $y=\arcsin\sqrt{3x}$; 2) $y=\arccos\sqrt{x-1}$; 3) $y=\arcsin\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

281. 1) $f(x)=\operatorname{arctg}x$; вычислите $f'(\sqrt{3})$; 2) $y=x(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x)$.

282. 1) $y=\operatorname{arctg}x^2$; 2) $y=\operatorname{arcctg}3x$; 3) $y=\operatorname{arctg}(a/x)$; 4) $y=\operatorname{arcctg}(x/a)$.

283. 1) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; 2) $y=\operatorname{arctg}(1/\sqrt{x})$.

284. 1) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; 2) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

§ 26. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

285. Найти вторые производные функций: 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\ln\sin x$.

○ 1) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$; $y''=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x$;

2) $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\operatorname{ctg}x$; $y''=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. ●

286. Найти скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s=2\sin(\pi t/3)$, в момент времени $t=1$.

○ $v=\dfrac{ds}{dt}=2\cos\dfrac{\pi t}{3}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{\pi t}{3}$;

$$v(1)=\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};$$

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$a(1)=-\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}.\ \bullet$$

287. Найдите вторые производные функций: 1) $y=\cos x$; 2) $y=\operatorname{tg}x$; 3) $y=\ln\cos x$; 4) $y=\ln\operatorname{tg}x$; 5) $s=e^{\cos t}$; 6) $s=e^{-\sin t}$.

288. В момент времени $t=1$ найдите скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону: 1) $s=\sin(\pi t/4)$; 2) $s=-\cos(\pi t/3)$.

289. Материальная точка массы m движется прямолинейно по закону $s=-\sin 3t$. Найдите силу F, под действием которой точка совершает это движение в момент $t=\pi/6$.

§ 27. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Если точка M движется по окружности радиуса R (рис. 59) с постоянной угловой скоростью ω, то проекция P точки M на ось Oy совершает по этой оси колебательное движение по закону

$$y=R\sin(\omega t+\theta). \tag{9.80}$$

Движение точки P называется *простым гармоническим колебанием*. Величина R (амплитуда колебания) выражает максимальное отклонение колеблющейся точки P от начала координат; ω — угловая скорость точки M в радианах в секунду; t — время в секундах, за которое точка M перемещается из положения M_0 в положение M_t; θ — начальная фаза колебания.

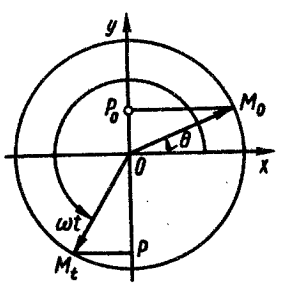


Рис. 59

При $t=0$ радиус-вектор $\overrightarrow{OM_0}$ образует с осью Ox угол θ. Через t секунд радиус-вектор повернется на угол ωt и образует с осью Ox угол $\omega t+\theta$. Следовательно, проекция точки, равномерно движущейся по окружности радиуса R с угловой скоростью ω, совершает гармонические колебания с амплитудой R и начальной фазой θ.

Время T, в течение которого точка P пройдет через все свои фазы, а точка M совершит один полный оборот по окружности, называется *периодом*

гармонического колебания, т. е. T есть период функции $y=R\sin(\omega t+\theta)$. Так как точка P за время T совершает один полный оборот, т. е. описывает дугу 2π радиан, то за единицу времени она опишет угол ω, равный $2\pi/T$ радиан; поэтому угловая скорость

$$\omega=2\pi/T. \tag{9.81}$$

Отсюда следует, что

$$T=2\pi/\omega. \tag{9.82}$$

Величина, обратная периоду колебания T, т. е. $1/T=\omega/(2\pi)$, называется *частотой* колебания. Частота* колебания показывает число колебаний n, совершаемых точкой в секунду:

$$T=1/n. \tag{9.83}$$

290. Составить уравнение гармонического колебания, если амплитуда равна 10, период равен 0,5 с, а начальная фаза равна 1,5.

○ По формуле (9.81) находим $\omega=2\pi/0{,}5=4\pi$. Подставляя $R=10$, $\theta=1{,}5$, $\omega=4\pi$ в равенство (9.80), получим $y=10\sin(4\pi t+1{,}5)$. ●

291. Найти период, амплитуду и начальную фазу следующих функций:

1) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y=-3\sin\frac{x}{3}$; 3) $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.

○ 1) Здесь $R=3$, $\omega=2$, $\theta=-\pi/6$. Период T находим из соотношения (9.82), т. е. $T=2\pi/2=\pi$.

2) Здесь $R=|-3|=3$, $\omega=1/3$, $T=2\pi:(1/3)=6\pi$. Для вычисления начальной фазы запишем данную функцию в виде $y=3\sin\left(\frac{x}{3}+\pi\right)$, откуда $\theta=\pi$.

3) Преобразуем данную функцию следующим образом: $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=$ $=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, откуда $\theta=\pi/4$, $R=1$, $\omega=2$, $T=2\pi/2=\pi$. ●

292. Составьте уравнение гармонического колебания, если амплитуда равна 5, частота колебания равна 3, а начальная фаза равна 0,8.

293. Найдите период, амплитуду и начальную фазу следующих функций: 1) $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y=\sin(x-5)$.

294. Материальная точка массы m совершает простое гармоническое колебание по закону $s=5\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)$. Найдите силу F, под действием которой точка совершает это движение в момент $t=0$.

295. Приведите к виду $R\sin(\omega t+\theta)$ выражения: 1) $12\sin 2t+$ $+5\cos 2t$; 2) $8\sin(5x+\pi/6)-15\cos(5x+\pi/6)$ (см. задачу 235).

* Иногда частотой называют величину ω. Она выражает число колебаний, совершаемых точкой P в течение 2π секунд.

296. Найдите амплитуду и начальную фазу сумм следующих гармонических колебаний: 1) $y_1=3\sin(t/2)$ и $y_2=5\sin(t/2)$; 2) $y_1=$ $=2\sin 2t$ и $y_2=2\sin(2t+\pi/3)$; 3) $y_1=\sqrt{2}\sin 5t$ и $y_2=\sqrt{2}\cos 5t$.

§ 28. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

297. Найти области определения функций: 1) $y=1/\sin x$; 2) $y=$ $=1/(1-\cos x)$; 3) $y=\operatorname{tg}4x$; 4) $y=1/\operatorname{ctg}x$.

○ 1) $\sin x\neq 0$, $x\neq\pi k$;
2) $1-\cos x\neq 0$, $\cos x\neq 1$, $x\neq 2\pi k$;
3 $4x\neq\pi/2+\pi k$, $x\neq\pi/8+\pi k/4$;
4) $\operatorname{ctg}x\neq 0$, $x\neq\pi/2+\pi k$, кроме того, $x\neq\pi k$, следовательно, $x\neq\pi k/2$. ●

298. При каких значениях аргумента принимают наибольшее и наименьшее значения функции: 1) $y=2\sin 3x$; 2) $y=(1/2)\cos 2x$?

○ 1) Имеем $\sin 3x=1$, $3x=\pi/2+2\pi k$, значит, при $x=\pi/6+2\pi k/3$ функция принимает наибольшее значение, равное 2. Аналогично, $\sin 3x=-1$, $3x=-\pi/2+2\pi k$, т. е. при $x=-\pi/6+2\pi k/3$, функция принимает наименьшее значение, равное -2.

2) Имеем $\cos 2x=1$, $2x=2\pi k$ т. е. при $x=\pi k$ функция принимает наибольшее значение, равное 1/2. Аналогично, $\cos 2x=-1$, $2x=\pi(2k+1)$, т. е. при $x=(\pi/2)(2k+1)$ функция принимает наименьшее значение, равное $-1/2$. ●

299. Найдите области определения функций: 1) $y=1/\sin x^2$; 2) $y=$ $=\operatorname{tg}x/\sin x$; 3) $y=\sin x/\operatorname{tg}x$; 4) $y=\operatorname{ctg}3x$; 5) $y=(1+\sin x)/\cos x$.

300. Найдите области определения функций: 1) $y=\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$; 2) $y=\cos x+\operatorname{ctg}x$; 3) $y=1/(\sin x+\cos x)$; 4) $y=1/(\sin^2 x-\sin x)$; 5) $y=\operatorname{ctg}x/(\sin x-\cos x)$.

301. При каких значениях аргумента принимают наибольшее и наименьшее значения следующие функции: 1) $y=\sin(x-1)$; 2) $y=$ $=\cos(\pi/4+x)$; 3) $y=3\sin 4x$; 4) $y=(1/2)\cos 5x$?

302. Найдите множества значений функций: 1) $y=\sin|x|$; 2) $y=$ $=|\sin x|$; 3) $y=\cos|x|$; 4) $y=|\cos x|$.

303. В каких границах могут изменяться функции: 1) $y=1-\sin x$; 2) $y=3+\sin x$; 3) $y=2-\cos x$; 4) $y=5+\cos x$?

304. Имеют ли наибольшее и наименьшее значения функции: 1) $y=\operatorname{tg}x$; 2) $y=|\operatorname{tg}x|$; 3) $y=\operatorname{tg}^2 x$?

305. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций: 1) $y=4+\sin(x-\pi/12)$; 2) $y=6-\sin^2 x$; 3) $y=5-3|\sin x|$.

306. Найдите множества значений функций: 1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=3\sin x+\sqrt{3}\cos x$; 3) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ (см. задачу 235).

307. Исследуйте с помощью производной и сформулируйте основные свойства функций: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$.

§ 29. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

308. Построить графики функций: 1) $y=A\sin x$; 2) $y=\sin(x+\alpha)$; 3) $y=\sin\omega x$.

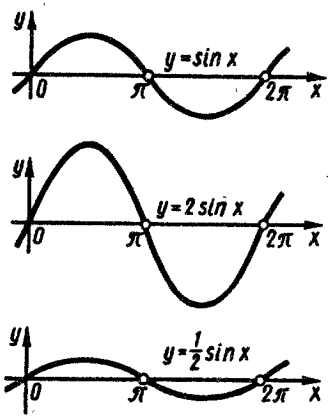


Рис. 60

○ 1) Если $A>0$, то данная функция имеет те же промежутки возрастания и убывания, что и $\sin x$, наибольшее значение функции равно A, а наименьшее равно $-A$. График получается растяжением синусоиды $y=\sin x$ в A раз от оси абсцисс. Такое преобразование называется *преобразованием амплитуды*. На рис. 60 изображены графики функций $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=(1/2)\sin x$.

2) График данной функции получается

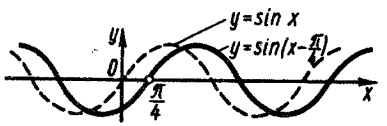


Рис. 61

из графика функции $y=\sin x$ параллельным переносом начала координат в точку $O_1(-\alpha; 0)$. Такое преобразование называется *сдвигом фазы*. На рис. 61 изображен график функции $y=\sin(x-\pi/4)$.

3) Наибольшее значение этой функции равно 1, а наименьшее равно -1; период равен $2\pi/\omega$. Полагая $\omega=1$, $\omega=2$ и $\omega=1/2$, построим графики функций $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ и $y=\sin(x/2)$.

График функции $y=\sin 2x$ (период $T=\pi$) может быть получен путем «сжатия» синусоиды $y=\sin x$ вдоль оси абсцисс в два раза. Аналогично, график функции $y=\sin(x/2)$ (период $T=4\pi$) может быть получен путем «растяжения» синусоиды $y=\sin x$ вдоль оси абсцисс в два раза. Такое преобразование называется *преобразованием периода*. Графики изображены на рис. 62. ●

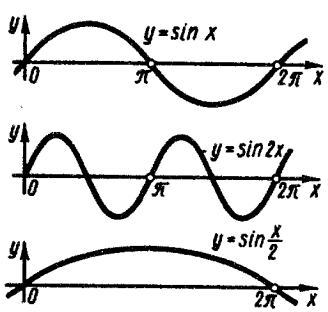


Рис. 62

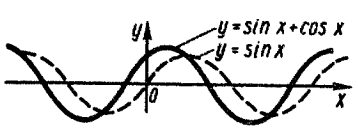


Рис. 63

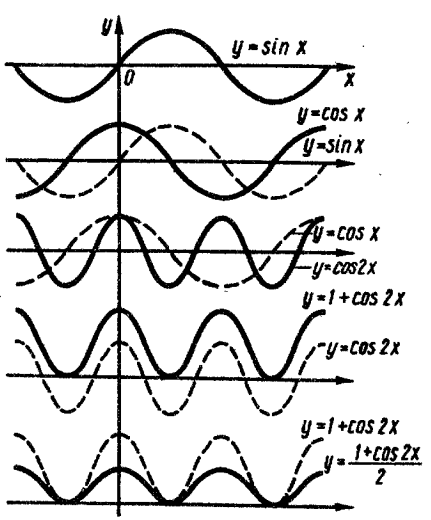


Рис. 64

309. Построить графики функций: 1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\cos^2 x$.

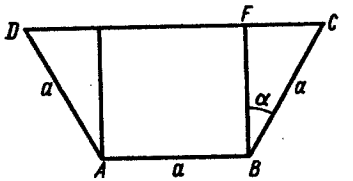


Рис. 65

○ 1) Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4).$$

График изображен на рис. 63.

2) Запишем данную функцию в виде $y=\cos^2 x=(1/2)(1+\cos 2x)$. Последовательность построения графика видна на рис. 64. ●

Постройте графики функций:

310. 1) $y=3\sin x$; 2) $y=2\cos x$; 3) $y=(-1/3)\sin x$.

311. 1) $y=\sin(x-\pi/6)$; 2) $y=\cos(x+\pi/3)$; 3) $y=\operatorname{tg}(x-\pi/4)$.

312. 1) $y=\cos 2x$; 2) $y=\cos(x/3)$; 3) $y=\operatorname{tg}(x/2)$.

313. 1) $y=\sin x-\cos x$; 2) $y=\sin^2 x$.

§ 30. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

314. Открытый желоб в сечении имеет форму равнобедренной трапеции (рис. 65), основание и боковые стороны которой равны a. Чему равен угол наклона α стенки желоба к его высоте, проведенной из вершины тупого угла, при наибольшей пропускной способности желоба?

Найдите производные следующих функций:

315. 1) $y=(1/3)\sin^3 x-\sin x$; 2) $y=\cos(x+a)\sin(x-a)$.

316. 1) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 3x-1}$; 2) $y=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x$; 3) $y=\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{ctg}^2 2x$.

317. 1) $y=\ln\operatorname{ctg} x$; 2) $f(x)=\ln\sin(x/3)$; вычислите $f'(\pi/2)$; 3) $y=\ln\cos^2 x$.

318. 1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$; 2) $y=\ln\sin^2(x-1)$; 3) $u=\ln\operatorname{tg}^2 z^2$.

319. 1) $s=\ln e^{\sin 2t}$; 2) $y=e^{\sin x}\cos x$; 3) $y=e^{\operatorname{tg} x}\cos^2 x$.

320. 1) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $u=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+z}{1-z}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.

321. 1) $y=\arccos\sqrt{1-e^{2x}}$; 2) $y=\arcsin\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Вычислите производные при заданных значениях аргумента:

1) $f(x)=\sin^2\ln e^x$, $f'(0)$;

2) $f(x)=3\ln\sqrt{\cos 2x}$, $f'(\pi/8)$;

II вариант

Вычислите производные при заданных значениях аргумента:

1) $f(x)=\ln\operatorname{tg}^2 2x$, $f'(\pi/8)$;

2) $f(x)=2\ln\sqrt{\sin 2x}$, $f'(\pi/8)$;

3) $f(x)=\arccos\sqrt{x}$, $f'(1/2)$;
4) $f(x)=8\sin^2 x\cos x$, $f'(\pi/4)$.
5) Точка движется прямолинейно по закону $s=\sin^2 t$. Найдите момент времени t, когда ее ускорение равно 1.

3) $f(x)=\operatorname{arctg} e^{-x}$, $f'(0)$;
4) $f(x)=\sin 2x(1+\cos 2x)$, $f'(\pi/4)$.
5) Точка движется прямолинейно по закону $s=\sin^2 t$. Найдите момент времени t, когда ее ускорение равно нулю.

Глава 10
ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Дифференциалом функции $y=f(x)$ (или *дифференциалом первого порядка*) называется произведение производной этой функции $f'(x)$ на произвольное приращение аргумента Δx:

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Дифференциал аргумента равен приращению аргумента: $dx=\Delta x$. Поэтому дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{10.1}$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y=f''(x)\,dx^2, \tag{10.2}$$

т. е. дифференциал второго порядка функции $y=f(x)$ равен произведению второй производной этой функции на квадрат дифференциала аргумента.

1. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

1) $y=(x^3-2)^4$; 2) $y=\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

○ Воспользуемся соотношением (10.1):

1) $dy=((x^3-2)^4)'\,dx=4(x^3-2)^3\cdot 3x^2dx=12x^2(x^3-2)^3\,dx$;

2) $dy=(\sqrt{x^2-1})'\,dx=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

3) $dy=(\ln\sin\sqrt{x})'\,dx=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}}$. ●

2. Найти дифференциалы второго порядка следующих функций:
1) $y=\ln\sin^2 2x$; 2) $y=e^{-x}$.

○ Воспользуемся соотношением (10.2):

1) $y'=\dfrac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\sin 2x\cos 2x\cdot 2=4\operatorname{ctg}2x$; $y''=-4\cdot\dfrac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2=-\dfrac{8}{\sin^2 2x}$;

$d^2y=y''dx^2=-\dfrac{8dx^2}{\sin^2 2x}dx^2$;

2) $y'=-e^{-x}$; $y''=e^{-x}$; $d^2y=y''dx^2=e^{-x}dx^2$. ●

3. Найдите дифференциалы первого порядка следующих функций: 1) $y=(1-x^2)^5$; 2) $y=(ax^2+b)^3$; 3) $y=\sqrt{4-2x^2}$; 4) $y=1/\sqrt{2x-1}$; 5) $y=\ln\cos^2 x$; 6) $y=\ln(1/\sqrt{x})$; 7) $y=\arccos x^2$; 8) $y=\operatorname{arcctg}(1/x)$.

4. Найдите дифференциалы второго порядка следующих функций: 1) $y=\ln\cos^2 x$; 2) $y=\ln\operatorname{tg}2x$; 3) $y=a^{3x}$; 4) $y=\arccos x$; 5) $y=\operatorname{arctg}x^2$.

§ 2. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Предположим, что величина x получена непосредственным измерением или в результате приближенного вычисления. Тогда при нахождении величины x мы допускаем не зависящую от нас погрешность Δx.

Пусть x — приближенное значение аргумента (измеряемой величины), Δx — абсолютная погрешность величины x, $\dfrac{\Delta x}{x}$ — относительная погрешность величины x, а $x+\Delta x$ — истинное значение измеряемой величины (Δx может быть как положительным, так и отрицательным числом).

Тогда x определяет приближенное значение функции $f(x)$, а $x+\Delta x$ — ее истинное значение $f(x+\Delta x)$, откуда следует, что абсолютная погрешность функции

$$|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|.$$

При малых значениях Δx (близких к нулю) величину Δy можно приближенно заменить дифференциалом dy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,dx=dy.$$

Выгода замены приращения функции Δy ее дифференциалом dy состоит в том, что dy зависит от Δx линейно, а Δy представляет собой обычно более сложную зависимость от Δx.

Полагая $\Delta y\approx dy$, получим выражение для относительной погрешности ε величины y:

$$\varepsilon=\left|\frac{dy}{y}\right|.$$

5. Сравнить относительные погрешности при вычислении площади круга радиуса $r=125$ см, считая, что абсолютная погрешность равна: 1) приращению площади круга; 2) дифференциалу площади круга.

○ 1) Находим приращение ΔS площади круга и относительную погрешность $\dfrac{\Delta S}{S}$ при вычислении площади круга $S=\pi r^2$. Будем считать, что погрешность при измерении радиуса не превышает $\pm 0{,}5$ см. Имеем

$$\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=\pi(2r\Delta r+(\Delta r^2))=\pi(2\cdot 125\cdot 0{,}5+0{,}25)=125{,}25\pi;$$

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{125{,}25\pi}{\pi\cdot 125^2}=0{,}008016\approx 0{,}8\%.$$

2) Найдем дифференциал dS и относительную погрешность $\frac{dS}{S}$ при вычислении площади круга:

$$dS=2\pi r\Delta r=2\pi\cdot 125\cdot 0{,}5=125\pi;\quad \frac{dS}{S}=\frac{2\pi r\Delta r}{\pi r^2}=2\cdot\frac{dr}{r}.$$

Значит, относительная погрешность при вычислении площади круга равна удвоенной относительной погрешности, полученной при измерении радиуса:

$$\frac{dS}{S}=2\cdot\frac{dr}{r}=2\cdot\frac{0{,}5}{125}=0{,}8\%.$$

Итак, видим, что во втором случае вычисление было значительно проще и выполнено без ущерба для точности вычисления.

Определим относительную погрешность приближения при замене приращения ΔS дифференциалом dS:

$$\Delta S-dS=125{,}25\pi-125\pi=0{,}25\pi;\quad \frac{\Delta S-dS}{dS}=\frac{0{,}25\pi}{125\pi}=0{,}002=0{,}2\%.$$

Относительная погрешность приближения составила всего 0,2%. ●

6. Найдите относительную погрешность при вычислении длины окружности, если $r=50$ см, $\Delta r=0{,}5$ см.

7. Найдите относительную погрешность при вычислении величины, заданной уравнением $y=x^3$, если $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЧИСЛОВОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $y=f(x)$; приращение этой функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, ее дифференциал $dy=f'(x)dx$. При достаточно малых (близких к нулю) приращениях аргумента Δx будем считать, что $\Delta y\approx dy$, т. е. что приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим

$$f'(x)dx\approx f(x+\Delta x)-f(x),$$

откуда

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{10.3}$$

Применение этой формулы дает значительное упрощение вычисления числового значения функции; геометрически это соответствует замене участка кривой отрезком касательной.

8. Найти приближенное значение приращения функции $y=2x^3+5$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$.

○ Имеем $\Delta y\approx dy=6x^2dx=6\cdot 2^2\cdot 0{,}001=0{,}024$. Точное значение приращения

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5-2x^3-5=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3=$$
$$=6\cdot 4\cdot 0{,}001+6\cdot 2\cdot 0{,}000001+2\cdot 0{,}000000001=0{,}024012002.$$ ●

9. На сколько увеличится при нагревании объем шара радиуса R, если его радиус удлинился на величину ΔR?

○ Объем шара вычисляется по формуле $V=(4/3)\pi R^3$. Считая приращение ΔR аргумента R малым, заменим приращение объема шара его дифференциалом: $\Delta V\approx dV$. Следовательно, для вычисления приращения объема шара достаточно найти дифференциал функции $V=(4/3)\pi R^3$, т. е. $dV=4\pi R^2dR$. ●

10. Найти приближенное значение функции $f(x)=5x^3-2x+3$ при $x=2{,}01$.

○ Полагая $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$, получим

$$f(x)=f(2)=5\cdot 2^3-2\cdot 2+3=39;$$
$$f'(x)\Delta x=f'(2)\cdot 0{,}01=(5x^3-2x+3)'\Delta x=(15x^2-2)\Delta x=(15\cdot 2^2-2)\cdot 0{,}01=0{,}58.$$

По формуле (10.3) находим $f(2{,}01)=39+0{,}58=39{,}58$.

Найдем точное значение функции: $f(2{,}01)=5\cdot(2{,}01)^3-2\cdot 2{,}01+3=$ $=39{,}583005$. ●

11. Найдите приближенные значения приращений функций: 1) $y=3x^2+5x+1$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}001$; 2) $y=x^3+x-1$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$; 3) $y=\ln x$ при $x=10$ и $\Delta x=0{,}01$.

12. На сколько увеличится при нагревании объем куба с ребром 10 см, если удлинение ребра равно 0,02 см?

13. Найдите приближенные значения функций: 1) $f(x)=2x^2-$ $-x+1$ при $x=2{,}01$; 2) $f(x)=x^2+3x+1$ при $x=3{,}02$; 3) $f(x)=$ $=(1/3)x^3+(1/2)x^2-2x+4$ при $x=1{,}1$.

§ 4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Применяя формулу (10.3), легко получить различные формулы для нахождения приближенных числовых значений. Ниже рассмотрим формулы, имеющие практическое значение в приближенных вычислениях.

Формула для приближенного вычисления степеней:

$$(x+\Delta x)^n\approx x^n+nx^{n-1}\Delta x. \tag{10.4}$$

Частные случаи формулы (10.4):

1) $n=2$, $(x+\Delta x)^2\approx x^2+2x\Delta x$; 2) $n=3$, $(x+\Delta x)^3\approx x^3+3x^2\Delta x$; 3) $x=1$, $(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x$.

Формула для приближенного вычисления корней:

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \tag{10.5}$$

Частные случаи формулы (10.5):

1) $n=2$, $\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$; 2) $n=3$, $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $x=1$, $\sqrt[n]{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{n}$.

Формула для приближенного вычисления обратных величин:

$$\frac{1}{x+\Delta x}\approx\frac{1}{x}-\frac{\Delta x}{x^2}. \tag{10.6}$$

Частные случаи формулы (10.6):

1) $\Delta x<0$, $\frac{1}{x-\Delta x}\approx\frac{1}{x}+\frac{\Delta x}{x^2}$; 2) $x=1$, $\frac{1}{1+\Delta x}\approx 1-\Delta x$; 3) $x=1$ и $\Delta x<0$, $\frac{1}{1-\Delta x}\approx 1+\Delta x$.

Формулы для приближенного вычисления синусов и тангенсов малых углов:

$$\sin\Delta x\approx\Delta x;\ \operatorname{tg}\Delta x\approx\Delta x.$$

14. Найти приближенные значения: 1) $(4{,}012)^2$; 2) $\sqrt{1{,}006}$; 3) $1/1{,}004$.

○ 1) Полагая в соотношении (10.4) $x=4$, $\Delta x=0{,}012$, получим $(4{,}012)^2=(4+0{,}012)^2\approx 4^2+2\cdot 4\cdot 0{,}012=16{,}096\approx 16{,}1$ (точный ответ 16,096144).

2) Полагая в соотношении (10.5) $x=1$, $\Delta x=0{,}006$, получим $\sqrt{1{,}006}=\sqrt{1+0{,}006}\approx 1+0{,}006/2=1{,}003$.

3) Полагая в соотношении (10.6) $x=1$, $\Delta x=0{,}004$, получим $1/(1+0{,}004)=1-0{,}004=0{,}996$. ●

15. Вычислить $\sin 12'$.

○ Так как $12'=0{,}0035$ рад, то $\sin 0{,}0035=0{,}0035$. По таблице натуральных значений синуса находим $\sin 12'=0{,}0035$. ●

16. Найдите приближенные значения степеней: 1) $(9{,}06)^2$; 2) $(1{,}012)^3$; 3) $(9{,}95)^3$; 4) $(1{,}005)^{10}$; 5) $(0{,}975)^4$.

17. Найдите приближенные значения корней: 1) $\sqrt[3]{1{,}012}$; 2) $\sqrt{25{,}16}$; 3) $\sqrt{24{,}84}$; 4) $\sqrt{101}$; 5) $\sqrt{99{,}5}$; 6) $\sqrt[10]{1{,}03}$.

18. Найдите приближенные значения величин: 1) $1/0{,}99$; 2) $1/9{,}93$; 3) $1/(1{,}004)^2$.

19. Вычислите: 1) $\sin 42'$; 2) $\sin 2°06'$, 3) $\operatorname{tg} 1°12'$; 4) $\operatorname{tg} 3°18'$.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО СПОСОБУ СТРОГОГО УЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ

При вычислениях нередко возникает необходимость знать границы допущенной погрешности промежуточных вычислений и окончательного результата. Такой способ ведения приближенных вычислений называется способом строгого учета погрешностей. Для этого необходимо знать, как вычисляются границы относительных погрешностей алгебраической суммы, произведения, степени, корня и частного.

20. Доказать, что относительная погрешность произведения не превышает суммы относительных погрешностей ее сомножителей.

○ Пусть дана функция $y=uv$, где $u=f(x)$ и $v=\varphi(x)$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал:

$$\ln y=\ln u+\ln v;\ \frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}.$$

Так как абсолютная величина суммы не превышает суммы абсолютных величин слагаемых:

$$\left|\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}\right|\leqslant\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|,$$

то

$$\left|\frac{dy}{y}\right|=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|,\ \text{или}\ \varepsilon(uv)=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|.$$ ●

21. Доказать, что относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя.

○ Пусть дана функция $y=u/v$, где $u=f(x)$ и $v=\varphi(x)$. Прологарифмировав и взяв дифференциал от функции $y=u/v$, получим

$$\ln y=\ln u-\ln v,\ \frac{dy}{y}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}.$$

Так как абсолютная величина разности не превышает суммы абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого, то

$$\left|\frac{dy}{y}\right|=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|,\ \text{или}\ \varepsilon\left(\frac{u}{v}\right)=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|.$$ ●

22. Доказать, что относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, умноженной на показатель степени.

○ Пусть дана функция $y=x^n$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал:

$$\ln y=n\ln x;\ \frac{dy}{y}=n\frac{dx}{x}.$$

Относительная погрешность равна $\varepsilon(x^n)=n\frac{dx}{x}$.

Частные случаи: 1) $n=2$, $\varepsilon(x^2)=2\frac{dx}{x}$; 2) $n=3$; $\varepsilon(x^3)=3\frac{dx}{x}$. ●

23. Доказать, что относительная погрешность корня равна относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель степени корня.

○ Пусть дана функция $y=\sqrt[n]{x}$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал:

$$\ln y=\frac{1}{n}\ln x;\ \frac{dy}{y}=\frac{1}{n}\frac{dx}{x}.$$

Относительная погрешность равна $\varepsilon(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}\frac{dx}{x}$.

Частные случаи: 1) $n=2$, $\varepsilon(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$; 2) $n=3$, $\varepsilon(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3}\frac{dx}{x}$. ●

24. Найти относительную погрешность числа x при вычислении этого числа по его логарифму $y=\lg x$.

○ Пусть $\lg x$ был вычислен с погрешностью Δy, тогда при нахождении по нему числа x будет допущена погрешность Δx. Относительная погрешность числа x равна $\frac{\Delta x}{x}$. Так как абсолютная погрешность логарифма $\Delta y \approx 0{,}4343\frac{\Delta x}{x}$, то

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta y}{0{,}4343}.$$

Таким образом, относительная погрешность числа x при вычислении его по его логарифму не зависит от значения числа x, а зависит только от погрешности, с которой был найден логарифм числа x. ●

25. Найти относительную погрешность точности отсчета на логарифмической линейке со шкалой 250 мм.

○ Допустим, что при установке визира или отсчета со шкалы наибольшая погрешность составляет 0,1 мм.

Найдем абсолютную погрешность логарифма числа. Вся шкала логарифмической линейки длиной 250 мм соответствует числу, логарифм которого равеи единице ($\lg 10=1$). Следовательно, на 0,1 мм шкалы абсолютиая погрешность логарифма числа будет в 250 раз меньше, т. е. $\Delta y = 0{,}1/250 = 0{,}004$. Так как $\Delta y = 0{,}4343\frac{\Delta x}{x}$, то

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta y}{0{,}4343} = \frac{0{,}004}{0{,}4343} \approx 0{,}00092 \approx 0{,}001 = 0{,}1\%,$$

т. е. относительная погрешность точности отсчета составляет 0,1% (в любой части шкалы). ●

26. При измерении прямоугольного поля нашли его длину $u=60$ м и ширину $v=23$ м. Погрешность при измерении длины не превышает 0,3 м, а при измерении ширины 0,2 м. Определить границы погрешности, которую мы допускаем, принимая площадь прямоугольника равной $60\cdot 23=1380$ м^2, и относительную погрешность, допущенную при вычислении площади.

○ Имеем $|du|<0{,}3$, $|dv|<0{,}2$. При наихудших условиях $|du|=0{,}3$, $|dv|=0{,}2$. Найдем абсолютную погрешность произведения:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv = 23\cdot 0{,}3 + 60\cdot 0{,}2 = 18{,}9 \approx 19 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Это наибольшая величина абсолютной погрешности, которую мы можем допустить, принимая площадь участка равной 1380 м^2. Округляя погрешность в сторону увеличения и принимая ее равной 20 м^2, найдем границы погрешности при вычислении площади. Таким образом, площадь не превосходит $1380+20=1400$ (м^2) и не менее $1380-20=1360$ (м^2).

Относительную погрешность вычислим по формуле $\varepsilon(uv)=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|$, т. е.

$$\varepsilon(uv) = \frac{0{,}3}{60} + \frac{0{,}2}{23} = \frac{1}{200} + \frac{2}{230} \approx 0{,}014 = 1{,}4\%.$$

Итак, относительная погрешность не превышает 1,4%. ●

27. Для нахождения плотности тела определены его масса $m_1=484$ г и масса вытесненной им воды $m_2=62$ г. Абсолютные погрешности $\Delta m_1=0{,}5$ г и $\Delta m_2=0{,}4$ г. Найти относительную погрешность при вычислении плотности тела.

○ Так как $y=m_1/m_2$, то

$$\left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{dm_1}{m_1}\right| + \left|\frac{dm_2}{m_2}\right| = \frac{0{,}5}{484} + \frac{0{,}4}{62} \approx 0{,}00103 + 0{,}00645 = 0{,}00748 \approx 0{,}7\%.$$ ●

28. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если ребро равно 12,5 см. Абсолютная погрешность $\Delta x=0{,}05$ см.

○ Полагая $dx=0{,}05$ см, имеем

$$\varepsilon(x^3) = 3\frac{dx}{x} = 3\cdot\frac{0{,}05}{12{,}5} = \frac{15}{1250} \approx 0{,}012 = 1{,}2\%.$$ ●

29. Найти относительную погрешность, допущенную при вычислении длины стороны квадрата, если площадь квадрата равна 37,7 см^2. Абсолютная погрешность $\Delta x=0{,}05$ см.

○ Обозначив длину стороны квадрата через y и площадь через x, получим: $y=\sqrt{x}=\sqrt{37{,}7}$ $dx=0{,}05$;

$$\varepsilon\left(\sqrt{37{,}7}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}05}{37{,}7} = \frac{0{,}05}{75{,}4} \approx 0{,}000663 \approx 0{,}1\%.$$ ●

30. При измерении площади параллелограмма нашли его основание $a=70$ см ($\Delta a=0{,}4$ см) и высоту $h=48$ см ($\Delta h=0{,}3$ см). Определите относительную погрешность, допущенную при вычислении площади параллелограмма.

31. Даны два приближенных числа 82,6 и 64,8. Найдите относительную погрешность их частного.

32. Найдите относительную погрешность, допущенную при измерении площади квадратной комнаты, если взято округленное значение стороны, равное 6,4 м (абсолютную погрешность принять равной 0,05 м).

33. Найдите относительную погрешность, допускаемую при вычислении длины стороны квадрата, если площадь квадрата равна 68,5 см^2.

§ 6. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

34. Найдите дифференциалы первого порядка следующих функций:

1) $y=e^x\sin x$; 2) $y=a^xe^x$; 3) $y=e^x\sqrt{2x}$;

4) $y=(e^x-e^{-x})^2$; 5) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$; 6) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x}$.

35. Вычислите приближенные значения приращений функции: 1) $y=\sin 2x$ при $x=\pi/6$ и $\Delta x=0{,}02$; 2) $y=\ln x^2$ при $x=20$ и $\Delta x=0{,}01$; 3) $y=\arcsin x$ при $x=\sqrt{3}/2$ и $\Delta x=0{,}02$.

36. Вычислите приближенные значения функций: 1) $f(x)=x^3+x^2+x+1$ при $x=0{,}001$; 2) $f(x)=x^4-1$ при $x=-3{,}3$; 3) $f(x)=x/\sqrt{x^2+3}$ при $x=1{,}1$.

37. Найдите относительную погрешность при вычислении величины, заданной уравнением: 1) $y=x^2$ при $x=10$ и $\Delta x=0{,}01$; 2) $y=x^3$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}02$.

38. Составьте формулы для вычисления относительных погрешностей функций: 1) $y=\sin^2 3x$; 2) $y=\operatorname{tg}^2 x$.

39. Составьте формулы для вычисления относительных погрешностей функций: 1) $y=e^{\sin^2 x}$; 2) $y=3^{\sqrt{x}}$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Вычислите дифференциал функции $y=\ln\cos^2 x$ при $x=\pi/4$ и $dx=0{,}01$.

2) Вычислите относительную погрешность функции $V=(4/3)\pi R^3$ при $R=300$ и $dR=0{,}3$.

3) Найдите приближенное значение приращения функции $y=x^3-x^2$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}01$.

4) Найдите приближенное значение функции $f(x)=x^3-x^2+x-3$ при $x=3{,}03$.

5) Вычислите приближенное значение величины $1/0{,}998$.

II вариант

1) Вычислите дифференциал функции $y=\ln\operatorname{tg} 2x$ при $x=\pi/8$ и $dx=0{,}03$.

2) Вычислите относительную погрешность функции $y=x^3$ при $x=750$ и $dx=0{,}5$.

3) Найдите приближенное значение приращения функции $y=2\sqrt{x}+4$ при $x=25$ и $\Delta x=0{,}01$.

4) Найдите приближенное значение функции $f(x)=3x^3-x^2+5x-1$ при $x=3{,}02$.

5) Вычислите приближенное значение величины $(1{,}02)^7$.

Глава 11
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1. Основные формулы интегрирования. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x)=f(x)\Rightarrow dF(x)=f(x)\,dx,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)\,dx$ есть действие, обратное дифференцированию,— интегрирование.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)\,dx$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,\ \text{если}\ d[F(x)+C]=f(x)\,dx.$$

Здесь $f(x)$ — подынтегральная функция; $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение; C — произвольная постоянная.

Приведем основные свойства неопределенного интеграла.

1^0. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:*

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

2^0. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:*

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,\quad \left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x).$$

3^0. *Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:*

$$\int[f(x)+\varphi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx.$$

4^0. *Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:*

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$$

5^0. *Если* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ *и* $u=\varphi(x)$ *— любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то*

$$\int f(u)\,du=F(u)+C.$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

$$\int dx=x+C; \tag{11.1}$$

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1); \tag{11.2}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C; \tag{11.3}$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C; \tag{11.4}$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C; \tag{11.5}$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C; \tag{11.6}$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C; \tag{11.7}$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C; \tag{11.8}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C; \tag{11.9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C; \qquad (11.10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C; \qquad (11.11)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C; \qquad (11.12)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C. \qquad (11.13)$$

При применении формул (11.3), (11.10) и (11.11) знак абсолютной величины пишется только в тех случаях, когда выражение, стоящее под знаком логарифма, может иметь отрицательное значение.

Каждую из формул легко проверить. В результате дифференцирования правой части получается подынтегральное выражение.

2. Непосредственное интегрирование. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3^0 и 4^0 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3^0 и 4^0 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Найти следующие интегралы:

1. 1) $\int 5\,dx$; 2) $\int 6x^2\,dx$; 3) $\int 4(x^2-x+3)\,dx$;
4) $\int 2(3x-1)^2\,dx$; 5) $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}\,dx$.

○ 1) На основании свойства 4^0 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (11.1), получим

$$\int 5dx=5\int dx=5x+C.$$

2) Используя свойство 4^0 и формулу (11.2), получим

$$\int 6x^2\,dx=6\int x^2\,dx=6\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+C=2x^3+C.$$

Проверка: $d(2x^3+C)=6x^2\,dx$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден правильно.

3) Используя свойства 3^0 и 4^0 и формулы (11.2) и (11.1), имеем

$$\int 4(x^2-x+3)\,dx=4\int x^2\,dx-4\int x\,dx+12\int dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+12x+C=\frac{4}{3}x^3-2x^2+12x+C.$$

Постоянная интегрирования C равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования, так как каждый интеграл имеет свою произвольную постоянную ($C_1-C_2+C_3=C$).

4) $\int 2(3x-1)^2\,dx=\int(18x^2-12x+2)\,dx=18\int x^2\,dx-12\int x\,dx+2\int dx=6x^3-6x^2+2x+C$.

5) $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}\,dx=\int(x^2+3x+4)\,dx=\int x^2\,dx+3\int x\,dx+4\int dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x+C$. ●

2. 1) $\int x^{-4}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

○ Используя формулу (11.2), находим:

1) $\int x^{-4}\,dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}=\frac{x^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-1/2}\,dx=\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}=2x^{1/2}+C=2\sqrt{x}+C$. ●

3. 1) $\int \frac{3dx}{x}$; 2) $\int \frac{dx}{x+1}$; 3) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

○ 1) По формуле (11.3) находим

$$\int \frac{3dx}{x}=3\int \frac{dx}{x}=3\ln|x|+C.$$

2) Так как $dx=d(1+x)$, то

$$\int \frac{dx}{1+x}=\int \frac{d(1+x)}{1+x}=\ln|1+x|+C.$$

3) Так как $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2+1)$, то

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Знак абсолютной величины не пишем, так как при любом значении x выражение $x^2+1>0$. ●

4. 1) $\int 2^x\,dx$; 2) $\int 2^{x^2}x\,dx$; 3) $\int e^{-3x^2}x\,dx$.

○ 1) По формуле (11.4) при $a=2$ получим

$$\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

2) Так как $x\,dx=(1/2)\,d(x^2)$, то

$$\int 2^{x^2}x\,dx=\int 2^{x^2}\cdot\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int 2^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{x^2}}{\ln 2}+C=\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2}+C.$$

3) Так как $x\,dx=-(1/6)\,d(-3x^2)$, то

$$\int e^{-3x^2}x\,dx=-\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}d(-3x^2)=-\frac{1}{6}e^{-3x^2}+C.$$ ●

5. 1) $\int \sin(ax+b)\,dx$; 2) $\int \cos(5x-3)\,dx$; 3) $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

○ 1) Так как $d(ax+b)=a\,dx$, то $dx=(1/a)\,d(ax+b)$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)\cdot\frac{1}{a}d(ax+b)=\frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\,d(ax+b)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

2) Так как $(1/5)\,d(5x-3)=dx$, то

$$\int \cos(5x-3)\,dx=\frac{1}{5}\int \cos(5x-3)\,d(5x-3)=\frac{1}{5}\sin(5x-3)+C.$$

3) Так как $\sin x\,dx=-d(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.\ \bullet$$

6. 1) $\int\frac{5dy}{\cos^2 y}$; 2) $\int\frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3}$; 3) $\int\frac{dz}{2\sin^2 z}$; 4) $\int\frac{x\,dx}{\sin^2(x^2+1)}$.

○ 1) По формуле (11.8) находим

$$\int\frac{5dy}{\cos^2 y}=5\int\frac{dy}{\cos^2 y}=5\operatorname{tg} y+C.$$

2) Так как $d(x^3)=3x^2\,dx$, то $x^2\,dx=\frac{1}{3}d(x^3)$. Следовательно,

$$\int\frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3+C.$$

3) По формуле (11.9) находим

$$\int\frac{dz}{2\sin^2 z}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sin^2 z}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} z+C.$$

4) Так как $x\,dx=(1/2)\,d(x^2+1)$, то

$$\int\frac{x\,dx}{\sin^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1)+C.\ \bullet$$

7. 1) $\int\frac{dx}{x^2-4}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

○ 1) По формуле (11.10) получаем

$$\int\frac{dx}{x^2-4}=\int\frac{dx}{x^2-2^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

2) По формуле (11.11) находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C.\ \bullet$$

8. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{16+x^2}$; 4) $\int\frac{dx}{25+4x^2}$.

○ 1) По формуле (11.12) находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}=\int\frac{dx}{4\sqrt{\frac{9}{16}-x^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{3}+C.$

3) По формуле (11.13) находим

$$\int\frac{dx}{16+x^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C.$$

4) $\int\frac{dx}{25+4x^2}=\int\frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C=\frac{1}{10}\times$

$\times\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C.\ \bullet$

Найдите следующие интегралы:

9. 1) $\int a\,d\varphi$; 2) $\int x^4\,dx$; 3) $\int x^{m-1}\,dx$; 4) $\int x^{1-n}\,dx$.

10. 1) $\int 4t^3\,dt$; 2) $\int nx^{n-1}\,dx$;

3) $\int(4u^3-6u^2-4u+3)\,du$; 4) $\int\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx$;

11. 1) $\int 3(2x^2-1)^2\,dx$; 2) $\int x^3(1+5x)\,dx$;

3) $\int x^4(x-1)\,dx$; 4) $\int(2x-1)^3\,dx$..

12. 1) $\int\frac{u^2-u}{3u}\,du$; 2) $\int\frac{2\varphi-3\varphi^3}{5\varphi}\,d\varphi$.

13. 1) $\int(3x^{-4}+8x^{-5})\,dx$; 2) $\int(x^{-4}-x^{-3}-3x^{-2}+1)\,dx$.

14. 1) $\int\frac{dt}{t^2}$; 2) $\int\frac{x^n\,dx}{x}$; 3) $\int(5u^{3/2}-7u^{3/4})\,du$;

4) $\int 5x\sqrt{x}\,dx$; 5) $\int x^{-2/3}\,dx$.

15. 1) $\int\frac{(x^{1/2}-x^{1/3}+x^{1/4})}{x^2}\,dx$; 2) $\int\frac{x^{3/4}+x^{2/3}+x^{1/2}}{x}\,dx$.

16. 1) $\int\frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}$; 2) $\int\frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$; 3) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

4) $\int\left(\frac{3}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t}\right)dt$.

17. 1) $\int\frac{ad\varphi}{\varphi}$; 2) $\int\frac{2dx}{x+3}$; 3) $\int\frac{3d\varphi}{2-\varphi}$.

4) $\int\frac{x^2\,dx}{x^3+1}$; 5) $\int\frac{x^2\,dx}{a^3-x^3}$.

18. 1) $\int 5^x\,dx$; 2) $\int 4^{2x}\,dx$; 3) $\int 5^{x^3}x^2\,dx$.

19. 1) $\int(e^x+2x)\,dx$; 2) $\int(3^x-e^x-1)\,dx$;

3) $\int e^{5x}\,dx$; 4) $\int e^{2x^2}x\,dx$; 5) $\int e^{-x^3}x^2\,dx$.

20. 1) $\int(\sin x-5)\,dx$; 2) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{\cos x}$; 3) $\int\sin 6x\,dx$;

4) $\int\sin(x/4)\,dx$; 5) $\int x\sin x^2\,dx$.

21. 1) $\int(4-3\cos x)\,dx$; 2) $\int\cos 4x\,dx$; 3) $\int\cos(x/6)\,dx$;

4) $\int \cos(2-3x)\,dx$; 5) $\int x^2 \cos x^3\,dx$.

22. 1) $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x-1}$; 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$; 3) $\int \frac{\cos x\,dx}{3+2\sin x}$.

23. 1) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 3) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$;

4) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$; 5) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x^2}$.

24. 1) $\int \frac{dx}{x^2-9}$; 2) $\int \frac{du}{u^2-25}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$.

25. 1) $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{du}{\sqrt{3-u^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; 4) $\int \frac{3dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

26. 1) $\int \frac{a\,dx}{1+x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{25+x^2}$; 3) $\int \frac{3dz}{9+z^2}$; 4) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу — задача неопределенная, так как $\int f(x)\,dx$ означает множество первообразных функций вида $y=F(x)+C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым C; C может принимать любые числовые значения, если на первообразную функцию не наложено никаких начальных условий. Чтобы из множества первообразных функций выделить одну определенную функцию, должны быть заданы начальные условия. Под начальными условиями понимается задание частных значений x и y для первообразной функции $y=F(x)+C$, по которым находится определенное значение C, удовлетворяющее этим начальным условиям.

27. Найти функцию, производная которой $y'=3x^2-6x+2$.

○ Имеем $y'=3x^2-6x+2$, или $\frac{dy}{dx}=3x^2-6x+2$, т. е. $dy=(3x^2-6x+2)\,dx$. Находим интегралы от левой и правой частей последнего равенства:

$$\int dy=\int(3x^2-6x+2)\,dx;\quad y+C_1=x^3-3x^2+2x+C_2.$$

Полагая $C_2-C_1=C$, получим

$$y=x^3-3x^2+2x+C.$$

Мы нашли общее выражение функций, имеющих своей производной $y'=3x^2-6x+2$. В дальнейшем при интегрировании подобных выражений постоянную интегрирования будем писать только в правой части. ●

28. Найти функцию, производная которой $y'=2x-3$, если при $x=2$ эта функция принимает значение, равное 6.

○ Имеем $y'=2x-3$, или $\frac{dy}{dx}=2x-3$, т. е. $dy=(2x-3)\,dx$. Интегрируя обе части последнего равенства, находим

$$\int dy=\int(2x-3)\,dx;\quad y=x^2-3x+C.$$

Вычислим C при заданных значениях $x=2$ и $y=6$. Подставив в выражение для функции эти значения, получим $6=2^2-3\cdot 2+C$, откуда $C=8$.

Итак, функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, имеет вид $y=x^2-3x+8$. ●

29. Найти $\int(\cos x-\sin x)\,dx$, если при $x=\pi/2$ значение первообразной функции равно 6.

○ Имеем $\int(\cos x-\sin x)\,dx=\int\cos x\,dx-\int\sin x\,dx=\sin x+\cos x+C$. Вычислим C при заданных начальных условиях: $6=\sin(\pi/2)+\cos(\pi/2)+C$, откуда $C=5$. Следовательно, первообразная функция $y=\sin x+\cos x+5$. ●

30. Найти уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке $(x; y)$ равен $2x$.

○ Согласно условию, $k=2x$. Известно, что $k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$; следовательно, $\frac{dy}{dx}=2x$, т. е. $dy=2x\,dx$. Интегрируя, получим $\int dy=\int 2x\,dx$; $y=x^2+C$.

Мы нашли совокупность (семейство) кривых, для которых угловой коэффициент касательной в любой точке равен $2x$. Эти кривые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое C. При $C=0$ получим параболу $y=x^2$ с вершиной в начале координат, при $C=1$ — параболу $y=x^2+1$ с вершиной в точке $(0; 1)$, при $C=-2$ — параболу $y=x^2-2$ с вершиной в точке $(0; -2)$ и т. д. (рис. 66). ●

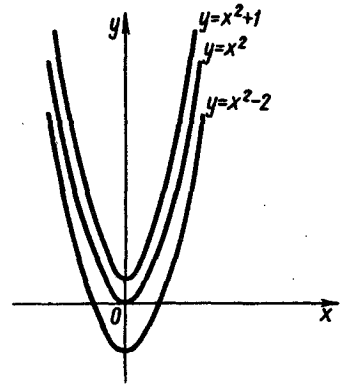


Рис. 66

31. Составить уравнение линии, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания равен y/x.

○ Согласно условию, $k=\frac{y}{x}$; так как $k=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, откуда, разделив переменные, имеем $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x};\quad \ln y=\ln x+\ln C.$$

Произвольную постоянную полагаем равной $\ln C$ для удобства упрощений. Потенцируя, получим $y=Cx$ — уравнение семейств прямых, проходящих через начало координат. ●

32. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(0; 1)$, у которой касательная в любой точке кривой имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания.

○ Согласно условию, имеем $k=\frac{dy}{dx}=y$, т. е. $\frac{dy}{y}=dx$. Интегрируя, получим

$$\int\frac{dy}{y}=\int dx;\quad \ln y=x+C.$$

Из начальных условий находим $\ln 1=0+C$, т. е. $C=0$; следовательно, $y=e^x$. ●

33. Найдите функцию: 1) производная которой $y'=4x^3-2x+3$; 2) дифференциал которой $dy=(2x+6)\,dx$.

34. Найдите функцию: 1) производная которой $y'=2x-5$, если при $x=-3$ эта функция принимает значение, равное 28; 2) обращающуюся в нуль при $x=0$, если $y'=3x^2-4x+5$; 3) производная которой $y'=3e^x+2x$, если при $x=0$ эта функция принимает значение, равное 8.

35. Найдите: 1) $\int(\sin x+3\cos x)\,dx$, если при $x=\pi$ первообразная функция равна 4; 2) $\int(\cos x-e^x+2x)\,dx$, если при $x=0$ первообразная функция равна 3.

36. Найдите уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке $(x; y)$ равен: 1) $-3x$; 2) $x+2$.

37. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен: 1) $-y/x$; 2) x/y; 3) $-x/y$.

38. Найдите уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен $x/3$.

39. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 4)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $3x^2-2x$.

40. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку $A(-1; 3)$, если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен утроенному квадрату абсциссы точки касания.

41. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(0; e)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке равен y.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

42. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v=3t^2-2t$. Найти закон ее движения.

○ Известно, что скорость прямолинейного движения точки равна производной от пути s по времени t, т. е. $v=\dfrac{ds}{dt}=3t^2-2t$, откуда $ds=(3t^2-2t)\,dt$. Интегрируя, находим

$$\int ds=\int(3t^2-2t)\,dt;\quad s=t^3-t^2+C.$$ ●

43. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v=3t^2+4$. Найти закон движения s, если за время $t=2$ с точка прошла 20 м.

○ Так как $v=\dfrac{ds}{dt}=3t^2+4$, то $ds=(3t^2+4)\,dt$. Интегрируя, получим

$$\int ds=\int(3t^2+4)\,dt;\quad s=t^3+4t+C.$$

Используя начальные условия, найдем $20=2^3+4\cdot2+C$, т. е. $C=4$. Итак, закон движения точки имеет вид $s=t^3+4t+4$. ●

44. Найти закон движения свободно падающего тела при постоянном ускорении g, если в начальный момент движения тело находилось в покое.

○ Известно, что ускорение a прямолинейно движущегося тела есть вторая производная пути s по времени t или производная от скорости v по времени t, т. е. $a=\dfrac{d^2s}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}$. Так как $a=g$, то $\dfrac{dv}{dt}=g$, откуда $dv=g\,dt$. Интегрируя, получим

$$\int dv=\int g\,dt;\quad v=gt+C_1.$$

Используя начальные условия $t=0$, $v=0$, имеем $0=g\cdot0+C_1$, т. е. $C_1=0$. Таким образом, скорость движения тела изменяется по закону $v=gt$.

Найдем теперь закон движения тела. Так как $v=\dfrac{ds}{dt}$, то $\dfrac{ds}{dt}=gt$, или $ds=gt\,dt$. Интегрируя, получим

$$\int ds=\int gt\,dt;\quad s=\frac{gt^2}{2}+C_2.$$

Используя начальные условия $t=0$, $s=0$, имеем $0=g\cdot0^2/2+C_2$, $C_2=0$. Итак, закон движения падающего тела имеет вид $s=gt^2/2$. ●

45. Точка движется прямолинейно с ускорением $a=6t-12$. В момент времени $t=0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0=9$ м/с; расстояние от начала отсчета $s_0=10$ м. Найти: 1) скорость и закон движения точки; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент $t=2$ с; 3) момент, когда скорость является наименьшей.

○ 1) Находим скорость: $\dfrac{dv}{dt}=6t-12$, или $dv=(6t-12)\,dt$. Интегрируя, получим

$$\int dv=\int(6t-12)\,dt;\quad v=3t^2-12t+C_1.$$

Используя начальные условия $t=0$, $v_0=9$, имеем $9=3\cdot0^2-12\cdot0+C_1$, т. е. $C_1=9$. Следовательно, $v=3t^2-12t+9$.

Находим закон движения точки: $\dfrac{ds}{dt}=3t^2-12t+9$, или $ds=(3t^2-12t+9)\,dt$. Интегрируя, находим

$$\int ds=\int(3t^2-12t+9)\,dt;\quad s=t^3-6t^2+9t+C_2.$$

Используя начальные условия $t=0$, $s_0=10$, имеем $10=0^3-6\cdot0^2+9\cdot0+C_2$, т. е. $C_2=10$. Таким образом, $s=t^3-6t^2+9t+10$.

2) Найдем a, v и s при $t=2$: $a=6\cdot2-12=0$; $v=3\cdot2^2-12\cdot2+9=-3$ (м/с); $s=2^3-6\cdot2^2+9\cdot2+10=12$ (м).

3) Исследуем функцию, определяющую изменение скорости, на максимум и минимум:

$$v=3t^2-12t+9,\quad v'=6t-12,\quad 6t-12=0,\quad t=2;\quad v''=6>0.$$

Следовательно, скорость является наименьшей при $t=2$ с. ●

46. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону: 1) $v=t^2-8t+2$; 2) $v=4t-3t^2$. Найдите закон движения точки.

47. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $v=2t-3$. Найдите закон движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь 6 м.

48. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v=3t^2+4t-1$. Найдите закон движения точки, если в начальный момент времени она находилась в начале координат.

49. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v=2\cos t$. Найдите закон движения, если в момент $t=\pi/6$ точка находилась на расстоянии $s=4$ м от начала отсчета.

50. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найдите закон движения этого тела (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

51. Точка движется прямолинейно с ускорением $a=12t^2+6t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t=1$ с ее скорость $v=8$ м/с, а путь $s=6$ м.

52. Точка движется прямолинейно с ускорением $a=-6t+18$. В момент времени $t=0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0=24$ м/с, расстояние от начала отсчета $s_0=15$ м. Найдите: 1) скорость и закон движения точки; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент $t=2$ с; 3) момент, когда скорость является наибольшей.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)\,dx$ в интеграл $\int F(u)\,du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)\,dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x=\varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx=\varphi'(u)\,du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через u и du, имеем

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du=\int F(u)\,du.$$

После того как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u=\psi(x)$ он приводится к переменной x.

Найти следующие интегралы:

53. 1) $\int(3x+2)^5\,dx$; 2) $\int(2x^3+1)^4x^2\,dx$;

3) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$; 4) $\int\frac{x^2\,dx}{5x^3+1}$.

○ 1) Введем подстановку $3x+2=u$. Дифференцируя, имеем $3dx=du$, откуда $dx=(1/3)\,du$. Подставив в данный интеграл вместо $3x+2$ и dx их выражения, получим

$$\int(3x+2)^5\,dx=\frac{1}{3}\int u^5\,du=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6}+C=\frac{1}{18}u^6+C.$$

Заменив u его выражением через x, находим

$$\int(3x+2)^5\,dx=\frac{1}{18}u^6+C=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C.$$

Проверка: $d\left[\frac{1}{18}(3x+2)^6+C\right]=\frac{6}{18}(3x+2)^5\cdot3dx=(3x+2)^5\,dx$.

2) Положим $2x^3+1=u$, откуда $6x^2\,dx=du$, $x^2\,dx=(1/6)\,du$. Таким образом,

$$\int(2x^3+1)^4x^2\,dx=\frac{1}{6}\int u^4\,du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C=\frac{1}{30}u^5+C=\frac{1}{30}(2x^3+1)^5+C.$$

3) Полагая $x^2+1=u$, имеем $2x\,dx=du$, $x\,dx=(1/2)\,du$. Значит,

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}=\int(x^2+1)^{-3}x\,dx=\frac{1}{2}\int u^{-3}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4u^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}+C.$$

4) Положим $5x^3+1=u$, откуда $15x^2\,dx=du$, $x^2\,dx=(1/15)\,du$. Поэтому

$$\int\frac{x^2\,dx}{5x^3+1}=\frac{1}{15}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{15}\ln u+C=\frac{1}{15}\ln|5x^3+1|+C.\ \bullet$$

54. 1) $\int\operatorname{tg}kx\,dx$; 2) $\int\frac{du}{\sin u}$; 3) $\int\frac{du}{\cos u}$.

○ 1) Имеем $\int\operatorname{tg}kx\,dx=\int\frac{\sin kx\,dx}{\cos kx}$. Положим $\cos kx=u$, откуда $-k\sin kx\,dx=du$, $\sin kx\,dx=-(1/k)\,du$. Следовательно,

$$\int\operatorname{tg}kx\,dx=-\frac{1}{k}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{k}\ln|u|+C=-\frac{1}{k}\ln|\cos kx|+C.$$

2) Так как $\sin u=2\sin(u/2)\cos(u/2)$, то

$$\int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{du}{2\sin(u/2)\cos(u/2)}.$$

Разделив и умножив знаменатель на $\cos(u/2)$, получим

$$\int\frac{du}{\sin u}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\operatorname{tg}(u/2)\cos^2(u/2)}.$$

Положим $\operatorname{tg}(u/2)=z$; тогда $\frac{1}{\cos^2(u/2)}\cdot\frac{1}{2}\,du=dz$, т. е. $\frac{du}{\cos^2(u/2)}=2dz$. Таким образом,

$$\int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln|\operatorname{tg}(u/2)|+C.$$

3) Имеем $\int\frac{du}{\cos u}=\int\frac{du}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}$. Положим $\frac{\pi}{2}+u=z$, тогда $du=dz$. Поэтому

$$\int\frac{du}{\cos u}=\int\frac{dz}{\sin z}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}+u}{2}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right|+C.\ \bullet$$

55. 1) $\int3^{5x^2}x\,dx$; 2) $\int e^{-3x^2+1}x\,dx$.

○ 1) Положим $5x^2=u$, откуда $10x\,dx=du$, $x\,dx=(1/10)\,du$. Значит,

$$\int 3^{5x^2}x\,dx=\frac{1}{10}\int 3^u\,du=\frac{1}{10}\frac{3^u}{\ln 3}+C=\frac{3^{5x^2}}{10\ln 3}+C.$$

2) Положим $-3x^2+1=u$, откуда $-6x\,dx=du$, $x\,dx=-(1/6)\,du$. Таким образом,

$$\int e^{-3x^2+1}x\,dx=-\frac{1}{6}\int e^u\,du=-\frac{1}{6}e^u+C=-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}+C.\ \bullet$$

56. 1) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int\frac{3x\,dx}{\cos^2 2x^2}$.

○ 1) Положим $\sqrt{x}=u$, откуда $dx/(\sqrt{x})=2\,du$. Следовательно,

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx=2\int\sin u\,du=-2\cos u+C=-2\cos\sqrt{x}+C.$$

2) Положим $2x^2=u$, откуда $4x\,dx=du$, $x\,dx=(1/4)\,du$. Таким образом,

$$\int\frac{3x\,dx}{\cos^2 2x^2}=\frac{3}{4}\int\frac{du}{\cos^2 u}=\frac{3}{4}\operatorname{tg}u+C=\frac{3}{4}\operatorname{tg}2x^2+C.\ \bullet$$

57. 1) $\int\frac{3^x\,dx}{\sqrt{25-9^x}}$; 2) $\int\frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$.

○ 1) Полагая $3^x=u$, находим $3^x\ln 3\,dx=du$, $\sqrt{25-9^x}=\sqrt{25-u^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{3^x\,dx}{\sqrt{25-9^x}}=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{du}{\sqrt{5^2-u^2}}=\frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{u}{5}+C=\frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{3^x}{5}+C.$$

2) Положим $\sin x=u$, откуда $\cos x\,dx=du$. Таким образом,

$$\int\frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}=\int\frac{du}{4+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2}+C.\ \bullet$$

Найдите следующие интегралы:

58. 1) $\int(7-2x)^3\,dx$; 2) $\int(5t-1)^4\,dt$;
3) $\int\frac{dx}{(4-3x)^2}$; 4) $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$.

59. 1) $\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx$; 2) $\int\sqrt{2x-1}\,dx$;
3) $\int\sqrt[3]{(4-3t)^2}\,dt$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$.

60. 1) $\int(x^2+3)^5x\,dx$; 2) $\int 4(x^4-1)^2x^3\,dx$;
3) $\int\frac{6z^2\,dz}{(1-2z^3)^4}$; 4) $\int\frac{x^3\,dx}{(5x^4+3)^5}$.

61. 1) $\int\sqrt{4x^3+1}\,x^2\,dx$; 2) $\int\sqrt{(x^4-1)^3}\,x^3\,dx$;
3) $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos x\,dx$ (подстановка $2\sin x-1=u$);
4) $\int\sqrt{e^x+1}\,e^x\,dx$ (подстановка $e^x+1=u$).

62. 1) $\int\sqrt{(3z^4+2)^3}\,z^3\,dz$; 2) $\int\sqrt[3]{(1-3x^2)^4}\,x\,dx$.

63. 1) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}}$; 3) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$;
4) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}}$; 5) $\int\frac{e^x\,dx}{(e^x+1)^3}$.

64. 1) $\int\frac{z^2\,dz}{1+z^3}$; 2) $\int\frac{e^{3x}\,dx}{e^{3x}+1}$; 3) $\int\frac{\cos x\,dx}{2\sin x+1}$.

65. 1) $\int\operatorname{tg}3x\,dx$; 2) $\int\operatorname{ctg}kx\,dx$; 3) $\int\operatorname{ctg}(x/2)\,dx$.

66. 1) $\int\frac{dx}{\sin 2x}$; 2) $\int\frac{dx}{\sin(x/3)}$; 3) $\int\frac{dx}{\cos 3x}$; 4) $\int\frac{dx}{\cos(x/2)}$.

67. 1) $\int\frac{dt}{t(1+\ln t)}$; 2) $\int\frac{(2-\ln t)\,dt}{t}$.

68. 1) $\int a^{x^4}x^3\,dx$; 2) $\int a^{2x}b^{2x}\,dx$.

69. 1) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int xe^{-x^2}\,dx$; 3) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 4) $\int\frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$.

70. 1) $\int t\sin(t^2-1)\,dt$; 2) $\int\sin(z/2)\,dz$; 3) $\int x^3\cos x^4\,dx$;
4) $\int\frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$; 5) $\int x\cos(x^2+1)\,dx$.

71. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$; 2) $\int\frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3}$; 3) $\int\frac{d\varphi}{\sin^2(\pi/3-\varphi)}$;
4) $\int\frac{dx}{x^2\sin^2(1/x)}$; 5) $\int\frac{dx}{x\sin^2\ln x}$.

72. 1) $\int\frac{e^\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-e^{2\varphi}}}$; 2) $\int\frac{dz}{z\sqrt{1-\ln^2 z}}$.

73. 1) $\int\frac{\sin x\,dx}{a^2+\cos^2 x}$; 2) $\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; 3) $\int\frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; 4) $\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Интегрируя обе части равенства $d(uv)=u\,dv+v\,du$, получим

$$\int d(uv)=\int u\,dv+\int v\,du;\quad uv=\int u\,dv+\int v\,du,$$

откуда

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{11.14}$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int u\,dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v\,du$, если последний окажется проще исходного.

74. Найти следующие интегралы:

1) $\int x\sin x\,dx$; 2) $\int\frac{\ln x\,dx}{x^2}$; 3) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

○ 1) Положим $u=x$, $dv=\sin x\,dx$; тогда $du=dx$, $\int dv=\int\sin x\,dx$, т. е. $v=-\cos x$. Используя формулу (11.14), получим

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

2) Положим $u=\ln x$, $dv=\frac{dx}{x^2}$; тогда $du=\frac{dx}{x}$, $\int dv=\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}\,dx=$ $=-\frac{1}{x}$; $v=-\frac{1}{x}$. По формуле (11.14) получим

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int x^{-2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

3) Положим $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $dv=dx$; тогда $du=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $v=x$. По формуле (11.14) получим

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

В числителе подынтегральной функции последнего интеграла прибавим и вычтем a^2 и представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx+$$
$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Последний интеграл находим по формуле (11.11):

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Перенеся $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ из правой части в левую, получим

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C,$$

или окончательно

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\ \bullet$$

Найдите следующие интегралы:

75. 1) $\int x\cos x\,dx$; 2) $\int(1-x)\sin x\,dx$.

76. 1) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$; 2) $\int\ln^2 x\,dx$.

77. 1) $\int xe^x\,dx$; 2) $\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

78. 1) $\int\arcsin x\,dx$; 2) $\int\operatorname{arctg}x\,dx$.

79. 1) $\int e^x\cos x\,dx$; 2) $\int e^x\sin x\,dx$.

80. Проверьте равенства интегрированием по частям:

1) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

2) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При вычислении интегралов вида $\int\sin^{2n}x\,dx$ или $\int\cos^{2n}x\,dx$ от четной степени синуса или косинуса используются формулы понижения степени

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

При вычислении интегралов вида $\int\sin^{2n+1}x\,dx$ или $\int\cos^{2n+1}x\,dx$ от нечетной степени синуса или косинуса нужно отделить от нечетной степени один множитель и ввести новую переменную, полагая $\cos x=t$ в первом интеграле и $\sin x=t$ — во втором.

При вычислении интегралов вида $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$ и $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$ применяются формулы

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x].$$

Найти следующие интегралы:

81. 1) $\int\cos^2 x\,dx$; 2) $\int\cos^4 x\,dx$.

○ 1) Заменяя $\cos^2 x$ на $(1+\cos 2x)/2$, получим

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

2) $\int\cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+$ $+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx$.

В последнем интеграле заменим $\cos^2 2x$ на $(1+\cos 4x)/2$; тогда получим

$$\int\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\,dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$$
$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.\ \bullet$$

82. 1) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$; 2) $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx$.

○ 1) Воспользовавшись соотношением $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, получим

$$\int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$$

2) $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\cos^2 x}-\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Вычислим первый интеграл. Полагая $\operatorname{tg}x=u$, найдем $dx/(\cos^2 x)=du$ и, следовательно,

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\cos^2 x} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Использовав результат предыдущего примера, окончательно получим

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \bullet$$

83. 1) $\int \sin^3 x\,dx$; 2) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

○ 1) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$.
Положим $\cos x = u$; тогда $-\sin x\,dx = du$ и, следовательно,

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx =$

$= \int \operatorname{tg} x\,d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C. \bullet$

84. 1) $\int \sin 5x \sin 3x\,dx$; 2) $\int \cos 4x \cos x\,dx$; 3) $\int \sin 7x \cos 3x\,dx$.

○ 1) $\int \sin 5x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

2) $\int \cos 4x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos 5x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C =$

$= \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$

3) $\int \sin 7x \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 10x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{10}\cos 10x\right) +$

$+ C = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C. \bullet$

Найдите следующие интегралы:

85. 1) $\int \sin^2 x\,dx$; 2) $\int \sin^4 x\,dx$.

86. 1) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

87. 1) $\int \cos^3 x\,dx$; 2) $\int \sin^5 x\,dx$;
3) $\int \cos^5 x\,dx$; 4) $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

88. 1) $\int \sin 3x \sin x\,dx$; 2) $\int \cos 5x \cos 3x\,dx$; 3) $\int \sin 4x \cos 3x\,dx$.

§ 7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

89. Найдите функцию, производная которой $y' = \sin 2x - xe^{3x^2} + 1$.

90. Найдите $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x + e}$, если при $x = \pi/2$ значение первообразной функции равно 2.

91. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку $A\,(\pi/3;\ 2)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $\cos(x/2)$.

92. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v = \sin 2t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = \pi/6$ она находилась на расстоянии 0,75 м от начала отсчета.

93. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = (-6t + 24)$ м/с^2. В момент времени $t = 1$ с ее скорость $v = 15$ м/с, а пройденный путь $s = 20$ м. Найдите: 1) закон изменения скорости точки; 2) закон движения точки; 3) ускорение, скорость и путь в момент $t = 3$ с; 4) момент времени, когда скорость точки будет наибольшей.

Найдите следующие интегралы:

94. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$.

95. $\int e^{\sin x} \cos x \sqrt{e^{\sin x} + 1}\,dx$.

96. $\int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos x}$.

97. $\int \frac{\cos x\,dx}{9 + \sin^2 x}$.

98. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

99. $\int \sin 5x \cos x\,dx$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$;

2) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9 - 4x^2}} + \frac{1}{e^x}\right)dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

4) Составьте уравнение кривой, проходящей через точку $(-2;\ 8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания равен $2x - 4$.

5) Скорость прямолинейного движения точки $v = 3t^2 + 6t - 4$. Найдите закон движения точки, если за время $t = 2$ с она прошла путь 8 м.

II вариант

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} - x^{-1/2}}{x\sqrt{x}}\,dx$;

2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} + \frac{1}{e^x}\right)dx$;

3) $\int (4\sin^2 x \cos x - \cos x)\,dx$.

4) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A\,(\pi/3;\ 1/2)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $\sin x$.

5) Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 6t + 6$. Найдите закон движения точки, если $s = 0$ в момент времени $t = 0$, а в момент времени $t = 3$ с скорость $v = 40$ м/с.

Глава 12
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$ произвольную точку ξ_k и обозначим через

Δx_k длину каждого такого отрезка. *Интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т. е. *определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Вычислить следующие определенные интегралы:

1. 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_2^3 x^2\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)\,dx$.

○ По формуле Ньютона — Лейбница получаем:

1) $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2-0^2) = \frac{1}{2}$;

2) $\int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3-2^3) = \frac{19}{3}$;

3) $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2+2\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2+(-1)\right] = 9$. ●

2. 1) $\int_{-1}^1 e^x\,dx$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

○ 1) $\int_{-1}^1 e^x\,dx = e^x\Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2-1}{e}$;

2) $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$. ●

3. 1) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx$; 2) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

○ 1) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

2) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$. ●

4. 1) $\int_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

○ 1) $\int_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$;

2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$. ●

Вычислите следующие определенные интегралы:

5. 1) $\int_0^2 x^2\,dx$; 2) $\int_1^2 x^3\,dx$; 3) $\int_1^3 x^4\,dx$.

6. 1) $\int_{-2}^3 (4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$; 2) $\int_{-1}^0 (x^3+2x)\,dx$.

7. 1) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

8. 1) $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 2) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

3) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; 4) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$.

9. 1) $\int_1^3 e^{2x}\,dx$; 2) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$.

10. 1) $\int_3^6 \frac{dx}{x}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$; 3) $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$; 4) $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$.

11. 1) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,dx$; 2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$; 3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\,dx$.

12. 1) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$; 3) $\int_0^{\pi} \cos(x/2)\,dx$.

13. 1) $\int_0^{\pi/4} \frac{4dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

14. 1) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$; 2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx$.

15. 1) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 3) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

16. 1) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$; 3) $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется с помощью подстановки $u=\psi(x)$ или $x=\varphi(u)$ в определенный интеграл относительно новой переменной u. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые находятся из исходной подстановки.

Из первой подстановки новые пределы интегрирования вычисляются непосредственно: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

Из второй подстановки новые пределы интегрирования находятся путем решения уравнений $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$ относительно α и β.

Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = \int_\alpha^\beta F(u)\,du.$$

17. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_2^3 (2x-1)^3\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$; 3) $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2\,dx$; 4) $\int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

○ 1) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $2x-1=u$. Дифференцируя, имеем $2dx=du$, откуда $dx=(1/2)\,du$. Находим новые пределы интегрирования. Подставляя в соотношение $2x-1=u$ значения $x=2$ и $x=3$, соответственно получим $u_н=2\cdot2-1=3$, $u_в=2\cdot3-1=5$. Следовательно,

$$\int_2^3 (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_3^5 u^3\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4-3^4) = 68.$$

2) Положим $5x-1=u$; тогда $5dx=du$, $dx=(1/5)\,du$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_н=5\cdot1-1=4$, $u_в=5\cdot2-1=9$. Поэтому

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int_1^2 (5x-1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{5}\int_4^9 u^{-1/2}\,du = \frac{2}{5}u^{1/2}\Big|_4^9 = \frac{2}{5}(9^{1/2}-4^{1/2}) = \frac{2}{5}.$$

3) Положим $2x^3+1=u$; тогда $6x^2dx=du$, $x^2dx=(1/6)\,du$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_н=2\cdot0^3+1=1$, $u_в=2\cdot1^3+1=3$. Таким образом,

$$\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx = \frac{1}{6}\int_1^3 u^4\,du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}\Big|_1^3 = \frac{1}{30}(3^5-1^5) = 8\frac{1}{15}.$$

4) Преобразуем подкоренное выражение: $4-9x^2=4[1-(3x/2)^2]$. Положим $3x/2=u$, откуда $dx=(2/3)\,du$. Найдем новые пределы интегрирования: $u_н=(3/2)\cdot(\sqrt{2}/3)=\sqrt{2}/2$, $u_в=(3/2)\cdot(\sqrt{3}/3)=\sqrt{3}/2$. Следовательно,

$$\int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin u\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{36}. \bullet$$

Вычислите с помощью подстановок следующие определенные интегралы:

18. 1) $\int_4^5 (4-x)^3\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$.

19. 1) $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}\,dx$; 2) $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}\,dx$; 3) $\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

20. 1) $\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3 x\,dx$; 2) $\int_{0}^{2}\frac{4x\,dx}{(x^2-1)^3}$;

3) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; 4) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{32x\,dx}{(x^2+1)^5}$.

21. 1) $\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{3\sin x+1}\cos x\,dx$; 2) $\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sqrt{1-\cos x}\sin x\,dx$.

22. 1) $\int_{0}^{\pi/3}\frac{\sin x\,dx}{3-\cos x}$; 2) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$; 3) $\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos t}$.

23. 1) $\int_{0}^{\pi/6}e^{\sin x}\cos x\,dx$; 2) $\int_{0}^{1}e^{x^2}x\,dx$; 3) $\int_{0}^{\sqrt[3]{2}}3e^{x^3}x^2\,dx$.

24. 1) $\int_{\pi/12}^{\pi/8}\sin 2x\,dx$; 2) $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx$; 3) $\int_{2\pi/9}^{\pi/3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)dx$.

25. 1) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$; 2) $\int_{\pi/18}^{\pi/12}\cos 3x\,dx$; 3) $\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\cos\frac{x}{4}dx$.

26. 1) $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 2x}$; 2) $\int_{0}^{\pi/12}\frac{dx}{\cos^2 3x}$; 3) $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{\cos^2(x/3)}$.

27. 1) $\int_{\pi/18}^{\pi/9}\frac{dx}{\sin^2 3x}$; 2) $\int_{0}^{\pi/12}\frac{dx}{\sin^2(\pi/6+x)}$; 3) $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{\sin^2(x/3)}$.

28. 1) $\int_{3/2}^{3\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}$; 2) $\int_{\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3}\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$; 3) $\int_{\sqrt{3}/2}^{3\sqrt{2}/4}\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

29. 1) $\int_{3/4}^{3\sqrt{3}/4}\frac{4dx}{9+16x^2}$; 2) $\int_{0}^{\sqrt{6}/6}\frac{dx}{1+2x^2}$; 3) $\int_{1/2}^{3/2}\frac{dx}{3+4x^2}$.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

30. Вычислить $\int_e^4 x\ln x\,dx$.

○ Положим $u=\ln x$, $dv=x\,dx$; тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^2}{2}$. Следовательно,

$$\int_e^4 x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^4-\frac{1}{2}\int_e^4 x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_e^4=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-4+\frac{e^2}{4}=8\ln 4-4-\frac{e^2}{4}.\ \bullet$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите определенные интегралы:

31. 1) $\int_0^1\arcsin x\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx$; 3) $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$.

32. 1) $\int_1^e\ln^2 x\,dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Формулы прямоугольников:

$$\int_a^b y\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1});\qquad(12.1)$$

$$\int_a^b y\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n).\qquad(12.2)$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b y\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Формула параболических трапеций (формула Симпсона):

$$\int_a^b y\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})].$$

33. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$, приняв $n=2$.

○ Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1-0}{6\cdot 2}\left[y_0+y_4+4(y_1+y_3)+2y_2\right].$$

Так как $y=f(x)=1/(1+x^2)$, $y_0=f(0)=1$, $y_1=f(1/4)=16/17$, $y_2=f(1/2)=4/5$, $y_3=f(3/4)=16/25$, $y_4=f(1)=1/2$, то

$$\int_0 \frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{12}\left[1+\frac{1}{2}+4\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)+2\cdot\frac{4}{5}\right]=0{,}78539.$$

Точное значение интеграла есть $\pi/4=0{,}78540$; относительная погрешность $\varepsilon=0{,}00127\%$. ●

34. Вычислите приближенно определенные интегралы:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников (12.1) ($n=10$);

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций ($n=10$);

3) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ по формуле прямоугольников (12.2) ($n=12$);

4) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$ по формуле трапеций ($n=6$);

5) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$ по формуле Симпсона ($2n=6$).

Глава 13
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ВЕЛИЧИН. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

1. Применение определенного интеграла к вычислению различных величин. Определеиный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических и физических величин. Вычислеиие некоторой величины u, соответствующей промежутку $a\leqslant x\leqslant b$ изменения независимой переменной x, выполняется по следующей схеме:

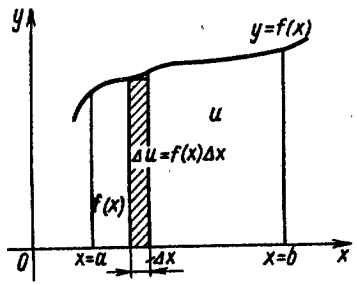


Рис. 67

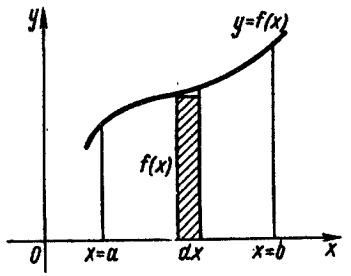


Рис. 68

1. Пусть величина u получает приращение $\Delta u\approx f(x)\Delta x$, соответствующее изменению x на малую величину Δx; $f(x)$ рассматривается как даиная или определяемая из условия задачи функция от x (рис. 67).

2. Заменив приращение Δu дифференциалом du (главная часть приращения Δu) и Δx — дифференциалом $dx(\Delta x=dx)$, получим

$$du=f(x)\,dx.$$

3. Интегрируя это равенство в пределах от $x=a$ до $x=b$, находим

$$u=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Вычисление площади плоской фигуры. Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a\leqslant x\leqslant b$, $f(x)\geqslant 0$ (рис. 68).

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т. е. $dS=f(x)\,dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{13.1}$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c\leqslant y\leqslant d$, $x=\varphi(y)\geqslant 0$ (рис. 69), то дифференциал переменной площади S равен $dS=f(y)\,dy$, откуда

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy. \tag{13.2}$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, лежит под осью Ox (рис. 70), площадь находится по формуле

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{13.3}$$

Если фигура, ограниченная кривой $f(y)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 71), то

$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{13.4}$$

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a\leqslant x\leqslant b$ и $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ (рис. 72). Тогда ее площадь находится по формуле

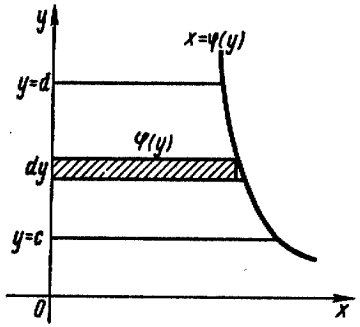


Рис. 69

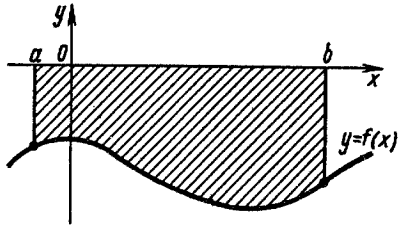


Рис. 70

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (13.5)$$

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1. $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=-3$ и $x=2$.

○ Выполним построение фигуры. Строим прямую $x+2y-4=0$ по двум точкам $A(4;\,0)$ и $B(0;\,2)$ (рис. 73). Выразив y через x, получим $y=-0{,}5x+2$. По формуле (13.1), где $f(x)=-0{,}5x+2$, $a=-3$, $b=2$, находим

$$S=\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)\,dx=\left[-0{,}25x^2+2x\right]_{-3}^{2}=11{,}25 \text{ (кв. ед.)}$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: $M_1M=f(-3)=-0{,}5(-3)+2=3{,}5$, $N_1N=f(2)=-0{,}5\cdot 2+2=1$, $M_1N_1=5$. Следовательно, $S=0{,}5(3{,}5+1)\cdot 5=11{,}25$ (кв. ед.). ●

2. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$ и $y=0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 74). Построим прямую $x-2y+4=0$: $y=0$, $x=-4$, $A(-4;\,0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0;\,2)$. Построим прямую $x+y-5=0$: $y=0$, $x=5$, $C(5;\,0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0;\,5)$.

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0, \end{cases} \quad x=2,\ y=3,\ M(2;\,3).$$

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь

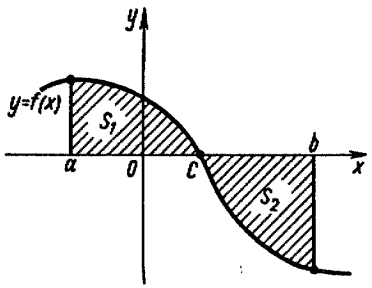


Рис. 71

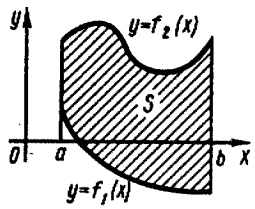


Рис. 72

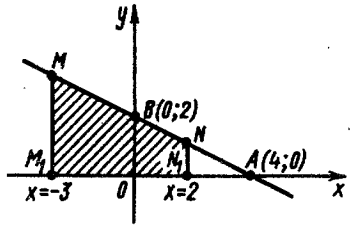


Рис. 73

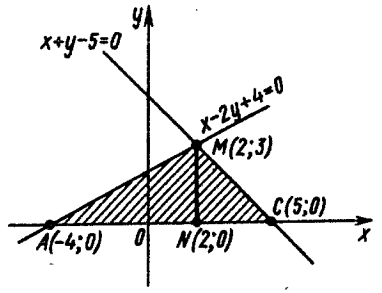


Рис. 74

ограничена прямой $x-2y+4=0$, а при изменении x от N до C — прямой $x+y-5=0$.

Для треугольника AMN имеем: $x-2y+4=0$; $y=0{,}5x+2$, т. е. $f(x)=0{,}5x+2$, $a=-4$ и $b=2$. Для треугольника NMC имеем: $x+y-5=0$, $y=-x+5$, т. е. $f(x)=-x+5$, $a=2$ и $b=5$.

Вычислив площадь каждого из треугольников и сложив результаты, находим:

$$S_{\Delta AMN}=\int_{-4}^{2}(0{,}5x+2)\,dx=\left[0{,}25x^2+2x\right]_{-4}^{2}=9 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S_{\Delta NMC}=\int_{2}^{5}(-x+5)\,dx=\left[-0{,}5x^2+5x\right]_{2}^{5}=4{,}5 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S=S_{\Delta AMN}+S_{\Delta NMC}=9+4{,}5=13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка: $S_{\Delta AMC}=0{,}5AC\cdot NM=0{,}5\cdot 9\cdot 3=13{,}5$ (кв. ед.). ●

3. $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ и $x=3$.

○ В данном случае требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=2$ и $x=3$ и осью Ox (рис. 75). По формуле (13.1) находим

$$S=\int_2^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=6\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}. \bullet$$

4. $y=-x^2+4$ и $y=0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 76). Искомая площадь заключена между параболой $y=-x^2+4$ и осью Ox.

Найдем точки пересечения параболы с осью Ox. Полагая $y=0$, найдем $x=\pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy, то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Oy, и полученный результат удвоим:

$$S_1=\int_0^2(-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2=5\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)};$$

$$S=2S_1=2\cdot 5\frac{1}{3}=10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \bullet$$

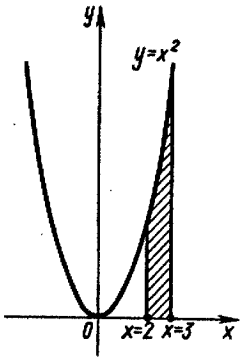


Рис. 75

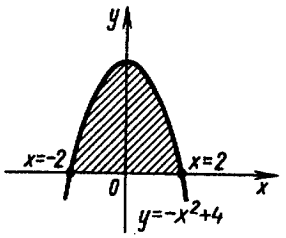


Рис. 76

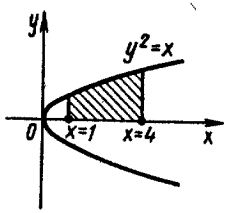


Рис. 77

5. $y^2=x$, $y\geqslant 0$, $x=1$ и $x=4$.

○ Здесь требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной верхней ветвью параболы $y^2=x$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=4$ (рис. 77). По формуле (13.1), где $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$ и $b=4$, находим

$$S=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{1/2}\,dx=\frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(4^{3/2}-1^{3/2})=\frac{2}{3}(8-1)=4\frac{2}{3}\text{(кв. ед.)}.\ \bullet$$

6. $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi$.

○ Искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью Ox (рис. 78). Имеем

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2\,\text{(кв. ед.)}.\ \bullet$$

7. $y=-6x$, $y=0$ и $x=4$.

○ Фигура расположена под осью Ox (рис. 79). Следовательно, ее площадь находим по формуле (13.3):

$$S=\left|-\int_0^4 6x\,dx\right|=|[-3x^2]_0^4|=|-48|=48\,\text{(кв. ед.)}.\ \bullet$$

8. $y=(1/3)x^3$, $y=0$, $x=-1$ и $x=2$.

○ Кривую $y=(1/3)x^3$ построим по точкам (рис. 80). Фигура, ограниченная данными линиями, расположена по обе стороны от оси Ox. Таким образом, площадь фигуры находим по формуле (13.4):

$$S=\left|\int_{-1}^0\frac{1}{3}x^3\,dx\right|+\int_0^2\frac{1}{3}x^3\,dx=\left|\left[\frac{x^4}{12}\right]_{-1}^0\right|+\left[\frac{x^4}{12}\right]_0^2=\left|-\frac{1}{12}\right|+\frac{16}{12}=$$

$$=1\frac{5}{12}\text{(кв. ед.)}.\ \bullet$$

9. $x^2+y^2=r^2$.

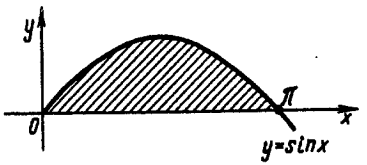


Рис. 78

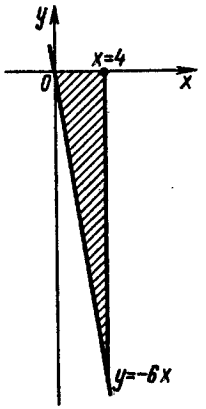


Рис. 79

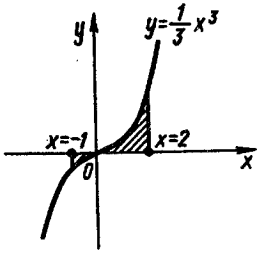


Рис. 80

○ Здесь требуется вычислить площадь, ограниченную окружностью $x^2+y^2=r^2$, т. е. площадь круга радиуса r с центром в начале координат. Найдем четвертую часть этой площади, взяв пределы интегрирования от 0 до r; имеем $S_1=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$. Интеграл этого вида рассмотрен в примере 80 (2) гл. 11:

$$S_1=\left[\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}\right]_0^r=\frac{r^2}{2}\arcsin 1=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi r^2}{4}.$$

Следовательно, $S=4S_1=\pi r^2$. ●

10. $y=x^2$ и $y=2x$.

○ Данная фигура ограничена параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x$ (рис. 81). Для определения точек пересечения заданных линий решим систему уравнений

$$\begin{cases}y=x^2,\\ y=2x,\end{cases}$$

откуда находим $x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$ Используя для нахождения искомой площади формулу (13.5), получим

$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\ \text{(кв. ед.)}.\ \bullet$$

11. $7x^2-9y+9=0$ и $5x^2-9y+27=0$.

○ Запишем уравнения парабол в виде $y=(7/9)x^2+1$ и $y=(5/9)x^2+3$ и построим эти параболы (рис. 82). Для нахождения точек их пересечения решим систему

$$\begin{cases}y=(7/9)x^2+1,\\ y=(5/9)x^2+3,\end{cases}$$

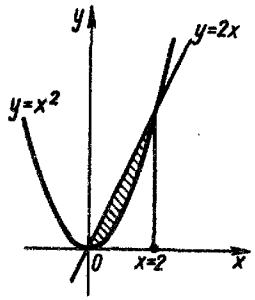


Рис. 81

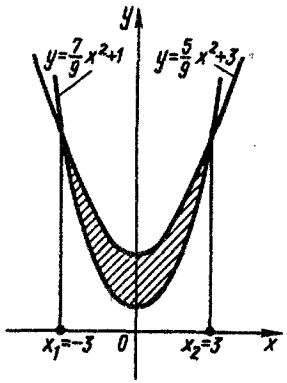


Рис. 82

откуда $x_1=-3$, $x_2=3$. Так как фигура симметрична относительно оси Oy, то найдем половину ее площади, взяв пределы интегрирования от 0 до 3, и результат удвоим:

$$S_1=\int_0^3\left[\left(\frac{5}{9}x^2+3\right)-\left(\frac{7}{9}x^2+1\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^3\left(2-\frac{2}{9}x^2\right)dx=2\left[x-\frac{x^3}{27}\right]_0^3=2(3-1)=4 \text{ (кв. ед.);}$$

$$S=2S_1=8 \text{ (кв. ед.).} \bullet$$

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

12. 1) $x-y+2=0$, $y=0$, $x=-1$ и $x=2$; 2) $2x-3y+6=0$, $y=0$ и $x=3$.

13. 1) $x-y+3=0$, $x+y-1=0$ и $y=0$; 2) $x-2y+4=0$, $x+2y-8=0$, $y=0$, $x=-1$ и $x=6$.

14. 1) $y=x^2$, $y=0$, $x=0$ и $x=3$; 2) $y=3x^2$, $y=0$, $x=-3$ и $x=2$.

15. 1) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$ и $x=2$; 2) $y=0{,}5x^2+2$, $y=0$, $x=1$ и $x=3$; 3) $y=-(1/3)x^2+3$, $y=0$, $x=0$ и $x=3$.

16. $y^2=x$, $y\geqslant 0$, $x=0$ и $x=3$.

17. 1) $y=-x^2-2x+8$, $y=0$; 2) $y=-(2/9)x^2+(4/3)x$, $y=0$; 3) $y=-x^2+6x-5$, $y=0$, $x=2$ и $x=3$.

18. 1) $y=1/x$, $y=0$, $x=1$ и $x=3$; 2) $y=2/x$, $y=0$, $x=2$ и $x=4$.

19. 1) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi/2$; 2) $y=\operatorname{tg}x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi/3$; 3) $y=\operatorname{tg}x$, $y=0$, $x=\pi/6$ и $x=\pi/3$.

20. 1) $y=-3x$, $y=0$ и $x=2$; 2) $y=2x$, $y=0$ и $x=-3$.

21. 1) $y=-3x^2$, $y=0$, $x=1$ и $x=2$; 2) $y=-x^2-1$, $y=0$, $x=-2$ и $x=1$; 3) $y=x^2-4$ и $y=0$.

22. 1) $y=x^3$, $y=0$, $x=-2$ и $x=2$; 2) $y=4x^3$, $y=0$, $x=-1$ и $x=2$; 3) $y=x^3-x$, $y=0$, $x=-1$ и $x=1$.

23. 1) $y^2=4x$, $x=1$ и $x=9$; 2) $y^2=9x$ и $x=4$.

24. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$; 3) $x^2/16+y^2/9=1$.

25. 1) $y=\sin x$, $y=0$, $x=-\pi/2$ и $x=\pi$; 2) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=2\pi$.

26. 1) $y=x^2$ и $y=-3x$; 2) $y=x^2$ и $y=2x+8$; 3) $y=x^2$ и $y=x+2$; 4) $y=x^2+2$ и $y=6$.

27. 1) $y=0{,}5x^2-4x+10$ и $y=x+2$; 2) $y=x^2-2x+3$ и $y=3x-1$; 3) $y=(1/3)x^2-2x+4$ и $y=-x+10$.

28. 1) $y=2x^2+1$ и $y=x^2+10$; 2) $y=-1{,}5x^2+9x-7{,}5$ и $y=-x^2+6x-5$.

29. 1) $y=x^2$ и $y=2-x^2$; 2) $y=x^2$ и $x=y^2$.

30. 1) $x^2=3y$ и $y=x$; 2) $y=x^2-6x+9$ и $3x-y-9=0$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Вычислите интегралы:

1) $\int_0^2 \frac{4x\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$;

2) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{3dx}{2\cos^2(x/2)}$;

3) $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{3+x^2}$.

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

4) $y=-x^2+x+6$ и $y=0$;

5) $y=x^2-8x+18$, $y=-2x+18$.

II вариант

Вычислите интегралы:

1) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$;

3) $\int_{1/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

4) $y=-x^2+2x+3$ и $y=0$;

5) $y=-x^2+10x-16$, $y=x+2$.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПУТИ, ПРОЙДЕННОГО ТОЧКОЙ

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v=f(t)\geqslant 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$s=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \qquad (13.6)$$

31. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

○ Согласно условию, $f(t)=3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле (13.6) находим

$$s=\int_0^{10}(3t^2+2t+1)\,dt=\left[t^3+t^2+t\right]_0^{10}=10^3+10^2+10=1110 \text{ (м).} \bullet$$

32. Скорость движения точки $v=(9t^2-8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

○ Согласно условию, $f(t)=9t^2-8t$, $t_1=3$, $t_2=4$. Следовательно,

$$s=\int_3^4(9t^2-8t)\,dt=[3t^3-4t^2]_3^4=83\ (\text{м}).\ \bullet$$

33. Скорость движения точки $v=(12t-3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

○ Скорость точки равна нулю в момент начала движения и в момент остановки. Определим, в какой момент точка остановится; для этого решим уравнение $12t-3t^2=0$, откуда $t(4-t)=0$, $t_1=0$, $t_2=4$. Теперь по формуле (13.6) находим

$$s=\int_0^4(12t-3t^2)\,dt=[6t^2-t^3]_0^4=32\,(\text{м}).\ \bullet$$

34. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(6t^2+2t)$ м/с, второе — со скоростью $v=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

○ Очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1=\int_0^5(6t^2+2t)\,dt=[2t^3+t^2]_0^5=275\ (\text{м}).$$

$$s_2=\int_0^5(4t+5)\,dt=[2t^2+5t]_0^5=75\ (\text{м}).$$

$$s_1-s_2=275-75=200\ (\text{м}).\ \bullet$$

35. Два тела движутся по прямой из одной и той же точки. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2-6t)$ м/с, второе — со скоростью $v=(10t+20)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?

○ Согласно условию, тела начали двигаться из одной и той же точки, поэтому расстояния, пройденные ими до встречи, равны. Найдем законы движения каждого из тел:

$$s_1=\int(3t^2-6t)\,dt=t^3-3t^2;\ \ s_2=\int(10t+20)\,dt=5t^2+20t.$$

Постоянные интегрирования при начальных условиях $t=0$, $s=0$ равны нулю. Встреча этих тел произойдет при условии $s_1=s_2$, откуда $t^3-3t^2=5t^2+20t$, или $t^3-8t^2-20t=0$. Решим это уравнение:

$$t(t^2-8t-20)=0,$$

т. е. $t_1=0$, $t_2=-2$, $t_3=10$. Таким образом, встреча этих тел произойдет в момент $t=10$ с.

Подставив значение $t=10$ в равенство, определяющее закон движения любого из тел (например, первого), найдем расстояние, пройденное каждым телом до встречи: $s_1=s_2=10^3-3\cdot10^2=700$ (м). ●

36. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v=(39{,}2-9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

○ Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда $v=0$, т. е. $39{,}2-9{,}8t=0$, откуда $t=4$ с. По формуле (13.6) находим

$$s=\int_0^4(39{,}2-9{,}8t)\,dt=[39{,}2t-4{,}9t^2]_0^4=78{,}4\ (\text{м}).\ \bullet$$

37. Скорость движения точки $v=(6t^2+4)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

38. Скорость движения точки $v=(2t+8t^{-2})$ м/с. Найдите ее путь за 2-ю секунду.

39. Скорость движения точки $v=(18t-3t^2)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

40. Скорость движения точки $v=(24t-6t^2)$ м/с. Найдите: 1) путь, пройденный точкой за 3 с от начала движения; 2) путь, пройденный точкой за 3-ю секунду; 3) путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

41. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=3t^2$ м/с, второе — со скоростью $v=(6t^2+10)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с?

42. Два тела движутся по прямой из одной и той же точки. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2+4t)$ м/с, второе — со скоростью $v=(6t+12)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?

43. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v=(29{,}4-9{,}8t)$ м/с. Найдите наибольшую высоту подъема тела.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находится по формуле

$$A=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{13.7}$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F=kx, \tag{13.8}$$

где F — сила, Н; x — абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k — коэффициент пропорциональности, Н/м.

44. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

○ Так как $x=0{,}01$ м при $F=10$ Н, то, подставляя эти значения в равенство (13.8), получим $10=k\cdot0{,}01$, откуда $k=1000$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F=1000x$, т. е. $f(x)=1000x$. Искомую работу найдем по формуле (13.7), полагая $a=0$, $b=0{,}04$:

$$A=\int_0^{0{,}04}1000x\,dx=500x^2\big|_0^{0{,}04}=0{,}8\ (\text{Дж}).\ \bullet$$

45. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

○ Используя равенство (13.8), имеем $50=0{,}01\,k$, т. е. $k=5000$ Н/м. Находим пределы интегрирования: $a=0{,}22-0{,}2=0{,}02$ (м), $b=0{,}32-0{,}2=0{,}12$ (м). Теперь по формуле (13.7) получим

$$A=\int_{0{,}02}^{0{,}12}5000x\,dx=5000\frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}02}^{0{,}12}=$$

$$=2500\left(0{,}0144-0{,}0004\right)=2500\cdot0{,}014=35\ (\text{Дж}).\ \bullet$$

46. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

○ Зная величину сжатия пружины (0,05) м и произведенную при этом работу (25 Дж), воспользуемся формулой (13.7):

$$25=\int_0^{0{,}05}kx\,dx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}5}=0{,}00125\,k,$$

откуда $k=25/0{,}00125=20\,000$ (Н/м). Теперь по этой же формуле находим

$$A=\int_0^{0{,}1}20\,000x\,dx=20\,000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}1}=20\,000\cdot\frac{0{,}01}{2}=100\ (\text{Дж}).\ \bullet$$

47. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?

○ Так как известны величина растяжения пружиины (0,04 м) и произведенная при этом работа (20 Дж), то, используя формулу (13.7), имеем

$$20=\int_0^{0{,}04}kx\,dx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04}=0{,}0008\,k,$$

откуда $k=20/0{,}0008=25\,000$ (Н/м).

Пусть x_1 — величина растяжения пружины, соответствующая произведенной при этом работе в 80 Дж. Тогда

$$80=\int_0^{x_1}25\,000x\,dx=25\,000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1}=12\,500x_1^2,$$

откуда $x_1^2=80/12\,500=16/2500$; $x_1=4/50=0{,}08$ м. ●

48. Цилиндр с подвижным поршнем, площадь поперечного сечения которого S кв. ед., заполнен газом. Считая, что при увеличении объема газа в цилиндре соблюдается закон Бойля—Мариотта $pV=k=\text{const}$, вычислить работу, произведенную силой давления газа при увеличении его объема от V_0 до V_1 (температура газа поддерживается постоянной).

○ Пусть x (м) — расстояние, пройденное поршнем (рис. 83). Предположим, что при изменении x на малую величину dx испытываемое поршнем давление останется неизменным; при этом объем V изменится на величину ΔV. Тогда работа ΔA силы давления на отрезке dx выразится приближенным равенством $\Delta A\approx pS\,dx$. Так как $p=k/V$ и $S\,dx=\Delta V$, то

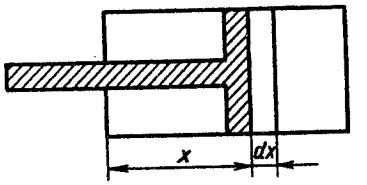


Рис. 83

$$\Delta A\approx\frac{k}{V}\Delta V=k\frac{\Delta V}{V}.$$

Заменив приращения ΔV и ΔA дифференциалами dV и dA, получим

$$dA=k\frac{dV}{V}.$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от V_0 до V_1, найдем

$$A=k\ln\left(V_1/V_0\right).\ \bullet$$

49. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы 60 Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12 м?

50. Под действием силы 80 Н пружина растягивается на 0,02 м. Первоначальная длина пружины равна 0,15 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,2 м?

51. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,12 до 0,14 м?

52. При сжатии пружины на 0,05 м совершается работа 30 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08 м?

53. Для сжатия пружины на 0,02 м необходимо совершить работу 16 Дж. На какую длину можно сжать пружину, совершив работу 100 Дж?

54. В цилиндрическом сосуде объема $V_0=0{,}2$ м^3 заключен атмосферный воздух при нормальном давлении $P_0=101\,325$ Н/м^2. Воздух сжимается поршнем до объема 0,05 м^3. Какая работа производится при этом, если температура воздуха поддерживается постоянной?

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ, ПРОИЗВОДИМОЙ ПРИ ПОДНЯТИИ ГРУЗА

55. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

○ Выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx (рис. 84). Работа A, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом P на высоту x, равна Px.

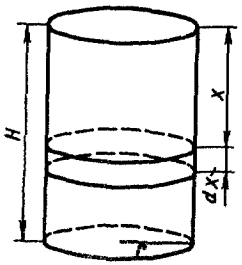


Рис. 84

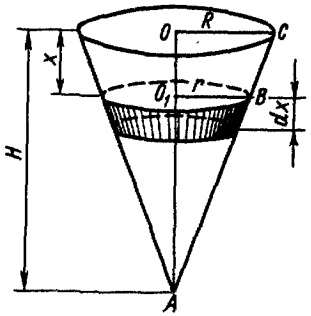


Рис. 85

Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $dV=\pi r^2 dx$ и изменение веса P на величину* $dP=9807\pi r^2 dx$; при этом совершаемая работа A изменится на величину $dA=9807\pi r^2 x\,dx$. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H, получим

$$A=\int_0^H 9807\pi r^2 x\,dx=4903\pi r^2 H^2=4903\pi\cdot 0{,}25\cdot 2^2=4903\pi \text{ (Дж)}. \bullet$$

56. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса $R=1$ м, высота конуса 2 м.

○ Выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx (рис. 85). Работа A, совершаемая на поднятие слоя воды весом P, зависит от высоты его подъема x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину

$$\Delta V=\pi r^2 dx \qquad (*)$$

(элементарный слой принимаем за цилиндр ввиду малости dx; r — радиус основания слоя). Выразим r через переменную x и постоянные R и H. Из подобия треугольников AOC и AO_1B имеем $r:R=(H-x):H$, откуда $r=\frac{R}{H}\times$ $\times(H-x)=R-\frac{R}{H}x$. Подставив значение r из последнего равенства в выражение (*), получим

$$\Delta V=\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

Вес ΔP слоя воды в объеме ΔV (плотность воды 1000 кг/м^3) составляет

$$\Delta P=9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

При изменении P на величиину ΔP совершаемая работа A измеиится иа величину

$$dA=9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 x\,dx. \qquad (**)$$

Проинтегрировав равенство (**) при изменении x от 0 до H, получим

$$A=\int_0^H 9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 x\,dx=\int_0^H 9807\pi R^2\left(x-\frac{2x^2}{H}+\frac{x^3}{H^2}\right)dx=$$

$$=9807\pi R^2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3H}+\frac{x^4}{4H^2}\right]_0^H=\frac{9807}{12}\pi R^2 H^2.$$

Подставив числовые значения R и H, находим

$$A=9807\pi\cdot 1^2\cdot\frac{2^2}{12}=3269\pi \text{ (Дж)}. \bullet$$

57. Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной 3 м, а высота равна 2 м, заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.

58. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и *высотой 3 м заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести,* чтобы выкачать воду из резервуара.

59. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать воду из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), высота которого $H=1$ м, а радиус основания $R=2$ м.

60. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара с радиусом $R=1$ м.

61. Вычислите работу, совершаемую при выкачивании воды из наполненного доверху котла, имеющего форму параболоида вращения (с вершиной внизу). Глубина котла $H=1$ м, радиус основания $R=2$ м.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Значение силы P давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения x этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P=9807\,\delta S x,$$

где δ — плотность жидкости, кг/м^3; S — площадь площадки, м^2; x — глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения $P(x)$.

62. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

* Так как плотность воды равиа 1000 кг/м^3, то вес воды в объеме 1 м^3 составляет $9{,}807\cdot 1000=9807$ Н. Поэтому вес dP слоя воды в объеме dV равен $9807\pi r^2 dx$.

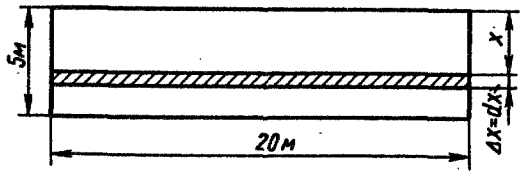


Рис. 86

○ На глубине x выделим горизонтальную полоску шириной dx (рис. 86). Сила давления P на стенку шлюза есть функция от x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давлеиия P на малую величину ΔP. Продифференцировав переменную P, получим приближенное значение (главную часть) dP приращения ΔP.

Находим приближенное значение силы давления воды на эту полоску: $\Delta P=9{,}807\,\delta x\Delta S=9807x\cdot 20\Delta x$. Но $dP\approx\Delta P$. Интегрируя dP при изменении x от 0 до 5, получим

$$P=9807\cdot 20\int_0^5 x\,dx=9807\cdot 10x^2\Big|_0^5=2{,}45\,(\text{МН}).\ \bullet$$

63. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и $b\,(a>b)$ и высотой h.

○ Пусть заштрихованная полоска расположена на глубине x (рис. 87) и имеет размеры y и dx. Приближенное значение силы давления воды на эту полоску составляет $\Delta P\approx xy\,dx=dP$. Выразим переменную y через x и размеры трапеции a, b и h. Из подобия треугольников ADE и ANM имеем $DE:NM=AE:AM$. Так как $DE=(a-b)/2$, $NM=(y-b)/2$, $AE=h$ и $AM=h-x$, то, подставив эти значения в пропорцию, получим

$$\frac{a-b}{y-b}=\frac{h}{h-x},\ \text{откуда}\ y=a-\frac{a-b}{h}x.$$

Следовательно,

$$dP=x\left(a-\frac{a-b}{h}x\right)dx.$$

Интегрируя dP при изменении x от 0 до h, находим

$$P=\int_0^h\left(ax-\frac{a-b}{h}x^2\right)dx=\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{a-b}{3h}x^3\right]_0^h=\frac{h^2(a+2b)}{6}.\ \bullet$$

64. Треугольная пластинка с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку.

○ Выделим на глубине x горизонтальную полоску шириной dx (рис. 88). Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину dP. Площадь полоски $\Delta S=y\,dx$. Из подобия треугольников ABC и DEC имеем $y:0{,}2=x:0{,}4$, откуда $y=0{,}5x$. Следовательно, $\Delta S=0{,}5x\,dx$. Элементарная сила давления (Н) составляет

$$dP=9{,}807\,\delta x\,\Delta S=9807x\cdot 0{,}5x\,dx=4903{,}5x^2\,dx.$$

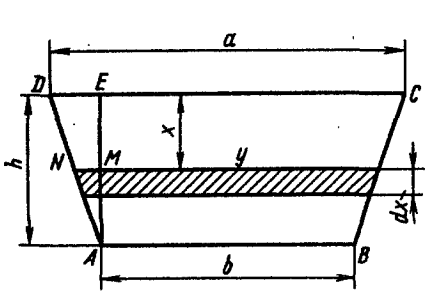


Рис. 87

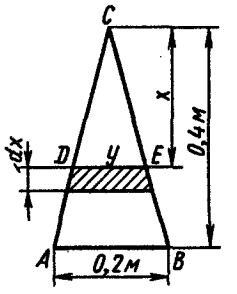


Рис. 88

Интегрируя dP при изменении x от 0 до 0,4, получим

$$P=4903{,}5\int_0^{0,4}x^2\,dx=4903{,}5\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,4}=1634{,}5\cdot 0{,}4^3\approx 104{,}6\,(\text{Н}).\ \bullet$$

65. Вычислите силу давления воды на вертикальную прямоугольную стенку с основанием 2 м и высотой 4 м. Уровень воды совпадает с верхним обрезом стенки.

66. *Вычислите силу давления* воды на вертикальную стенку, имеющую форму равнобедренной трапеции. Верхнее основание трапеции, совпадающее с уровнем воды, равно 4,5 м, а нижнее основание равно 3 м; высота стенки 2 м.

67. Треугольная пластинка с основанием 0,4 м и высотой 0,6 м погружена в воду вертикально, так что основание ее находится на поверхности воды. Вычислите силу давления воды на пластинку.

68. Цилиндрический стакан наполнен маслом. Вычислите силу давления масла на боковую поверхность стакана, если высота его $h=0{,}08$ м и радиус основания $r=0{,}04$ м. Плотность масла 900 кг/м^3.

69. Цилиндрический стакан наполнен ртутью. Вычислите силу давления ртути на боковую поверхность стакана, если высота его 0,1 м и радиус основания 0,04 м. Плотность ртути 13 600 кг/м^3.

70. Вычислите силу давления воды на дно и стенки аквариума, стороны основания которого 0,8 и 0,5 м, а высота 0,3 м. Аквариум доверху наполнен водой.

§ 6. ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пусть плоская кривая AB (рис. 89) задана уравнением $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, причем $f(x)$ и $f'(x)$ — непрерывные функции в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$. Тогда дифференциал dl длины дуги AB выражается формулой

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\ \text{или}\ dl=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

а длина дуги AB вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b dl=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,\qquad(13.9)$$

где a и b — значения независимой переменной x в точках A и B.

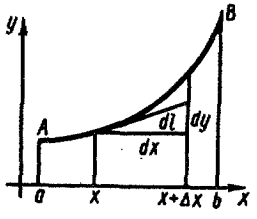


Рис. 89

Если кривая задана уравнением $x=\varphi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$, то длина дуги AB вычисляется по формуле

$$L=\int_c^d \sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,dy, \qquad (13.10)$$

где c и d—значения независимой переменной y в точках A и B.

71. Найти длину окружности $x^2+y^2=r^2$.

○ Дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0;\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

По формуле (13.9) вычислим длину дуги четверти окружности, взяв пределы интегрирования от 0 до r:

$$L/4=\int_0^r\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=\int_0^r\sqrt{\frac{y^2+y^2}{y^2}}\,dx=\int_0^r\sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\,dx=$$

$$=r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=\frac{\pi r}{2}.$$

Длина окружности равна $C=4L=4(\pi r/2)=2\pi r$. ●

72. Найти длину дуги параболы $y=x^2/2$ между точками $O(0;\,0)$ и $A(\sqrt{3};\,3/2)$.

○ Дифференцируя уравнение параболы, получим $\frac{dy}{dx}=x$. Вычислим длину дуги:

$$L=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}\approx 2{,}4\ \text{(ед. дл.)}.\ ●$$

73. Найти длину параболы $y^2=4x$ между точками $O(0;\,0)$ и $(5/4;\,\sqrt{5})$.

○ Для вычисления длины дуги применим формулу (13.10), т. е. за аргумент примем переменную y. Находим $x=\frac{1}{4}y^2$; $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y$; следовательно,

$$L=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y\right)^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{4+y^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4}+2\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right]_0^{\sqrt{5}}\approx 2{,}64\ \text{(ед. дл.)}.\ ●$$

Найдите длины дуг следующих линий:

74. Параболы $y=x^2$ между точками $O(0;\,0)$ и $A(\sqrt{3}/2;\,3/4)$.

75. Параболы $y=4-x^2$ между точками ее пересечения с осью Ox.

76. Параболы $y^2=x$ между точками $O(0;\,0)$ и $A(3/4;\,\sqrt{3}/2)$.

77. Полукубической параболы $y^2=x^3$ между точками $O(0;\,0)$ и $A(4/3;\,8\sqrt{3}/9)$.

78. Полукубической параболы $9y^2=4x^3$ между точками $O(0;\,0)$ и $A(3;\,2\sqrt{3})$.

79. Цепной линии $y=(e^x+e^{-x})/2$ между точками $A(0;\,1)$ и $B(1/2;\,(e^{1/2}+e^{-1/2})/2)$.

80. Цепной линии $y=a(e^{x/a}+e^{-x/a})/2$ между точками $A(0;\,a)$ и $B(a;\,a(e^2+1)/(2e))$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Скорость движения точки $v=(3t^2-2t-3)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.

2) Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

3) Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,02 м была затрачена работа 40 Дж.

4) Вычислите работу, произведенную при выкачивании воды из резервуара цилиндрической формы ($R=2$ м, $H=1$ м), наполненного доверху водой (вес воды в объеме 1 м^3 приблизительно равен 9807 Н).

5) Вычислите силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму треугольника с основанием 5 м и высотой 3 м. Уровень воды совпадает с вершиной треугольника.

II вариант

1) Скорость движения точки $v=(36t-12t^2)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

2) Вычислите работу, произведенную при растяжении пружины на 0,05 м, если для растяжения ее на 0,02 м нужна сила 40 Н.

3) Для растяжения пружины на 0,03 м необходимо произвести работу 12 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, затратив работу 48 Дж?

4) Вычислите работу, произведенную при выкачивании воды из резервуара, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с основаниями 3 и 4 м и высотой 2 м, наполненного доверху водой (вес воды в объеме 1 м^3 приблизительно равен 9807 Н).

5) Вычислите силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму треугольника с основанием 6 м и высотой 2 м. Уровень воды совпадает с основанием треугольника.

Глава 14
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b—действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется *мнимой единицей*, если для этих чисел понятия равенства и действия сложения и умножения определены следующим образом:

1) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i называются *равными*, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$;

2) *суммой* двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$;

3) *произведением* двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $z=a+bi$, а действительное число b — *мнимой частью*.

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел, его можно записать так: $a=a+0\cdot i$. Числа 0, 1 и i записываются соответственно в виде $0=0+0\cdot i$, $1=1+0\cdot i$ и $i=0+1\cdot i$.

При $a=0$ комплексное число $a+bi$ обращается в чисто мнимое число bi.

Комплексное число $a-bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $a+bi$ и обозначается $\bar{z}$, т. е. $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются *противоположными*.

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (14.1)$$

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число: $|z|\geqslant 0$, причем $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$.

Комплексное число $z=a+bi$ можно изображать точкой плоскости с координатами $(a; b)$ (рис. 90). При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют *действительной осью*, а чисто мнимые числа — точками оси ординат, которую называют *мнимой осью*.

Каждой точке плоскости с координатами $(a; b)$ соответствует один и только один вектор с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $M(a; b)$. Поэтому комплексное число $a+bi$ можно изобразить в виде вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{z}$ с началом в точке $z=0$ и концом в точке $z=a+bi$.

Из геометрической интерпретации комплексного числа вытекают следующие свойства.

1°. *Длина вектора* $\vec{z}$ *равна* $|z|$.

2°. *Точки* $z=a+bi$ *и* $z=a-bi$ *симметричны относительно действительной оси.*

3°. *Точки* z *и* $-z$ *симметричны относительно точки* $z=0$.

4°. *Число* z_1+z_2 *геометрически изображается как вектор, построенный по правилу сложения векторов, соответствующих точкам* z_1 *и* z_2 (рис. 91).

5°. *Расстояние между точками* z_1 *и* z_2 *равно* $|z_1-z_2|$ (рис. 92).

Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется

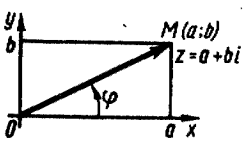


Рис. 90

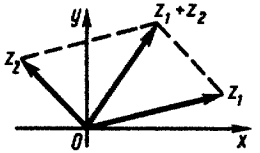


Рис. 91

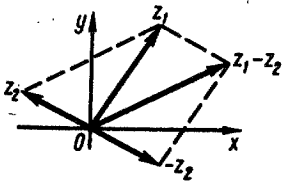


Рис. 92

аргументом комплексного числа $z=0$ (см. рис. 90). Если отсчет ведется против движения часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по движению часовой стрелки, — отрицательной.

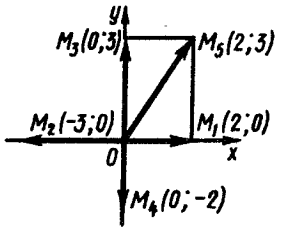


Рис. 93

Аргумент φ комплексного числа $z=a+bi$ записывается так:

$$\varphi=\arg z \text{ или } \varphi=\arg(a+bi). \qquad (14.2)$$

Для числа $z=0$ аргумент не определен.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно; любое комплексное число $z\neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента из промежутка $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ называется *главным значением* аргумента.

Из определения тригонометрических функций следует, что если $\varphi=\arg(a+bi)$, то имеют место равенства

$$\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}=a/r, \quad \sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}=b/r. \qquad (14.3)$$

Справедливо и обратное утверждение, т. е. если выполняются оба равенства (14.3), то $\varphi=\arg(a+bi)$. Таким образом, все значения аргумента φ можно находить, решая совместно уравнения (14.3).

Значения аргумента комплексного числа $z=a+bi\neq 0$ можно находить и так:

1) определить, в какой четверти находится точка $z=a+bi$ (использовать геометрическую интерпретацию числа $z=a+bi$);

2) найти в этой четверти угол φ, решив одно из уравнений (14.3) или уравнение

$$\operatorname{tg}\varphi=b/a; \qquad (14.4)$$

3) найти все значения аргумента числа z по формуле

$$\arg z=\varphi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

1. Построить радиусы-векторы, соответствующие комплексным числам: 1) $z=2$; 2) $z=-3$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$; 5) $z=2+3i$.

○ 1) $M_1(2; 0)$; 2) $M_2(-3; 0)$; 3) $M_3(0; 3)$; 4) $M_4(0; -2)$; 5) $M_5(2; 3)$ (рис. 93). ●

2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: $-2+5ix-3iy=9i+2x-4y$.

○ Выделим в обеих частях равенства действительные и мнимые части данных комплексных чисел:

$$-2+(5x-3y)i=2x-4y+9i.$$

Теперь, используя равенство комплексных чисел, составим систему

$$\begin{cases}2x-4y=-2,\\5x-3y=9,\end{cases}$$

решив которую получим $x=3$, $y=2$. ●

3. Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел: 1) $z=i$; 2) $z=-5i$; 3) $z=1+i$; 4) $z=2-2i$.

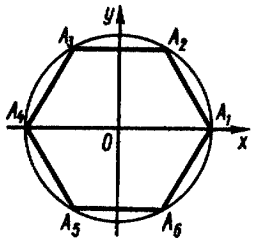


Рис. 94

○ 1) Здесь $a=0$, $b=1$. По формуле (14.1) получим $r=\sqrt{0^2+1^2}=1$; $\varphi=\pi/2$, так как вектор, изображающий данное число, лежит на положительной полуоси Oy.

2) Здесь $a=0, b=-5$; находим $r=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$; $\varphi=-\pi/2$, так как вектор, изображающий данное число, лежит на отрицательной полуоси Oy.

3) Здесь $a=1$, $b=1$ (точка, изображающая данное число, лежит в I четверти); $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=b/a=1$; $\varphi=\pi/4$.

4) Здесь $a=2$, $b=-2$ (IV четверть); $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=b/a=-1$; $\varphi=-\pi/4$. ●

4. Найти все значения аргумента комплексных чисел: 1) $z=-4$; 2) $z=1-i$.

○ 1) Здесь $a=-4$, $b=0$; находим $\arg(-4)=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.
2) Здесь $a=1$, $b=-1$; находим $\arg(1-i)=-\pi/4+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. ●

5. Постройте радиусы-векторы, соответствующие комплексным числам: 1) $z=2-3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=-2-3i$; 4) $z=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$; 5) $z=2-\sqrt{3}i$.

6. Даны числа: 1) $z=3+i$; 2) $z=3-i$; 3) $z=-3+i$; 4) $z=-3-i$; 5) 3; 6) -3; 7) $-i$; 8) i. Назовите числа, сопряженные и противоположные данным.

7. На координатной плоскости дан круг с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 94). Какие числа соответствуют точками A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, лежащим в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в этот круг?

8. Дана точка, изображающая число $-3+2i$. Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно: 1) действительной оси; 2) мнимой оси; 3) начала координат?

9. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: 1) $9+2ix+4iy=10i+5x-6y$; 2) $2ix+3iy++17=3x+2y+18i$; 3) $5x-2y+(x+y)i=4+5i$.

10. Пользуясь условием равенства двух комплексных чисел, найдите x и y из соотношений: 1) $x^2-5(x-1)+4i=yi-1$; 2) $\frac{1}{x}-4yi=4$.

11. Найдите действительные значения x, при которых справедливо равенство $(x^2+1)i+3=x(x-2i)-2x$.

12. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексных чисел: 1) $z=3$; 2) $z=-3$; 3) $z=3i$; 4) $z=-3i$; 5) $z=-2-2i$; 6) $z=1+i\sqrt{3}$; 7) $z=1-i\sqrt{3}$; 8) $z=-\sqrt{3}+i$.

13. Чему равен аргумент: 1) чисто мнимого числа; 2) любого отрицательного числа; 3) любого положительного числа; 4) нуля?

14. Аргумент комплексного числа $a+bi$ равен φ. Чему равен аргумент числа $a-bi$?

15. Найдите множество точек координатной плоскости: 1) модуль которых равен 2; 2) аргумент которых равен $3\pi/4$.

16. Найдите все значения аргумента комплексных чисел: 1) $z=-1+i$; 2) $z=\sqrt{3}-i$.

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАННЫМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над действительными числами. Действия сложения и умножения даны в определении комплексного числа (см. § 1).

Рассматривая вычитание и деление комплексных чисел как действия, обратные соответственно сложению и умножению, получаем правила вычитания и деления комплексных чисел:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i;$$

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

17. Выполнить действия: 1) $(4+2i)+(1+5i)$; 2) $(3+5i)-(6+3i)$.

○ 1) По правилу сложения комплексных чисел получим

$$(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i.$$

2) По правилу вычитания комплексных чисел получим

$$(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i.$$

Сложение (вычитание) комплексных чисел сводится к сложению (вычитанию) векторов, изображающих эти числа. Действия над заданными векторами иллюстрируются геометрически на рис. 95, *а*, *б*. ●

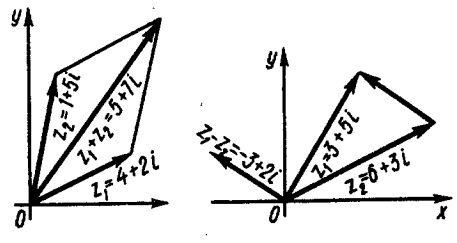


Рис. 95

18. Показать, что справедливы равенства $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, где $k\in\mathbf{Z}$.

○ Так как $i^2=-1$, то $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=1,\ldots$. Следовательно, получаем четыре чередующихся значения: $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $k\in\mathbf{Z}$. ●

19. Вычислить: 1) i^{16}; 2) i^{25}; 3) i^{15}; 4) $(-i)^8$; 5) $(-i)^7$.

○ 1) $i^{16}=i^{4\cdot4}=1$; 2) $i^{25}=i^{4\cdot6+1}=i$; 3) $i^{15}=i^{4\cdot3+3}=i^3=-i$; 4) $(-i)^8=i^8=i^{4\cdot2}=1$; 5) $(-i)^7=-i^7=-i^{4+3}=-i^3=-(-i)=i$. ●

20. Выполнить действия: 1) $2i\cdot3i$; 2) $(2-3i)(2+3i)$; 3) $(5-4i)\times(3+2i)$.

○ 1) $2i\cdot3i=6i^2=-6$;
2) $(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=4+9=13$;
3) По правилу умножения комплексных чисел получим

$$(5-4i)(3+2i)=[5\cdot3-(-4)\cdot2]+i[5\cdot2+3(-4)]=23-2i.$$

Можно произвести умножение по правилу умножения многочленов:

$$(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i+8=23-2i. \bullet$$

21. Выполнить действия: 1) $\frac{2}{3i}$; 2) $\frac{1}{1+i}$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\frac{2-3i}{4+5i}$.

○ 1) Умножив делимое и делитель на i, получим $\frac{2}{3i}=\frac{2i}{3i\cdot i}=\frac{2i}{-3}=-\frac{2}{3}i$.

2) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

3) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i.$

4) $\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25}=\frac{-7-22i}{41}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i.$ ●

22. Вычислить $(1+i)^8$.

○ Используя соотношение $(1+i)^2=2i$, получим $(1+i)^8=[(1+i)^2]^4=(2i)^4=16i^4=16$. ●

23. Выполните действия: 1) $(3+i)+(-3-8i)$; 2) $(5-4i)+(7+4i)$; 3) $(-6+2i)+(-6-2i)$;
4) $(0{,}2+0{,}1i)+(0{,}8-1{,}1i)$; 5) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$;
6) $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.

24. Вычислите: 1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 3) $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$; 4) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$; 5) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 6) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.

25. Выполните действия: 1) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$; 2) $(5-3i)\cdot 2i$; 3) $(3+4i)(3-4i)$; 4) $(5+3i)(2-5i)$; 5) $(-2-i)(1+i)$;
6) $4+2i+(-1+6i)(6-i)$; 7) $(3-2i)(5+4i)-7i+1$;
8) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$; 9) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}4i)$.

26. Выполните действия: 1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{1-i}{1+i}$; 4) $\frac{3-2i}{1+3i}$;
5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 6) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 7) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 8) $\frac{a+bi}{a-bi}$;
9) $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$; 10) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 11) $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$; 12) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.

27. Разложите на комплексные множители: 1) m^2+n^2; 2) $4m^2+9n^2$; 3) $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}$; 4) $m+n$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $1+\sin^2\alpha$; 7) 3.

28. Вычислите: 1) $(1-i)^{12}$; 2) $(1+i)^{17}$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$; 5) $(1+i)^{-2}$; 6) $(1-i)^{-3}$; 7) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$

§ 3. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Пусть $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ — модуль, а φ — одно из значений аргумента комплексного числа $a+bi$. Так как из соотношений (14.3) вытекает, что $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, то

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (14.5)$$

Таким образом, любое комплексное число $a+bi\neq 0$ можно записать по формуле (14.5), где r — модуль, а φ — одно из значений аргумента этого числа.

Верно и обратное утверждение: если комплексное число $a+bi$ представлено в виде (14.5), где $r>0$, то $r=|a+bi|$, $\varphi=\arg(a+bi)$.

Представление комплексного числа в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где $r>0$, называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Для представления комплексного числа $z=a+bi$ в тригонометрической форме необходимо найти: 1) модуль этого числа; 2) одно из значений аргумента этого числа. В силу многозначности $\arg z$ тригонометрическая форма комплексного числа также неоднозначна.

2. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Произведение комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \qquad (14.6)$$

т. е.

$$|z_1z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \arg(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Частное комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], \qquad (14.7)$$

т. е.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\varphi_1-\varphi_2.$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Для возведения комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в n-ю степень используется формула

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\quad n\in\mathbf{Z}, \qquad (14.8)$$

которая называется формулой Муавра.

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ используется формула

$$z_k=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (14.9)$$

где $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

29. Представить в тригонометрической форме следующие числа: 1) 2; 2) $6i$; 3) $-2+2\sqrt{3}i$; 4) $2-2i$; 5) $-\sqrt{3}-i$.

○ 1) Здесь $a=2$, $b=0$, $r=2$. Так как вектор, изображающий число 2 лежит на положительной полуоси Ox, то главное значение аргумента $\varphi=0$, следовательно,

$$2=2(\cos 0+i\sin 0)$$

или

$$2=2(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k),\ k\in\mathbf{Z}.$$

2) Здесь $a=0$, $b=6$, $r=6$. Поскольку вектор, изображающий число $6i$, лежит на положительной полуоси Oy, главное значение аргумента $\varphi=\pi/2$, поэтому

$$6i=6[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]$$

или

$$6i=6[\cos(\pi/2+2\pi k)+i\sin(\pi/2+2\pi k)],\quad k\in\mathbf{Z}.$$

3) Здесь $a=-2$, $b=2\sqrt{3}$, $r=4$. Точка, изображающая число z, лежит в II четверти; $\operatorname{tg}\varphi=2\sqrt{3}/(-2)=-\sqrt{3}$, $\varphi=2\pi/3$. Значит,

$$-2+2\sqrt{3}i=4[\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)]$$

или

$$-2+2\sqrt{3}i=4[\cos(2\pi/3+2\pi k)+i\sin(2\pi/3+2\pi k)],\quad k\in\mathbf{Z}.$$

4) Здесь $a=2$, $b=-2$, $r=2\sqrt{2}$. Точка, изображающая число z, лежит в IV четверти; $\operatorname{tg}\varphi=-1$, $\varphi=-\pi/4$. Поэтому

$$2-2i=2\sqrt{2}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]$$

или

$$2-2i=2\sqrt{2}[\cos(-\pi/4+2\pi k)+i\sin(-\pi/4+2\pi k)],\quad k\in\mathbf{Z}.$$

5) Здесь $a=-\sqrt{3}$, $b=-1$, $r=2$. Точка, изображающая число z, лежит в III четверти; $\operatorname{tg}\varphi=1/\sqrt{3}$, $\varphi=-5\pi/6$, тогда

$$-\sqrt{3}-i=2[\cos(-5\pi/6)+i\sin(-5\pi/6)]$$

или

$$-\sqrt{3}-i=2[\cos(-5\pi/6+2\pi k)+i\sin(-5\pi/6+2\pi k)],\quad k\in\mathbf{Z}.\ \bullet$$

30. Представить в алгебраической форме числа:
1) $z=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$; 2) $z=\sqrt{2}[\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)]$.

○ 1) Подставив значения $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$ в данное равенство, получим $z=2(1+i\cdot 0)=2$.

2) Имеем

$$z=\sqrt{2}[\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)]=\sqrt{2}[-\sqrt{2}/2+i(\sqrt{2}/2)]=-1+i.\ \bullet$$

31. Найти произведение

$$2[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)]\cdot 3[\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)].$$

○ По формуле (14.6) получим

$$2[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)]\cdot 3[\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)]=2\cdot 3[\cos(\pi/6+\pi/12)+$$
$$+i\sin(\pi/6+\pi/12)]=6[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]=6[(\sqrt{2}/2)+i(\sqrt{2}/2)]=$$
$$=3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}.\ \bullet$$

32. Выполнить деление:

$$10[\cos(3\pi/4)+i\sin(3/\pi/4)]:2[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)].$$

○ По формуле (14.7) находим

$$10[\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)]:2[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]=$$
$$=(10/2)[\cos(3\pi/4-\pi/4)+i\sin(3\pi/4-\pi/4)]=5[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]=$$
$$=5(0+i)=5i.\ \bullet$$

33. Возвести в степень: 1) $[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)]^6$; 2) $[3/2-(\sqrt{3}/2)i]^{10}$.

○ 1) По формуле Муавра получим

$$[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)]^6=\cos[6\cdot(\pi/6)]+i\sin[6\cdot(\pi/6)]=\cos\pi+i\sin\pi=$$
$$=-1+i\cdot 0=-1.$$

2) Представим данное число в тригонометрической форме. Здесь $a=3/2$, $b=-\sqrt{3}/2$, т. е. $r=\sqrt{(3/2)^2+(-\sqrt{3}/2)^2}=\sqrt{3}$. Точка, изображающая данное число, лежит в IV четверти, поэтому $\operatorname{tg}\varphi=(-\sqrt{3}/2):(3/2)=-\sqrt{3}/3$, т. е. $\varphi=-\pi/6$. Итак,

$$3/2-(\sqrt{3}/2)i=\sqrt{3}[\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)].$$

Следовательно,

$$\{\sqrt{3}[\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)]\}^{10}=3^5[\cos(-10\cdot\pi/6)+i\sin(-10\cdot\pi/6)]=$$
$$=3^5[\cos(5\pi/3)-i\sin(5\pi/3)]=3^5[\cos(5\pi/3-2\pi)-i\sin(5\pi/3-2\pi)]=$$
$$=243[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]=243[1/2+i(\sqrt{3}/2)]=121{,}5(1+i\sqrt{3}).\ \bullet$$

34. Применяя формулу Муавра, доказать справедливость следующих тождеств:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi;\quad \sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi;$$
$$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi;\quad \sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi.$$

○ Полагая в соотношении (14.8) $r=1$ и $n=2$, получим

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi,$$

или

$$\cos^2\varphi+2i\cos\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел следует, что

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi;\quad \sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Аналогично, полагая в соотношении (14.8) $r=1$ и $n=3$, имеем

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi,$$

т. е.

$$\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi-i\sin^3\varphi=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел следует:

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi=\cos^3\varphi-3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi;$$

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi=3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi-\sin^3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi.\ \bullet$$

35. Извлечь корни из комплексных чисел 1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt[3]{1}$.

○ 1) Представим число i в тригонометрической форме: $i=0+1\cdot i=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$. По формуле (14.9) получим

$$z_k=\sqrt{i}=\sqrt{\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)}=\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{2}=$$

$$=\cos(\pi/4+\pi k)+i\sin(\pi/4+\pi k),\quad k=0,\ 1;$$

если $k=0$, то $z_0=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2+(\sqrt{2}/2)i$;

если $k=1$, то $z_1=\cos(\pi/4+\pi)+i\sin(\pi/4+\pi)=-\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4)=-\sqrt{2}/2-(\sqrt{2}/2)i$.

2) Представим число 1 в тригонометрической форме: $1=\cos 0+i\sin 0$. По формуле (14.9) находим

$$z_k=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}=$$

$$=\cos(2\pi k/3)+i\sin(2\pi k/3),\quad k=0,\ 1,\ 2;$$

если $k=0$, то $z_0=\cos 0+i\sin 0=1$;

если $k=1$, то $z_1=\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)=-1/2+(\sqrt{3}/2)i$;

если $k=2$, то $z_2=\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)=-1/2-(\sqrt{3}/2)i$.

36. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа: 1) $3i$; 2) $-1+i$; 3) $1-i\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}-i$; 5) $\sqrt{3}/2-(1/2)i$; 6) $-3+4i$.

37. Представьте в алгебраической форме числа: 1) $5[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]$; 2) $4[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)]$; 3) $\cos\pi+i\sin\pi$; 4) $2[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$; 5) $3(\cos 0+i\sin 0)$.

38. Найдите произведения:

1) $3[\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)]\cdot[\cos(5\pi/24)+i\sin(5\pi/24)]$;
2) $2[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]\cdot 5[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]$;
3) $(\cos 5+i\sin 5)\cdot(\cos 2+i\sin 2)$;
4) $[\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)]\cdot[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)]$;
5) $4(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)\cdot 2(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)$;
6) $[\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6)]\cdot[\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)]$.

39. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$; 2) $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$;
3) $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$; 4) $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$;
5) $(5+5i)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$;
6) $3[\cos(-\pi/8)+i\sin(-\pi/8)]\cdot(3+\sqrt{3}i)$.

40. Выполните деление в тригонометрической форме:

1) $3[\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)]:[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]$;
2) $(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ):(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$;
3) $[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)]:[\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)]$;
4) $(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ):[\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)]$.

41. Возведите в степень:

1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$; 2) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8$; 3) $(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)^{-12}$.

42. Вычислите: 1) $(1-i)^{12}+(1+i)^{12}$; 2) $\frac{(1+i)^8-(1-i)^8}{(1+i)^8\cdot(1-i)^8}$.

43. Извлеките корни: 1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{i}$; 4) $\sqrt[4]{4}$; 5) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt[6]{1}$.

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Степень e^z с комплексным показателем $z=x+iy$ определяется равенством

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Можно доказать, что

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),$$

т. е.

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).\qquad(14.10)$$

В частности, при $x=0$ получается соотношение

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\qquad(14.11)$$

которое называется формулой Эйлера.

Для комплексных показателей остаются в силе основные правила действий с показателями; например, при умножении чисел показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении в степень — перемножаются.

Показательная функция имеет период, равный $2\pi i$, т. е. $e^{z+2\pi i}=e^z$. В частности, при $z=0$ получается соотношение $e^{2\pi i}=1$.

Тригонометрическую форму комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ можно заменить *показательной формой*:

$$z=re^{\varphi i}.\qquad(14.12)$$

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в показательной форме, выполняются по следующим формулам:

$$r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\qquad(14.13)$$

$$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\qquad(14.14)$$

$$(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi};\qquad(14.15)$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1). \qquad (14.16)$$

Формула Эйлера (14.11) устанавливает связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией. Заменив в ней y на φ и на $-\varphi$, получим

$$e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \quad e^{-\varphi i}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$\cos\varphi=(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})/2, \qquad (14.17)$$

$$\sin\varphi=(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})/(2i). \qquad (14.18)$$

Эти две простые формулы, также называемые формулами Эйлера и выражающие тригонометрические функции через показательные, позволяют алгебраическим путем получить основные формулы тригонометрии.

44. Найти: 1) $e^{i\pi/4}$; 2) $e^{\pi e^{-i\pi/2}}$; 3) $e^{2+i\pi}$.

○ По формуле (14.11) получим:

1) $e^{i\pi/4}=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2+i(\sqrt{2}/2)$;

2) $e^{\pi e^{-i\pi/2}}=e^{\pi[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)]}=e^{-\pi i}=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1$;

3) по формуле (14.10) получим $e^{2+i\pi}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^2$. ●

45. Найти: 1) $\cos i$; 2) $\cos(1-i)$.

○ По формуле (14.17) получим:

1) $\cos i=\dfrac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\dfrac{e^{-1}+e}{2}=\dfrac{e^2+1}{2e}$;

2) $\cos(1-i)=\dfrac{e^{i(1-i)}+e^{-i(1-i)}}{2}=\dfrac{e^{i+1}+e^{-i-1}}{2}=\dfrac{1}{2}[e(\cos 1+i\sin 1)+$

$+e^{-1}(\cos(-1)+i\sin(-1))]=\dfrac{1}{2}[e\cos 1+ei\sin 1+e^{-1}\cos 1-$

$-e^{-1}i\sin 1]=\dfrac{1}{2}[(e+e^{-1})\cos 1+i(e-e^{-1})\sin 1]=\dfrac{e^2+1}{2e}\cos 1+i\dfrac{e^2-1}{2e}\sin 1$. ●

46. Показать, что для комплексного переменного z справедливы формулы: 1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$; 2) $\sin 2z=2\sin z\cos z$; 3) $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$.

○ 1) Возведя обе части равенств (14.17) и (14.18) в квадрат и затем почленно складывая их, получим

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\frac{(e^{zi}+e^{-zi})^2}{4}+\frac{(e^{zi}-e^{-zi})^2}{-4}=\frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}-e^{2zi}+2-e^{-2zi}}{4}=1.$$

2) Перемножив левые и правые части равенств (14.17) и (14.18), получим

$$2\sin z\cos z=2\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\cdot\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=\frac{e^{2zi}-e^{-2zi}}{2i}=\sin 2z.$$

3) Возведя обе части равенств (14.17) и (14.18) в квадрат и почленно их вычитая, получим

$$\cos^2 z-\sin^2 z=\frac{(e^{zi}+e^{-zi})^2}{4}-\frac{(e^{zi}-e^{-zi})^2}{-4}=$$

$$=\frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}+e^{2zi}-2+e^{-2zi}}{4}=\frac{e^{2zi}+e^{-2zi}}{2}=\cos 2z.$$

47. Представить в показательной форме числа: 1) $z=2i$; 2) $z=-1+i$.

○ 1) Здесь $a=0$, $b=2$, $r=2$, $\varphi=\pi/2$. По формуле (14.12) получим $z=2e^{i\pi/2}$.

2) Здесь $a=-1$, $b=1$, $r=\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=-1$, $\varphi=3\pi/4$. По формуле (14.12) имеем $z=\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$. ●

48. Представив числа $z_1=1+i$ и $z_2=1-i\sqrt{3}$ в показательной форме, вычислить: 1) z_1z_2; 2) z_1/z_2; 3) z_1^6; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

○ Для числа $z_1=1+i$ имеем: $a=1$, $b=1$, $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\pi/4$, т. е. $z_1=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Для числа $z_2=1-i\sqrt{3}$ имеем: $a=1$, $b=-\sqrt{3}$, $r=2$, $\varphi=-\pi/3$, т. е. $z_2=2e^{-i\pi/3}$.

1) По формуле (14.13) находим $z_1z_2=\sqrt{2}e^{i\pi/4}\cdot 2e^{-i\pi/3}=2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$.

2) По формуле (14.14) получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4-(-i\pi/3)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi i/12}.$$

3) По формуле (14.15) имеем $z_1^6=(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^6=8e^{i3\pi/2}$.

4) По формуле (14.16) находим

$$z_k=\sqrt[4]{z_1}=\sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}=\sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi k)i/4},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

если $k=0$, то $z_0=\sqrt[8]{2}e^{i\pi/16}$;

если $k=1$, то $z_1=\sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi)i/4}=\sqrt[8]{2}e^{9\pi i/16}$;

если $k=2$, то $z_2=\sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+4\pi)i/4}=\sqrt[8]{2}e^{17\pi i/16}=\sqrt[8]{2}e^{-15\pi i/16}$;

если $k=3$, то $z_3=\sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+6\pi)i/4}=\sqrt[8]{2}e^{25\pi i/16}=\sqrt[8]{2}e^{-7\pi i/16}$. ●

49. Найдите: 1) e^i; 2) $e^{i\pi}$; 3) e^{1+i}; 4) $e^{i\pi/2}$; 5) $e^{i\pi/3}$; 6) e^{4+3i}; 7) e^{2-i}; 8) e^{3i-2}.

50. Найдите: 1) $\sin i$; 2) $\cos(1+i)$; 3) $\sin(1-i)$.

51. Покажите, что для комплексного переменного z справедливы равенства:

$$\cos(-z)=\cos z;\ \sin(-z)=-\sin z;$$

$$\sin 3z=3\sin z-4\sin^3 z;\ \sin^2 z=\frac{1-\cos 2z}{2};\ \cos^2 z=\frac{1+\cos 2z}{2}.$$

52. Представьте в показательной форме числа: 1) 1; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $3+i\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

53. Представив числа $z_1=\sqrt{3}+i$ и $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в показательной форме, вычислите: 1) z_1z_2; 2) z_2/z_1; 3) z_2^4; 4) $\sqrt[3]{z_1}$; 5) $\sqrt[4]{z_2}$.

§ 5. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

54. Выполните умножение: 1) $(a\sqrt{b}+bi\sqrt{a})(-a\sqrt{b}-bi\sqrt{a})$; 2) $(\sqrt{a/b}-i\sqrt{b/a})\cdot(\sqrt{b/a}+i\sqrt{a/b})$.

55. Разложите на множители: 1) $4x^2+25$; 2) a^2+12; 3) $\sqrt{5}+9$; 4) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

56. Сократите дроби: 1) $\dfrac{9m^2+4n^2}{3m-2in}$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}+i}$; 3) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+i\sqrt{b}}$.

57. Выполните деление: 1) $\dfrac{\sqrt{27}+i\sqrt{8}}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{m\sqrt{n}-ni\sqrt{m}}{n\sqrt{m}+mi\sqrt{n}}$.

58. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $\dfrac{3i-1}{2i+1}$.

59. Проверьте равенство $\dfrac{\sqrt{m}+i\sqrt{n}}{\sqrt{m}-i\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n}+i\sqrt{m}}{\sqrt{n}-i\sqrt{m}}=\dfrac{2(m-n)}{m+n}$.

60. Найдите числовые значения многочленов: 1) $x^{15}+x^{14}+3x^{12}-x^{10}+x^7$ при $x=i$; 2) x^3+x^2+x+1 при $x=1+i$.

61. Выполните действия: 1) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$; 2) $\left(i\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2$.

62. Возведением в квадрат докажите справедливость формул:

1) $\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}=\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$;

2) $\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi}=i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$.

63. Покажите, что если $a=-0{,}5\left(1+i\sqrt{3}\right)$, $b=0{,}5\left(-1+i\sqrt{3}\right)$, то: 1) $a^3=1$; 2) $b^3=1$; 3) $a^2=b$; 4) $b^2=a$.

64. Докажите, что $x^3+y^3-3xy=-1$, если $x=-0{,}5+1{,}5i$ и $y=-0{,}5-1{,}5i$.

65. Произведите указанные действия:

1) $\dfrac{1}{(1+i)^2}+\dfrac{1}{(1-i)^2}$; 2) $\dfrac{1}{(1+i)^4}+\dfrac{1}{(1-i)^3}$; 3) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$.

66. Выполните действия в тригонометрической и показательной формах:

1) $5\left[\cos(\pi/6)-i\sin(\pi/6)\right]\cdot\left[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right]$;

2) $8\left[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right]:4\left[\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)\right]$.

67. Вычислите с помощью формулы Муавра:

1) $\left[\cos(\pi/24)+i\sin(\pi/24)\right]^6$; 2) $\left[\cos(\pi/10)+i\sin(\pi/10)\right]^{10}$.

68. Докажите, что $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi$.

69. Вычислите: 1) $\sqrt[4]{i}$; 2) $\sqrt{1+i}$.

70. Решите двучленные уравнения: 1) $x^3-8=0$; 2) $8x^3-27=0$; 3) $x^3+125=0$; 4) $27x^3+1=0$; 5) $x^4+81=0$; 6) $x^6-64=0$.

71. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого служат числа: 1) i и $-i$; 2) $3+i$ и $3-i$; 3) $1-i\sqrt{5}$ и $1+i\sqrt{5}$.

72. Решите биквадратное уравнение $x^4+x^2+1=0$, выполнив извлечение корня в тригонометрической форме.

73. Решите уравнения:

1) $x^6-28x^3+27=0$; 2) $(2x+3)^6-9(2x+3)^3+8=0$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Найдите модуль и аргумент числа $\dfrac{8+2i}{5-3i}$.

2) Выполните действия: $\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}$.

3) Возведите в степень по формуле Муавра $(-1+i\sqrt{3})^9$.

4) Извлеките корень $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$.

5) Решите уравнение $x^4-4x^2+16=0$.

II вариант

1) Найдите модуль и аргумент числа $\dfrac{5+i}{2+3i}$.

2) Выполните действия: $\dfrac{4+3i}{3-4i}-\dfrac{5-4i}{4+5i}$.

3) Возведите в степень по формуле Муавра $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

4) Извлеките корень $\sqrt[3]{8}$.

5) Решите уравнение $x^4-2x^2+4=0$.

Глава 15
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y')=0,\quad F(x, y, y'')=0,\quad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях пронзвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функцин.

График частного решения днфференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Общему решению дифференцнального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\,\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)\,dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)\,dx.$$

1. Найти общее решение уравнения $x(1+y^2)\,dx=y\,dy$.

○ Разделив переменные, имеем

$$x\,dx=\frac{y\,dy}{1+y^2}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int x\,dx=\int\frac{y\,dy}{1+y^2};\quad \frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $(1/2)\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2=\ln[C(1+y^2)].$$

Это и есть общее решение данного уравнения. ●

2. Найти частное решение уравнения $s\operatorname{tg}t\,dt+ds=0$, удовлетворяющее начальным условиям $s=4$ при $t=\pi/3$.

○ Разделив переменные, имеем

$$\operatorname{tg}t\,dt+\frac{ds}{s}=0.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int\operatorname{tg}t\,dt+\int\frac{ds}{s}=\ln C;\quad -\ln\cos t+\ln s=\ln C,$$

или

$$\ln s=\ln C+\ln\cos t,\quad s=C\cos t.$$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t=\pi/3$ и $s=4$ в выражение для общего решения: $4=C\cos(\pi/3)$, или $4=C/2$, откуда $C=8$.

Следовательно, искомое частное решенне, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s=8\cos t$. ●

Найдите общие решения уравнений:

3. 1) $x^2dx=3y^2dy$; 2) $\sqrt{x}dy=\sqrt{y}dx$; 3) $\dfrac{dy}{\sqrt{x}}=\dfrac{3dx}{\sqrt{y}}$;

4) $(1+y)\,dx=(x-1)\,dy$.

4. 1) $xy\,dx=(1+x^2)\,dy$; 2) $y^2dx+(x-2)\,dy=0$.

5. 1) $(x^2-yx^2)\,dy+(y^2+xy^2)\,dx=0$; 2) $x^2dy-(2xy+3y)\,dx=0$.

6. 1) $(1+y^2)\,dx-\sqrt{x}dy=0$; 2) $\sqrt{1-x^2}\,dy-x\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

7. 1) $y\,dy=x\,dx$; $y=4$ при $x=-2$; 2) $x\,dy=y\,dx$; $y=6$ при $x=2$.

8. $ds=(3t^2-2t)\,dt$; $s=4$ при $t=2$.

9. $\dfrac{dy}{x^2}=\dfrac{dx}{y^2}$; $y=2$ при $x=0$.

10. $\dfrac{dy}{x-1}=\dfrac{dx}{y-2}$; $y=4$ при $x=0$.

11. $(1+y)\,dx=(1-x)\,dy$; $y=3$ при $x=-2$.

12. $(1+x)\,ydx+(1-y)\,xdy=0$; $y=1$ при $x=1$.

13. $y^2dx=e^xdy$; $y=1$ при $x=0$.

14. $\dfrac{dx}{\cos^2x\cos y}=\operatorname{ctg}x\sin y\,dy$; $y=\pi$ при $x=\pi/3$.

§ 2. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

15. Найти закон движения тела по оси Ox, если оно начало двигаться из точки M (4; 0) со скоростью $v=2t+3t^2$.

○ При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени. Обозначив путь через x, имеем $v=\dfrac{dx}{dt}$; тогда

$$\frac{dx}{dt}=2t+3t^2,\ \text{или}\ dx=(2t+3t^2)\,dt.$$

Проинтегрировав, получим $x=t^2+t^3+C$. Используя начальные условия, найдем C. Так как $x=4$ прн $t=0$, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C=4$. Итак, закон движения тела имеет вид $x=t^2+t^3+4$. ●

16. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $4x-3$.

○ Согласно условию, имеем

$$\frac{dy}{dx}=4x-3, \text{ или } dy=(4x-3)\,dx.$$

Проинтегрировав, получим $y=2x^2-3x+C$. Используя начальные условия $x=2$ и $y=-3$, находим $C=-5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y=2x^2-3x-5$. ●

17. Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру 70°, через 10 мин температура воды стала 65°, температура окружающей резервуар среды 15°. Определить: температуру воды в резервуаре через 30 мин от начального момента; момент времени, когда температура воды в резервуаре станет равной 20°.

○ Обозначим T температуру воды в момент времени t. Скорость охлаждения воды есть скорость изменения функции, связывающей t и T, т. е. производная $\frac{dT}{dt}$.

Величина $\frac{dT}{dt}$ пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде, т. е. $k(T-15°)$, где k — коэффициент пропорциональности. Следовательно, $\frac{dT}{dt}=k(T-15°)$. Разделив переменные, имеем $\frac{dT}{T-15°}=k\,dt$. Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int\frac{dT}{T-15°}=\int k\,dt;\ \ln(T-15°)=kt+C,$$

или

$$T-15°=e^{kt+C}=e^{kt}e^{C}=e^{kt}C_1,$$

откуда

$$T=C_1e^{kt}+15°. \qquad (*)$$

Это соотношение и выражает закон охлаждения воды.

Найдем величину C_1 при начальных условиях $T=70°$ при $t=0$. Имеем

$$70=C_1e^{k\cdot 0}+15, \text{ или } 55°=C_1e^0=C_1, \text{ т. е. } C_1=55°.$$

Подставив найденное значение C_1 в равенство (*), получим

$$T=55°e^{kt}+15°. \qquad (**)$$

Найдем величину k. По условию, $T=65°$ при $t=10$ мин. Подставив эти значения в соотношение (**), получим

$$65°=55°e^{k\cdot 10}+15°, \text{ или } 50°=55°e^{10k}, \text{ или } 10/11=e^{10k}.$$

Прологарифмировав последнее равенство, имеем

$$\lg 10-\lg 11=10k\lg e,$$

откуда

$$k=\frac{1-\lg 11}{10\lg e}=\frac{1-1{,}0414}{10\cdot 0{,}4343}=-\frac{0{,}0414}{4{,}343}=-0{,}009532.$$

Подставив значение k в соотношение (**), получим закон охлаждения, связывающий переменные t и T:

$$T=55°e^{-0{,}009532t}+15°. \qquad (***)$$

Найдем температуру воды через 30 мин от начального момента. Для этого в уравнение (***) подставим значение $t=30$:

$$T=55°e^{-0{,}009532\cdot 30}+15°, \text{ или } T=55°e^{-0{,}286}+15°.$$

Произведем вычисления:

$$x=55\cdot e^{-0{,}286},\ \lg x=\lg 55-0{,}286\lg e=1{,}7404-0{,}286\cdot 0{,}4343=$$
$$=1{,}7404-0{,}1242=1{,}6162,\ x=41{,}32\approx 41;$$

тогда $T=41°+15°=56°$.

Найдем, через сколько времени температура воды в резервуаре станет равной 20°. Подставив значение $T=20°$ в соотношение (***), получим

$$20°=55°e^{-0{,}009532t}+15°, \text{ или } 5°=55°e^{-0{,}009532t},$$

откуда

$$e^{-0{,}009532t}=1/11\approx 0{,}0909, \text{ или } -0{,}009532t\lg e=\lg 0{,}0909=\bar{2}{,}9586,$$

т. е.

$$t=-\frac{\bar{2}{,}9586}{0{,}009532\cdot 0{,}4343}=\frac{1{,}041}{0{,}009532\cdot 0{,}4343}\approx 251 \text{ мин}=4 \text{ ч } 11 \text{ мин}. \ ●$$

18. Вращающийся в жидкости диск замедляет свою угловую скорость за счет трения, причем сила трения пропорциональна угловой скорости. Найти: 1) скорость вращения диска в момент $t=120$ с, если при $t=0$ он вращался со скоростью 12 рад/с, а при $t=10$ с его скорость стала 8 рад/с; 2) момент времени, когда скорость вращения диска окажется равной 1 рад/с.

○ Пусть ω — угловая скорость вращения диска в момент времени t, тогда замедление вращения диска под воздействием силы трения равно $\frac{d\omega}{dt}$.

Согласно условию, $\frac{d\omega}{dt}=k\omega$, где k — коэффициент пропорциональности. Разделив переменные и интегрируя, получим

$$\frac{d\omega}{\omega}=k\,dt,\ \int\frac{d\omega}{\omega}=k\int dt,\ \ln\omega=kt+C,$$

откуда $\omega=e^{kt+C}=e^{kt}e^{C}$, или

$$\omega=C_1e^{kt}. \qquad (*)$$

Найдем постоянную величину C_1 при начальных условиях $\omega=12$ рад/с при $t=0$. Подставив эти значения в равенство (*), имеем $12=C_1e^{k\cdot 0}$, т. е. $12=C_1$. Таким образом,

$$\omega=12e^{kt}. \qquad (**)$$

Найдем числовое значение k по следующим данным: $t=10$ с и $\omega=8$ рад/с. Подставим эти значения в равенство (**): $8=12e^{k\cdot 10}$, откуда

$$e^{10k}=2/3,\ 10k\lg e=\lg 2-\lg 3,$$

$$k=\frac{\lg 2-\lg 3}{10\lg e}=-\frac{\lg 3-\lg 2}{10\lg e}=-\frac{0{,}4771-0{,}3010}{10\cdot 0{,}4343}=-0{,}0405.$$

Подставив значение k в равенство (**), получим

$$\omega = 12e^{-0,0405t}. \qquad (***)$$

Найдем скорость вращения диска в момент времени $t=120$ с. Подставим в равенство (***) значение $t=120$:

$$\omega = 12e^{-0,0405\cdot 120} = 12e^{-4,9} = 0,09 \text{ (рад/с)}.$$

Определим, в какой момент времени диск будет вращаться со скоростью 1 рад/с. Подставив в соотношение (***) значение $\omega=1$, имеем

$$1 = 12e^{-0,0405t};\ e^{-0,0405t} = \frac{1}{12};\ -0,0405t \lg e = \lg 1 - \lg 12,$$

$$t = \frac{\lg 12}{0,0405 \lg e} = 61 \text{ (с)}. \bullet$$

19. Найти закон движения тела по оси Oy, если оно начало двигаться из точки $M(0;\ 6)$ со скоростью $v=4t-6t^2$.

20. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;\ -1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k=1/(2y)$.

21. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (1; 4), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

22. Температура воздуха равна 20°. Тело охлаждается за 40 мин от 80 до 30°. Какую температуру будет иметь тело через 30 мин после первоначального измерения?

23. Радий распадается со скоростью, пропорциональной начальному его количеству. Через сколько лет распадется половина начального его количества? Принять $k=0,00044$ (единица измерения времени — год).

24. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости. В какой момент времени скорость вращения диска окажется равной 2 рад/с, если при $t=0$ он вращается со скоростью 20 рад/с, а при $t=8$ с — со скоростью 16 рад/с?

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\,y + \varphi(x) = 0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции от x, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=uz$, где u и z — новые функции от x.

25. Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

○ Это линейное уравнение: здесь $f(x) = -2/(x+1)$, $\varphi(x) = -(x+1)^3$. Положим $y=uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Подставив теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{x+1} = (x+1)^3,$$

или

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3. \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве u возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{du}{u} - \frac{2dx}{x+1} = 0,\ \int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x+1};\ \ln u = 2\ln(x+1),\ u = (x+1)^2$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений).

Подставим теперь выражение для u в уравнение (*); тогда получим уравнение

$$(x+1)^2\frac{dz}{dx} = (x+1)^3,\ \text{или}\ \frac{dz}{dx} = x+1.$$

Отсюда находим

$$\int dz = \int (x+1)\,dx;\ z = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Зная u и z, теперь получаем общее решение данного уравнения:

$$y = uz = (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right] = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2. \bullet$$

26. Найти частное решение уравнения $\cos x\,dy + y\sin x\,dx = dx$, если $y=1$ при $x=0$.

○ Разделив все члены данного уравнения на $\cos x\,dx$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \qquad (*)$$

которое является линейным. Положим $y=uz$; тогда $\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$. Подставив выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (*), имеем

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + uz\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}+u\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\cos x}. \qquad (**)$$

Для отыскания u получаем уравнение

$$\frac{du}{dx}+u\operatorname{tg}x=0, \text{ т. е. } \frac{du}{u}+\operatorname{tg}x\,dx=0,$$

откуда

$$\int\frac{du}{u}=-\int\operatorname{tg}x\,dx;\ \ln u=\ln\cos x;\ u=\cos x.$$

Подставляя выражение для u в уравнение (*), имеем

$$\cos x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\cos x}, \text{ или } \frac{dz}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}, \text{ т. е. } z=\operatorname{tg}x+C.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения записывается так:

$$y=uz=\cos x\,(\operatorname{tg}x+C)=\sin x+C\cos x.$$

Используя начальные условия $y=1$, $x=0$, имеем $1=\sin 0+C\cos 0$, откуда $C=1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=\sin x+\cos x$. ●

Найдите общие решения уравнений:

27. 1) $\frac{dy}{dx}-2y-3=0$; 2) $\frac{dy}{dx}=y+1$; 3) $x\frac{dy}{dx}-x^2+2y=0$.

28. 1) $\frac{dy}{dx}+xy=x$; 2) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$; 3) $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{ctg}x=\sin x$.

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

29. $\frac{dy}{dx}-\frac{3y}{x}=e^x x^3$; $y=e$ при $x=1$.

30. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$; $y=1$ при $x=2$.

31. $\frac{dy}{dx}\cos^2 x=\operatorname{tg}x-y$; $y=0$ при $x=0$.

§ 4. НЕПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Рассмотрим на примерах неполные дифференциальные уравнения второго порядка.

32. Найти общее решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.

○ Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$. Полагаем $\frac{dy}{dx}=z$; тогда данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\sin x, \text{ т. е. } \frac{dz}{dx}=\sin x,$$

откуда $dz=\sin x\,dx$. Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int dz=\int\sin x\,dx, \text{ т. е. } z=-\cos x+C_1.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x+C_1, \text{ т. е. } dy=(-\cos x+C_1)\,dx.$$

Снова интегрируя, находим

$$\int dy=\int(-\cos x+C_1)\,dx, \text{ или } y=-\sin x+C_1x+C_2.$$

Это и есть общее решение данного уравнения. ●

33. Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{3}{2}$ и $\frac{dy}{dx}=1$ при $x=0$.

○ Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Положим $\frac{dy}{dx}=z$; тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ и, значит, $\frac{dz}{dx}=2z$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z}=2dx;\ \int\frac{dz}{z}=2\int dx,\ \ln z=2x+C_1;\ z=e^{2x+C_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x+C_1}, \qquad (*)$$

т. е. $dy=e^{2x+C_1}dx$. Интегрируя, находим общее решение данного уравнения:

$$y=(1/2)\,e^{2x+C_1}+C_2. \qquad (**)$$

Для нахождения искомого частного решения подставим в соотношения (*) и (**) начальные данные:

$$\begin{cases}1=e^{2\cdot 0+C_1},\\ 3/2=(1/2)\,e^{2\cdot 0+C_1}+C_2,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}1=e^{C_1},\\ 3/2=(1/2)\,e^{C_1}+C_2,\end{cases}$$

откуда $C_1=0$, $C_2=1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=(1/2)\,e^{2x}+1$. ●

34. Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$, если $y=2$ и $\frac{dy}{dx}=8$ при $x=2$.

○ Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$. Положим $\frac{dy}{dx}=z$; тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$. Подставив выражения для $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x+2}z$. Разделив переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x+2};\ \int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x+2},\ \ln z=\ln(x+2)+\ln C_1,$$

откуда $z=C_1(x+2)$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=C_1(x+2). \qquad (*)$$

Теперь можно найти общее решение данного уравнения:

$$y=(1/2)C_1x^2+2C_1x+C_2. \qquad (**)$$

Найдем частное решение, подставив в уравнения (*) и (**) начальные данные:

$$\begin{cases}8=C_1(2+2),\\ 2=(1/2)C_1\cdot 2^2+2C_1\cdot 2+C_2,\end{cases}$$

откуда $C_1=2$ и $C_2=-10$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=x^2+4x-10$. ●

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

35. $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; $y=2$ при $x=0$, $y=3$ при $x=1$.

36. $\frac{d^2y}{dx^2}=4$; $y=0$ при $x=0$, $y=1$ при $x=1$.

37. $\frac{d^2s}{dt^2}=6t$; $s=0$ и $\frac{ds}{dt}=10$ при $t=0$.

38. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^3}$; $y=0$ и $y'=0$ при $x=1$.

39. $\frac{d^2s}{dt^2}=18t+2$, $s=4$ и $\frac{ds}{dt}=5$ при $t=0$.

40. $\frac{d^2\theta}{d\omega^2}=\omega^2$; $\theta=0$ и $\frac{d\theta}{d\omega}=12$ при $\omega=0$.

41. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}$; $y=2$ и $\frac{dy}{dx}=1$ при $x=0$.

42. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$; $y=6$ и $\frac{dy}{dx}=1$ при $x=2$.

43. Ускорение свободно падающего тела удовлетворяет уравнению $\frac{d^2s}{dt^2}=g$ ($g\approx 9{,}8$ м/с^2). Найдите закон движения тела, если $s=s_0$ и $\frac{ds}{dt}=v_0$ в момент времени $t=0$.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0, \qquad (15.1)$$

где p и q — постоянные величины.

Для отыскания общего решения уравнения (15.1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2+pr+q=0, \qquad (15.2)$$

которое получается из уравнения (15.1) заменой $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ и y на соответствующие степени r, причем сама функция y заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (15.1) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (15.2). Здесь возможны три случая.

I случай. Корни r_1 и r_2 — действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (15.1) имеет вид

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}. \qquad (15.3)$$

II случай. Корни r_1 и r_2 — действительные и равные: $r_1=r_2=r$. Тогда общее решение уравнения (15.1) записывается так:

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}. \qquad (15.4)$$

III случай. Корни r_1 и r_2 — комплексно-сопряженные: $r_1=\alpha+\beta i$; $r_2=\alpha-\beta i$. В этом случае общее решение уравнения (15.1) записывается следующим образом:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \qquad (15.5)$$

44. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+10y=0$.

○ Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2-7r+10=0$; $r_1=2$, $r_2=5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (15.3) запишется так: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$. ●

45. Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}=0$, если $y=1$ и $\frac{dy}{dx}=-1$ при $x=0$.

○ Составим характеристическое уравнение $r^2-5r=0$, откуда $r_1=0$, $r_2=5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{5x},\ \text{т. е. } y=C_1+C_2e^{5x}.$$

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных C_1 и C_2. Подставив в общее решение значения $x=0$, $y=1$, получим $1=C_1+C_2$.

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения $x=0$, $\frac{dy}{dx}=-1$, имеем $\frac{dy}{dx}=5C_2e^{5x}$; $-1=5C_2$. Отсюда находим: $C_2=-1/5$, $C_1=1-C_2=6/5$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=6/5-(1/5)e^{5x}$. ●

46. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+16y=0$.

○ Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2-8r+16=0$; $r_1=r_2=4$. Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни; поэтому согласно формуле (15.4) общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде $y=(C_1+C_2x)e^{4x}$. ●

47. Найти частное решение уравнения $y''+8y'+16y=0$, если $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$.

○ Так как характеристическое уравнение $r^2+8r+16=0$ имеет равные действительные корни $r_1=r_2=-4$, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде

$$y=(C_1+C_2x)e^{-4x}=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}.$$

Дифферейцируя общее решение, имеем

$$y'=-4C_1e^{-4x}+C_2e^{-4x}-4C_2xe^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражения для y и y', получим систему уравнений

$$\begin{cases}1=C_1e^0+C_2\cdot 0\cdot e^0,\\ 1=-4C_1e^0+C_2e^0-4C_2\cdot 0\cdot e^0,\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}1=C_1,\\ 1=-4C_1+C_2,\end{cases}$$

откуда $C_1=1$ и $C_2=5$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y=e^{-4x}+5xe^{-4x}$. ●

48. Решить уравнение $y''-6y'+25y=0$.

○ Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2-6r+25=0$; $r_1=3+4i$, $r_2=3-4i$: здесь $\alpha=3$, $\beta=4$. Так как характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, то общее решение дифференциального уравнения согласно формуле (15.5) записывается в виде $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$. ●

49. Найти частное решение уравнения $y''-6y'+13=0$, если $y=1$ и $y'=5$ при $x=0$.

○ Поскольку характеристическое уравнение $r^2-6r+13=0$ имеет комплексно-сопряженные корни $r_1=3+2i$ и $r_2=3-2i$, общее решение данного дифференциального уравнения записывается так:

$$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y'=3e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{3x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)=$$
$$=e^{3x}(3C_1\cos 2x+3C_2\sin 2x-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)=$$
$$=e^{3x}[(3C_1+2C_2)\cos 2x+(3C_2-2C_1)\sin 2x].$$

Подставим теперь начальные данные в выражения для y и y':

$$\begin{cases}1=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0),\\ 5=e^0[(3C_1+2C_2)\cos 0+(3C_2-2C_1)\sin 0],\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}1=C_1,\\ 5=3C_1+2C_2,\end{cases}$$

откуда $C_1=1$ и $C_2=1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=e^{3x}(\cos 2x+\sin 2x)$. ●

Решите уравнения:

50. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$; 2) $y''-8y'+15y=0$; 3) $y''+5y'+6=0$.

51. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}-9\frac{dy}{dx}=0$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$; 3) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$.

52. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}-16y=0$; 3) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$.

53. Найдите частные решения уравнений:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$; $y=2$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$; $y=8$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$;

3) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-20=0$; $y=\frac{9}{5}$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$.

54. Решите уравнения:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0$; 2) $y''+2y'+y=0$; 3) $y''+10y'+25y=0$.

55. Найдите частные решения уравнений:

1) $y''-10y'+25y=0$; $y=2$ и $y'=8$ при $x=0$;
2) $y''+6y'+9y=0$; $y=1$ и $y'=2$ при $x=0$.

56. Решите уравнения:

1) $y''+9y=0$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=0$; 3) $y''+4y'+7y=0$.

57. Найдите частные решения уравнений:

1) $y''+9y=0$; $y=1$ и $y'=-6$ при $x=\pi/3$;
2) $y''-4y'+5y=0$; $y=1$ и $y'=-1$ при $x=0$.

§ 6. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

58. $ds-s\operatorname{ctg} t\,dt=0$; $s=2$ при $t=\pi/2$.

59. $(1-y)\,dx+(1+x)\,dy=0$; $y=3$ при $x=1$.

60. $(1-x^2)\,dy=xy\,dx$; $y=1$ при $x=0$.

61. $x^2dy+(x-1)y\,dx=0$; $y=1$ при $x=1$.

62. $\dfrac{dy}{dx}-2y-4=0$; $y=-1$ при $x=0$.

63. $\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{e^x}$; $y=5$ при $x=0$.

64. $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-\dfrac{1}{t}\dfrac{ds}{dt}$; $s=2$ и $\dfrac{ds}{dt}=1$ при $t=1$.

65. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-8y=0$; $y=4$ и $\dfrac{dy}{dx}=-4$ при $x=0$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

1) $4xy\,dx=(x^2+1)\,dy$; $y=4$ при $x=1$.

2) $y'+4y-2=0$; $y=1{,}5$ при $x=0$.

3) $\dfrac{d^2s}{dt^2}=6t-4$; $s=5$ и $\dfrac{ds}{dt}=6$ при $t=2$.

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-6y=0$; $y=5$ и $\dfrac{dy}{dx}=0$ при $x=0$.

5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+13=0$; $y=2$ и $\dfrac{dy}{dx}=1$ при $x=0$.

II вариант

Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

1) $(x^2+1)\,dy=xy\,dx$; $y=2$ при $x=\sqrt{3}$.

2) $y'=4y-2$; $y=1{,}5$ при $x=0$.

3) $\dfrac{d^2s}{dt^2}=6t+8$; $s=12$ и $\dfrac{ds}{dt}=-5$ при $t=-2$.

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=0$; $y=3$ и $\dfrac{dy}{dx}=0$ при $x=0$.

5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+13=0$; $y=3$ и $\dfrac{dy}{dx}=11$ при $x=0$.

Глава 16
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются *соединениями*.

Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются *комбинаторными*. Раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*.

1. Размещения. *Размещениями* из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]. \tag{16.1}$$

2. Перестановки. *Перестановками* из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом, т. е.

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

или

$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)n. \tag{16.2}$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно. Произведение $1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)n$ обозначают символом $n!$ (читается «n-факториал»), причем полагают $0!=1$, $1!=1$. Поэтому равенство (16.2) можно переписать в виде

$$P_n=n!. \tag{16.3}$$

Используя формулу (16.3), формуле (16.1) можно придать вид

$$A_n^m=\frac{P_n}{P_{n-m}}=\frac{n!}{(n-m)!}. \tag{16.4}$$

При решении задач часто используется равенство

$$A_n^{m+1}=(n-m)A_n^m. \tag{16.5}$$

3. Сочетания. *Сочетаниями* из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m. Оно находится по формуле

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}, \tag{16.6}$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (16.7)$$

или

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!}. \qquad (16.8)$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m=C_n^{n-m} \quad (0\leqslant m\leqslant n) \qquad (16.9)$$

(по определению полагают $C_n^n=1$ и $C_n^0=1$);

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}. \qquad (16.10)$$

1. Найти число размещений: 1) из 10 элементов по 4; 2) из $n+4$ элементов по $n-2$.

○ Согласно формуле (16.1), получим:
1) $A_{10}^4=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040$;
2) $A_{n+4}^{n-2}=(n+4)(n+3)\dots[n+4-(n-2-1)]=(n+4)(n+3)\dots 8\cdot 7$. ●

2. Решить уравнение $A_n^5=30A_{n-2}^4$.

○ Используя формулу (16.1), перепишем уравнение в виде

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Учитывая, что $n\geqslant 6$, разделим обе его части на $(n-2)(n-3)(n-4)$; далее, имеем

$$(n(n-1)=30(n-5))\Leftrightarrow(n^2-31n+150=0)\Leftrightarrow(n_1=6;\ n_2=25).$$ ●

3. Составить всевозможные перестановки из элементов: 1) 1; 2) 5, 6; 3) a, b, c.

○ 1) (1); $P_1=1$; 2) (5, 6); (6, 5); $P_2=1\cdot 2=2$; 3) (a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (c, a, b); (c, b, a); $P_3=1\cdot 2\cdot 3=6$. ●

4. Вычислить значения выражений: 1) $5!+6!$; 2) $\frac{52!}{50!}$.

○ 1) $5!+6!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120+720=840$;
2) $\frac{52!}{50!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50!}{50!}=52\cdot 51=2652$. ●

5. Вычислить: 1) C_{15}^{13}; 2) $C_6^4+C_5^0$.

○ Согласно формуле (16.7), получим:

1) $C_{15}^{13}=\frac{15!}{13!(15-13)!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!\,2\cdot 1}=15\cdot 7=105$;

2) $C_6^4+C_5^0=\frac{6!}{4!(6-4)!}+1=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1}+1=15+1=16$. ●

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}C_x^y=C_x^{y+2},\\ C_x^2=66.\end{cases}$$

○ Решим второе уравнение: $(C_x^2=66)\Leftrightarrow\left(\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}=66\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x^2-x-132=0)\Leftrightarrow(x_1=-11,\ x_2=12)$. Так как $x>2$, то $x_1=-11$ не удовлетворяет условию задачи.

Подставив $x=12$ в первое уравнение системы, получим $C_{12}^y=C_{12}^{y+2}$. Используя формулу (16.9), имеем $C_{12}^4=C_{12}^{12-y}$. Тогда $C_{12}^{12-y}=C_{12}^{y+2}$ и, следовательно, $12-y=y+2$, откуда $y=5$. Итак, получаем ответ: $x=12$, $y=5$. ●

7. Найдите число размещений: 1) A_{15}^3, 2) A_{m-1}^{m-5}.

8. Вычислите: 1) $A_7^3+A_6^3+A_5^3$; 2) $\frac{A_6^5+A_6^4}{A_6^3}$; 3) $A_5^2\cdot A_4^2\cdot A_3^2$.

9. 30 учащихся обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

10. Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

11. Решите уравнения: 1) $A_{n-2}^3=4A_{n-3}^2$; 2) $20A_{n-2}^3=A_n^5$; 3) $A_n^4=15A_{n-2}^3$.

12. Решите уравнения: 1) $A_7^3=42x$; 2) $\frac{x}{A_x^3}=\frac{1}{12}$; 3) $A_{m+1}^3=5m(m+1)$;

4) $\frac{A_x^4+A_x^2}{A_x^2}=13$; 5) $A_{2x}^3=14A_x^3$.

13. Составьте всевозможные перестановки из букв: a, b, c, d.

14. Вычислите значения следующих выражений: 1) $\frac{10!-8!}{89}$; 2) $\frac{5!+6!}{4!}$; 3) $6!(7!-3!)$.

15. Докажите тождества:

1) $\frac{(m+4)!}{m!}=(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$; 2) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}=(n-2)(n-3)$.

16. Сократите дроби: 1) $\frac{n!}{(n-2)!}$; 2) $\frac{(n-3)!}{n!}$; 3) $\frac{2m(2m-1)}{(2m)!}$.

17. Выполните действия:

1) $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$; 2) $\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}$; 3) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)!}$.

18. Сколько нужно взять элементов, чтобы число всех перестановок из этих элементов: 1) не превышало 100; 2) было меньше 200?

19. Сколькими способами можно составить список из 10 человек?

20. Сколькими способами можно распределить 12 классных комнат под 12 учебных кабинетов?

21. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений?

22. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 7 местам?

23. Вычислите: 1) C_{12}^{10}; 2) C_{100}^{98}; 3) C_8^5; 4) $C_{100}^{100}+C_{100}^1$.

24. Проверьте равенства:

1) $C_n^6=\frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$; 2) $C_{15}^6=C_{15}^9$; 3) $C_{10}^5+C_{10}^6=C_{11}^6$; 4) $C_{14}^9+C_{14}^{10}=C_{15}^{10}$.

25. Проверьте равенства: 1) $C_{20}^{12}=\frac{A_{20}^8}{P_8}$; 2) $C_{15}^4-C_{15}^3=\frac{C_{16}^4}{2}$.

26. Число сочетаний из n элементов по 3 в пять раз меньше числа сочетаний из $n+2$ элементов по 4. Найдите n.

27. Сколькими способами из 15 рабочих можно создать бригады по 5 человек в каждой?

28. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}C_n^m=C_n^{m+2},\\ C_n^2=153;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}C_m^n=C_m^{n+1},\\ A_m^2=20.\end{cases}$

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

1. Случайные события. Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, — *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

2. Классическое определение вероятности. *Вероятностью* события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т. е.

$$P(A)=m/n. \qquad (16.11)$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$. Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)=0$, а достоверному — вероятность $P(A)=1$.

29. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

○ Общее число различных исходов есть $n=1000$. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет $m=200$. Согласно формуле (16.11), получим $P(A)=200/1000=1/5=0{,}2$. ●

30. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

○ Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через A. Общее число случаев $n=5+3=8$. Число случаев m, благоприятствующих появлению события A, равно 3. По формуле (16.11) получим $P(A)=m/n=3/8=0{,}375$. ●

31. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

○ Обозначим событие, состоящее в появлении двух черных шаров, через A. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов $(12+8)$ по два:

$$n=C_{20}^2=\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}=190.$$

Число случаев m, благоприятствующих событию A, составляет

$$m=C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28.$$

По формуле (16.11) находим вероятность появления двух черных шаров:

$$P(A)=m/n=28/190=14/95=0{,}147.$$ ●

32. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

○ Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5, т. е.

$$C_{18}^5=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=8568.$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^3=\frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}=364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет

$$m=C_4^2\cdot C_{14}^3=6\cdot 364=2184.$$

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A)=2184/8568=0{,}255.$$ ●

33. В ящике с деталями оказалось 300 деталей I сорта, 200 деталей II сорта и 50 деталей III сорта. Наудачу вынимают одну из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь I, II или III сорта?

34. В урне находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар также окажется белым.

35. В урне находятся 7 белых и 5 черных шаров. Найдите вероятность того, что: 1) наудачу вынутый шар окажется черным; 2) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

36. Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным, найдите вероятность выпадения грани с нечетным числом очков.

37. В коробке имеются 30 лотерейных билетов, из которых 26 пустых (без выигрышей). Наугад вынимают одновременно 4 билета. Найдите вероятность того, что из 4 билетов два окажутся выигрышными (см. задачу 32).

§ 3. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B); \tag{16.12}$$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{16.13}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{16.14}$$

Для трех совместных событий имеет место формула

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{16.15}$$

Событие, противоположное событию A (т. е. ненаступление события A), обозначают $\bar{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \tag{16.16}$$

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется *условной вероятностью* события A при условии B и обозначается $P_B(A)$ или $P(A/B)$.

Если A и B — независимые события, то

$$P(B)-P_A(B)=P_{\bar{A}}(B). \tag{16.17}$$

События A, B, C, ... называются *независимыми в совокупности*, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

38. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

○ I способ. Очевидно, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B — одна деталь стандартная, две нестандартные; C — две детали стандартные, одна нестандартная и D — три детали стандартные.

Таким образом, событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+D$. По теореме сложения имеем $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$. Находим вероятность каждого из этих событий (см. задачу 32):

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}=\frac{5}{1}\cdot\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{35}{76};$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{15}{1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38};$$

$$P(D)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}.$$

Сложив найденные величины, получим $P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$.

II способ. События A (хотя бы одна из трех взятых деталей оказалась стандартной) и $\bar{A}$ (ни одна из взятых деталей не оказалась стандартной) являются противоположными; поэтому $P(A)+P(\bar{A})=1$ или $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Вероятность появления события $\bar{A}$ составляет

$$P(\bar{A})=\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{91}{228}.$$

Следовательно, искомая вероятность есть $P(A)=1-P(\bar{A})=1-91/228=137/228=0{,}601$. ●

39. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

○ Пусть A — событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а B — в том, что оно кратно 5. Найдем $P(A+B)$. Так как A и B совместные события, то воспользуемся формулой (16.14):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, ..., 98, 99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события A); 18 — кратными 5 (благоприятствуют наступлению события B) и 6 — кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события AB). Таким образом, $P(A)=30/90=1/3$, $P(B)=18/90=1/5$, $P(AB)=6/90=1/15$, т. е.

$$P(A+B)=1/3+1/5-1/15=7/15=0{,}467.$$ ●

40. В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер взял наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.

41. В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется: 1) белым; 2) черным или красным.

42. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

§ 4. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (16.18)$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)...P(A_n). \qquad (16.19)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. *Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (16.20)$$

43. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой — 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

○ Пусть A — появление белого шара из первой урны, а B — появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события A и B независимы. Найдем $P(A)=4/12=1/3$, $P(B)=3/12=1/4$. По формуле (16.18) получим

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=(1/3)\cdot(1/4)=1/12=0{,}083. \bullet$$

44. В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

○ Введем следующие обозначения: A — первая взятая деталь стандартная; B — вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет $P(A)=8/12=2/3$. Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т. е. условная вероятность события B, равна $P_A(B)=7/11$.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=(2/3)\cdot(7/11)=14/33=0{,}424. \bullet$$

45. Рабочий обслуживает два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равна 0,8, а для второго автомата эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.

46. В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

47. В урне находятся 10 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся черными.

§ 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть события (гипотезы) B_1, B_2, ..., B_n образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например B_i, событие A может наступить с некоторой условной вероятностью $P_{B_i}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A), \qquad (16.21)$$

где $P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_n)=1$.

Формула (16.21) называется формулой полной вероятности.

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса (*формуле вероятности гипотез*):

$$P_A(B_i)=\frac{P_A(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \qquad (16.22)$$

где $P_A(B_i)$ — вероятность каждой из гипотез после испытания, в результате которого наступило событие A; $P_{B_i}(A)$ — условная вероятность события A после наступления события B_i, а $P(A)$ находится по формуле полной вероятности (16.21).

48. На склад поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на втором — 35% и на третьем 25%, причем на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором — 80% и на третьем — 70%. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

○ Введем следующие обозначения: B_1 — деталь изготовлена на первом станке, B_2 — на втором станке и B_3 — на третьем станке; событие A — деталь оказалась первого сорта. Из условия следует, что $P(B_1)=0{,}4$, $P(B_2)=0{,}35$, $P(B_3)=0{,}25$, $P_{B_1}(A)=0{,}9$, $P_{B_2}(A)=0{,}8$ и $P_{B_3}(A)=0{,}7$. Следовательно,

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}35\cdot 0{,}8+0{,}25\cdot 0{,}7=0{,}815. \bullet$$

49. В первом ящике имеются 8 белых и 6 черных шаров, а во втором — 10 белых и 4 черных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар — черный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

○ Введем обозначения: B_1 — был выбран первый ящик; B_2 — был выбран второй ящик; A — при проведении двух последовательных испытаний выбора ящика и выбора шара был вынут черный шар. Тогда $P(B_1)=1/2$, $P(B_2)=1/2$. Вероятность извлечения черного шара после того, как выбран первый ящик, составляет $P_{B_1}(A)=6/14=3/7$. Вероятность извлечения черного шара после того, как выбран второй ящик, равна $P_{B_2}(A)=4/14=2/7$.

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что вынутый шар оказался черным:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=(1/2)\cdot(3/7)+(1/2)\cdot(2/7)=5/14.$$

Искомая вероятность того, что черный шар был вынут из первого ящика, вычисляется по формуле Байеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{(1/2)\cdot(3/7)}{5/14}=\frac{3}{5}=0{,}6. \bullet$$

50. В урну, содержащую три шара, положили белый шар, после чего из нее наугад вынули один шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету) равновозможны.

51. В ящике сложены детали: 16 деталей с первого участка, 24 — со второго и 20 — с третьего. Вероятность того, что деталь, изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

52. На двух автоматах производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит 80% деталей первого сорта, а второй — 90%. Взятая наудачу с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найдите вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

53. Имеются три партии деталей по 30 шт. в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 30, 25 и 20. Из произвольно выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найдите вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

§ 6. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми относительно события A*.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p (где $0<p<1$), событие A наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{где}\ q=1-p. \qquad (16.23)$$

54. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет $p=0{,}8$. Найти вероятность четырех попаданий при шести выстрелах.

○ Здесь $n=6$, $k=4$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. По формуле Бернулли находим

$$P_6(4)=\frac{6!}{4!(6-4)!}\cdot(0{,}8)^4\cdot(0{,}2)^4\cdot(0{,}2)^{6-4}=\frac{6!}{4!2!}\cdot(0{,}8)^4\cdot(0{,}2)^2=0{,}246. \bullet$$

55. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найдите вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

56. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет три?

57. При обработке деталей на станке в среднем 4% из них бывают с дефектами. Какова вероятность того, что каждые две детали из 30 взятых на проверку окажутся с дефектами?

§ 7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

55. Решите уравнения:

1) $\frac{(n+2)!}{n!}=110$; 2) $\frac{(k+1)!}{(k-1)!}=42$;

3) $8C_{2n+1}^{n+1}=5C_{2n+2}^{n+2}$; 4) $13C_{2n}^{n+1}=8C_{2n+1}^{n-1}$;

5) $C_n^3=\frac{4}{15}C_{n+2}^4$.

59. Решите неравенства: 1) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}<20$; 2) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}>30$.

60. Число сочетаний из n элементов по 4 относится к числу сочетаний из $n+2$ элементов по 5, как 5:18. Найдите n.

61. В ящике находятся 6 белых и 10 черных шаров. Наудачу вынимают одновременно два шара. Найдите вероятность того, что оба шара окажутся черными.

62. В урне находятся 6 белых и 4 черных шара. Вынимают один за другим два шара. Найдите вероятность того, что оба шара окажутся черными.

63. В урне находятся 15 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад один шар, снова возвращают его в урну и шары перемешивают. Затем вынимают второй шар. Найдите вероятность, что оба вынутых шара белые.

64. В первой урне находятся 10 белых и 2 черных шара, а во второй — 4 белых и 8 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

65. На отдельных карточках написаны буквы «и», «л», «о», «е», «ч». После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Вычислите вероятность того, что из этих букв составится слово «число».

66. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности попадания в цель для первого, второго и третьего стрелков соответственно

равны 3/4, 4/5 и 9/10. Найдите вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

67. На книжной полке произвольным образом расставлены восемь книг. Вычислите вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

68. На трех автоматических линиях изготовляются одинаковые детали. На первой линии изготовляется 50% всех деталей, на второй — 30% и на третьей — 20%. При этом на первой линии изготовляется 0,025 нестандартных деталей, на второй — 0,02 и на третьей — 0,015. Найдите вероятность того, что наудачу взятая из готовой продукции деталь окажется стандартной.

69. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом «герб» выпадет 3 раза?

70. В ящике находятся 60 стандартных и 40 нестандартных деталей. Найдите вероятность того, что из взятых наудачу двух деталей одна окажется стандартной, а другая нестандартной.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Докажите тождество
$$C_n^9+C_n^8=C_{n+1}^9.$$
2) Решите уравнение
$$\frac{n!}{(n-5)!}=\frac{20n!}{(n-3)}.$$
3) Решите уравнение
$$5C_{2n}^{n-1}=8C_{2n-1}^{n}.$$
4) Талоны, свернутые в трубочку, занумерованы всеми двузначными числами. Наудачу берут один талон. Какова вероятность того, что номер взятого талона состоит из одинаковых цифр?

5) В ящике находятся детали, из которых 12 изготовлены на первом станке, 20 — на втором и 16 — на третьем. Вероятность того, что детали, изготовленные на первом, втором и третьем станках, отличного качества, соответственно равна 0,9; 0,8 и 0,6. Найдите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

II вариант

1) Докажите тождество
$$C_{n+3}^5+C_{n+3}^4=C_{n+4}^5.$$
2) Решите уравнение
$$\frac{(2n)!}{(2n-3)!}=\frac{40n!}{(n-1)!}.$$
3) Решите уравнение
$$7C_{2n-2}^{n-2}=3C_{2n-1}^{n-1}.$$
4) В урие 12 шаров. Среди этих шаров 3 белых и 9 черных. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?

5) На двух поточных линиях производятся одинаковые изделия, которые поступают в ОТК. Производительность первой поточной линии вдвое больше производительности второй. Первая поточная линия в среднем производит 70% изделий первого сорта, а вторая — 90%. Наудачу взятое ОТК на проверку изделие оказалось первого сорта. Найдите вероятность того, что это изделие произведено на первой поточной линии.

РАЗДЕЛ III
ГЕОМЕТРИЯ

Глава 17
ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Параллельный перенос. Преобразование фигуры F на плоскости, при котором ее произвольная точка с координатами (x, y) переходит в точку с координатами $(x+a;\ y+b)$, где a и b — постоянные, называется *параллельным переносом*. Параллельный перенос задается формулами
$$x'=x+a,\quad y'=y+b, \tag{17.1}$$
где $(x';\ y')$ — координаты точки, в которую переходит точка $(x;\ y)$ при параллельном переносе.

2. Понятие вектора. Отрезок называется *направленным*, если один из его концов считается началом отрезка, а другой — его концом.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор, заданный парой (A, B) несовпадающих точек, обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Точка A называется *началом*, а точка B — *концом* вектора.

Расстояние $|AB|$ называется *длиной* (*модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$.

Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$.

Вектор $\overrightarrow{AA}$, концы которого совпадают, называется *нулевым вектором*. Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления для нулевого вектора не вводится.

Каждый вектор, отличный от нулевого, вполне характеризуется своим направлением и длиной.

3. Коллинеарные векторы. Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), во втором — *противоположно направленными* ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

4. Равенство векторов. Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом, т. е. если существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора.

Другими словами, равные векторы сонаправлены и равны по модулю, т. е. если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, и, обратно, если векторы сонаправлены и равны по модулю, то они равны, т. е. если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то $\vec{a}=\vec{b}$.

Любой вектор равен самому себе: $\vec{a}=\vec{a}$.

Если $\vec{a}=\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{a}=\vec{c}$.

5. Откладывание вектора от данной точки. Из любой точки плоскости можно отложить единственный вектор, равный данному вектору. Построение вектора $\overrightarrow{MN}$, равного вектору $\vec{a}$, называют *откладыванием* вектора $\vec{a}$ от точки M (рис. 96).

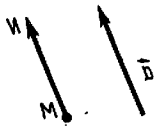


Рис. 96

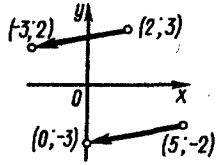


Рис. 97

Чтобы построить вектор $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$, проведем из точки M луч, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, и отложим на нем отрезок MN такой, что $MN=|\vec{a}|$. Тогда $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$.

1. Параллельный перенос переводит точку (2; 3) в точку (−3; 2). В какую точку он переведет точку (5; −2)?

○ Используя формулы (17.1), находим значения a и b, соответствующие параллельному переносу точки (2; 3) в точку (−3; 2):

$$-3=2+a,\ 2=3+b,\ \text{т. е. } a=-5,\ b=-1.$$

Далее, по формулам (17.1) получаем

$$x'=5-5=0,\ y'=-2-1=-3,$$

т. е. точка (5; −2) переходит в точку (0; −3) (рис. 97). ●

2. Параллельный перенос переводит точку (−4; 1) в точку (2; −3). В какую точку он переведет точку (5; 5)?

3. Параллельный перенос переводит начало координат в точку (−3; −5). В какую фигуру он переведет треугольник ABC с вершинами $A(-2; 6)$, $B(4; 8)$, $C(5; 3)$?

4. Дан параллелограмм. Выполните параллельный перенос, который отображает точку пересечения его диагоналей в одну из его вершин.

5. Сколько векторов задают всевозможные упорядоченные пары точек, составленные из вершин: 1) треугольника; 2) параллелограмма?

6. Даны пары точек: 1) (−2; −3); (5; 4); 2) (6; −2), (13; 5); 3) (−8; −5), (−1; 1). Укажите, какие пары определяют равные векторы.

7. Дан параллелограмм $ABCD$; O — точка пересечения его диагоналей. Какие пары, составленные из точек A, B, C, D и O, определяют один и тот же вектор?

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

1. Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку A и отложить от нее вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а затем от точки B отложить вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является искомой суммой: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ (рис. 98).

Вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ называют *замыкающим* вектором, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — *составляющими* векторами. Этот способ построения называется правилом треугольника.

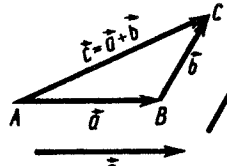


Рис. 98

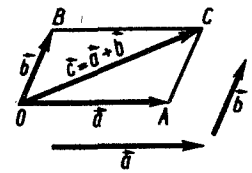


Рис. 99

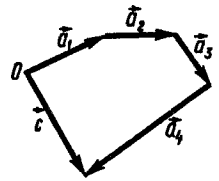


Рис. 100

Правило треугольника можно сформулировать и так: если A, B и C — произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Это равенство называют правилом трех точек.

Сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить и следующим образом. Откладывая от произвольной точки O (рис. 99) векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, построим параллелограмм $OACB$. Тогда вектор $\overrightarrow{OC}$ (где $[\overrightarrow{OC}]$ — диагональ параллелограмма) является искомой суммой: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Этот способ построения называется правилом параллелограмма.

Для того чтобы построить сумму n данных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, нужно от произвольной точки O отложить вектор $\vec{a}_1$, затем от конца вектора $\vec{a}_1$ отложить вектор $\vec{a}_2$, ..., наконец, от конца вектора $\vec{a}_{n-1}$ отложить вектор $\vec{a}_n$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}_1$, а конец — с концом вектора $\vec{a}_n$, является искомой суммой: $\vec{c}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+|...+\vec{a}_n$ (рис. 100).

2. Вычитание векторов. Два вектора называются *противоположными*, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$. Таким образом, $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

Ненулевые противоположные векторы имеют равные длины и противоположные направления (рис. 101).

Вектор $\vec{c}$ называется *разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, достаточно прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 102).

Другой способ построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ состоит в следующем. Откладывая от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OC}=-\vec{b}$ (вектор, противоположный вектору $\vec{b}$), получим $\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$ (рис. 103).

3. Умножение вектора на число. *Произведением* ненулевого *вектора* $\vec{a}$ *на число* m называется вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$, если $m>0$, и противоположное направление, если $m<0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа m.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число m обозначается $m\vec{a}$. При любых m и $\vec{a}$ векторы $m\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны и $|m\vec{a}|=|m|\cdot|\vec{a}|$.

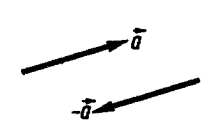


Рис. 101

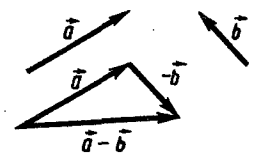


Рис. 102

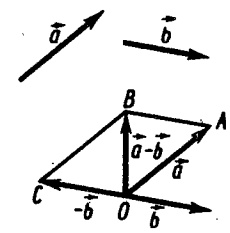


Рис. 103

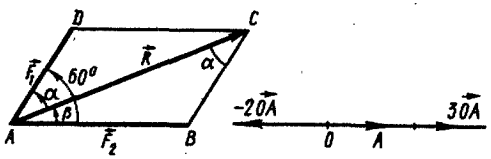


Рис. 104

Рис. 105

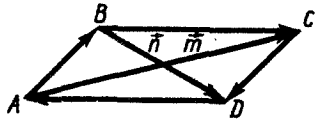


Рис. 106

4. Угол между двумя векторами. *Углом между двумя* ненулевыми *векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между направлениями этих векторов: $(\vec{a}, \vec{b})=\varphi$, где $0\leqslant\varphi\leqslant 180°$.

Частные случаи: 1) если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b})=0$; 2) если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b})=180°$.

8. Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$. Найти модуль вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

○ По теореме косинусов имеем $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. Так как $\cos C=\cos[180°-(\vec{a}, \vec{b})]=-\cos(\vec{a}, \vec{b})$, то

$$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\vec{a}, \vec{b})}.$$ ●

9. Найти модуль равнодействующей $\vec{R}$ двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и углы, образуемые равнодействующей с силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если $F_1=4$ Н и $F_2=6$ Н, а $\varphi=60°$ (рис. 104).

○ Используя формулу предыдущей задачи, находим

$$R=\sqrt{4^2+6^2+2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos 60°}=\sqrt{16+36+24}=\sqrt{76}=8{,}72\ (\text{Н}).$$

По теореме синусов имеем

$$F_2/\sin\alpha=F_1/\sin\beta=R/\sin(180°-\varphi)=R/\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha=(F_2\sin\varphi)/R=(6\sin 60°)/8{,}72=0{,}596;\quad \alpha=36°,6;$$
$$\sin\beta=(F_1\sin\varphi)/R=(4\sin 60°)/8{,}72=0{,}397;\quad \beta=23°,4.$$

Контрольное вычисление: $\alpha+\beta=36°,6+23°4,=60°$. ●

10. Дан ненулевой вектор $\vec{OA}$. Отложить от точки O векторы: 1) $3\vec{OA}$; 2) $-2\vec{OA}$; 3) $0{,}5\vec{OA}$; 4) $-0{,}75\vec{OA}$; 5) $\sqrt{2}\vec{OA}$.

○ На рис. 105 изображены векторы $3\vec{OA}$ и $-2\vec{OA}$. Остальные векторы отложите самостоятельно. ●

11. Векторы $\vec{AC}=\vec{m}$ и $\vec{BD}=\vec{n}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис. 106).

○ По определению суммы и разности векторов имеем $\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{n}$, $\vec{BC}-\vec{CD}=\vec{m}$. Сложив эти равенства, получим $\vec{BC}=(\vec{m}+\vec{n})/2$. Далее, находим:

$$\vec{CD}=\vec{n}-\vec{BC}=\vec{n}-(\vec{m}+\vec{n})/2=(\vec{n}-\vec{m})/2,$$

$$\vec{AB}=-(\vec{n}-\vec{m})/2=(\vec{m}-\vec{n})/2,\quad \vec{DA}=-\vec{BC}=-(\vec{m}+\vec{n})/2.$$ ●

12. По данным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

13. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник?

14. Найдите модуль равнодействующей двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и углы, образуемые равнодействующей с силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если модули сил равны $F_1=8$ Н и $F_2=5$ Н, а угол между ними равен 30°.

15. При каких значениях m длина вектора $m\vec{a}$ (где $\vec{a}\neq 0$) удовлетворяет условиям: 1) $|m\vec{a}|=|\vec{a}|$; 2) $|m\vec{a}|>|\vec{a}|$; 3) $|m\vec{a}|<|\vec{a}|$?

16. В треугольнике ABC медианы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Найдите множитель m, если: 1) $\vec{A_1C}=m\cdot\vec{BC}$; 2) $\vec{C_1B}=m\cdot\vec{C_1A}$; 3) $\vec{AM}=m\cdot\vec{MA_1}$.

17. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Выразите $\vec{CM}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$.

18. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

19. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, O — его центр, $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$. Найдите $\vec{OC}$, $\vec{OD}$, $\vec{OE}$ и $\vec{OF}$.

§ 3. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1. Ось. Угол между вектором и осью. Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется *осью*.

Вектор $\vec{e}$, имеющий длину $|\vec{e}|=1$ и направление, совпадающее с направлением оси, называется *единичным вектором* (*ортом*) этой оси.

Если $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{e}$ — вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, то $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e}$.

Углом между ненулевым *вектором* $\vec{a}\neq 0$ *и осью* l называется угол между направлениями оси и вектора: $(\vec{a}, l)=\varphi$, где $0\leqslant\varphi\leqslant 180°$.

2. Проекция вектора на ось. *Проекцией вектора на ось* называется направленный отрезок на оси, начало которого есть проекция начала вектора и конец — проекция его конца. Длина этого направленного отрезка берется со знаком плюс, если направления отрезка и оси совпадают, и со знаком минус, если их направления противоположны (рис. 107).

Проекция вектора $\vec{a}\neq 0$ на ось l равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла φ между осью и вектором (рис. 108):

$$\text{пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi.\qquad (17.2)$$

Отметим свойства проекций:

$$\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_l\vec{a}+\text{пр}_l\vec{b};\quad \text{пр}_l(m\vec{a})=m\cdot\text{пр}_l\vec{a}.$$

3. Прямоугольная система координат. Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, отложенных от некоторого начала — точки O (рис. 109). Такую пару векторов называют

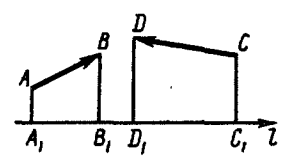


Рис. 107

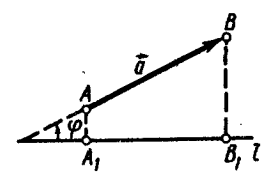


Рис. 108

Рис. 109

прямоугольным базисом на плоскости. Совокупность начала O и прямоугольного базиса $(\vec{i}, \vec{j})$ называют *прямоугольной системой координат* на плоскости. Точку O называют *началом координат*, а векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — *координатными векторами*.

4. Координаты вектора. Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку M плоскости xOy, называется *радиусом-вектором* точки M и обозначается $\vec{r}$: $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ (рис. 110).

Проекции вектора $\vec{r}$ на координатные оси, т. е. $\text{пр}_x\vec{r}=x$ и $\text{пр}_y\vec{r}=y$, называются *координатами вектора* (рис. 110).

Координаты вектора $\vec{r}$ кратко записывают так: $\vec{r}=(x;\ y)$.

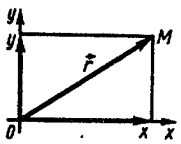


Рис. 110

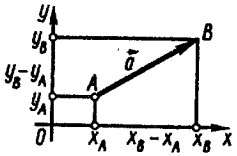


Рис. 111

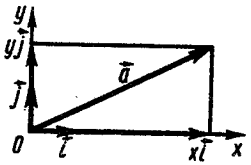


Рис. 112

Координаты радиуса-вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ являются одновременно координатами точки M, т. е. конца радиуса-вектора $\vec{r}$.

Если начало вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ не совпадает с началом координат, то координаты вектора $\vec{a}$ и координаты его конца различны (рис. 111). В этом случае проекции вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на оси координат соответственно равны $x=x_B-x_A$ и $y=y_B-y_A$, т. е.

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x;\ y)=(x_B-x_A;\ y_B-y_A). \qquad (17.3)$$

5. Разложение вектора по координатным осям. Разложение вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ имеет вид

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}, \qquad (17.4)$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор на оси Ox, а $\vec{j}$ — единичный вектор на оси Oy (рис. 112). Числа x и y называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

Векторы $x\vec{i}$ и $y\vec{j}$ называются *составляющими* (или *компонентами*) вектора $\vec{a}$ по осям координат.

Если начало вектора $\vec{a}$ находится в точке $A(x_A;\ y_A)$, а конец — в точке $B(x_B;\ y_B)$, то разложение вектора $\vec{a}$ записывается в виде

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}. \qquad (17.5)$$

6. Правила действий над векторами, заданными своими координатами. Если в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ заданы векторы $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то:

координаты суммы двух (или более) векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т. е. $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$;

координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$;

координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число, т. е. $m\vec{a}=(mx_1;\ my_1)$.

7. Условие коллинеарности двух векторов. Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ имеет вид

$$x_1=mx_2,\ \ y_1=my_2, \qquad (17.6)$$

т. е. *если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.*

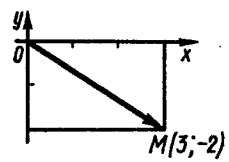


Рис. 113

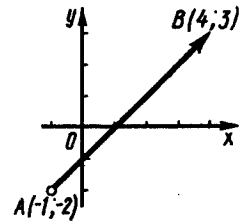


Рис. 114

Если $m>0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление; если $m<0$, то направления векторов противоположны.

20. Дано $\text{пр}_l\vec{a}=-2$; $\text{пр}_l\vec{b}=1$. Вычислить: 1) $\text{пр}_l(2\vec{a}+\vec{b})$; 2) $\text{пр}_l(3\vec{a}-2\vec{b})$.

○ Используя свойства проекций, получим:
1) $\text{пр}_l(2\vec{a}+\vec{b})=2\text{пр}_l\vec{a}+\text{пр}_l\vec{b}=2\cdot(-2)+1=-3$;
2) $\text{пр}_l(3\vec{a}-2\vec{b})=3\text{пр}_l\vec{a}-2\text{пр}_l\vec{b}=3\cdot(-2)-2\cdot1=-8$. ●

21. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на ось l, образующую с вектором угол 60°, если $|\vec{a}|=6$.

○ По формуле (17.2) получим $\text{пр}_l\vec{a}=6\cdot\cos 60°=3$. ●

22. Построить: 1) вектор $\vec{a}=(3;\ -2)$; 2) вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $A(-1;\ -2)$, $B(4;\ 3)$.

○ 1) Строим радиус-вектор с концом в точке $M(3;\ -2)$ (рис. 113). Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ — искомый.

2) Строим точки $A(-1;\ -2)$ — начало вектора и $B(4;\ 3)$ — конец вектора (рис. 114). Вектор $\overrightarrow{AB}$ — искомый. ●

23. Найти координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $A(-1;\ -2)$, $B(4;\ 5)$.

○ По формуле (17.3) получим $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(4-(-1);\ 5-(-2))=(5;\ 7)$. ●

24. Выразить через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следующие векторы: 1) $\vec{a}=(-2;\ 4)$; 2) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(-2;\ -1)$, $B(4;\ -3)$.

○ 1) Здесь $x=-2$, $y=4$. По формуле (17.4) получим $\vec{a}=-2\vec{i}+4\vec{j}$.
2) По формуле (17.5) находим

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(4-(-2))\vec{i}+(-3-(-1))\vec{j}=6\vec{i}-2\vec{j}. \quad ●$$

25. Проверить, коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; если да, то сонаправлены ли они. Векторы соответственно заданы точками: 1) $A(1;\ 1)$, $B(7;\ 3)$, $C(-4;\ -5)$ и $D(5;\ -2)$; 2) $A(2;\ 1)$, $B(-4;\ 4)$, $C(-1;\ -1)$ и $D(7;\ -5)$; 3) $A(2;\ 1)$, $B(6;\ 5)$, $C(3;\ -1)$ и $D(7;\ -2)$.

○ 1) По формуле (17.3) находим координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=(6;\ 2)$, $\overrightarrow{CD}=(9;\ 3)$. Используя соотношения (17.6), устанавливаем, что координаты этих векторов пропорциональны: $6/9=2/3=m>0$; следовательно, векторы коллинеарны и сонаправлены.

2) Аналогично получаем: $\overrightarrow{AB}=(-6;\ 3)$, $\overrightarrow{CD}=(8;\ -4)$, $(-6)/8=3/(-4)=m<0$; следовательно, векторы коллинеарны и противоположно направлены.

3) Имеем $\overrightarrow{AB}=(4; 4)$, $\overrightarrow{CD}=(4; -1)$; так как $4/4\neq(-1)/4$, то координаты не пропорциональны и, следовательно, векторы не коллинеарны. ●

26. Дано: $\text{пр}_l\vec{a}=-1$, $\text{пр}_l\vec{b}=3$. Вычислите: 1) $\text{пр}_l(\vec{a}-\vec{b})$; 2) $\text{пр}_l\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)$.

27. Докажите, что если для двух непараллельных осей l и n выполнены соотношения $\text{пр}_l\vec{a}=0$ и $\text{пр}_n\vec{a}=0$, то $\vec{a}=0$.

28. В каком случае проекция вектора на ось: 1) равна нулю; 2) равна по абсолютной величине длине данного вектора?

29. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ симметричны относительно прямой l. Каким соотношением связаны между собой проекции этих векторов на ось n: 1) параллельную прямой l; 2) перпендикулярную прямой l?

30. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При каком положении оси l справедливо равенство $\text{пр}_l\vec{a}=\text{пр}_l\vec{b}$?

31. Найдите проекцию вектора $\vec{a}$ на ось l, образующую с вектором угол: 1) 45°; 2) 120°; 3) 150°.

32. Постройте векторы: 1) $\vec{a}=(-2; 4)$; 2) $\vec{b}=(3; 2)$; 3) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $A(-1; -1)$, $B(4; 1)$; 4) $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, если $C(0; 2)$, $D(4; 0)$.

33. Найдите координаты вектора: 1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(-2; -2)$, $B(4; -1)$; 2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(1; -3)$, $C(4; -5)$.

34. Даны векторы $\vec{a}=(-2; -3)$, $\vec{b}=(5; 0)$, $\vec{c}=(3; -5)$. Найдите координаты векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 4) $2\vec{a}$; 5) $3\vec{a}-\vec{c}$; 6) $\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$.

35. Выразите через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы: 1) $\vec{a}=(-2; -4)$; 2) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $A(-1; 2)$, $B(-2; -6)$.

36. Даны точки: $A(-2; -3)$, $B(2; 4)$ и $C(5; 1)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

37. Проверьте, коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; если да, то сонаправлены ли они. Векторы соответственно заданы точками: 1) $A(-3; 6)$, $B(1; 2)$, $C(4; -6)$ и $D(-2; 0)$; 2) $A(-3; 1)$, $B(3; 3)$, $C(-2; -3)$ и $D(6; -1)$; 3) $A(-3; -6)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -5)$ и $D(5; 3)$.

§ 4. ДЛИНА ВЕКТОРА. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ. УГЛЫ, ОБРАЗУЕМЫЕ ВЕКТОРОМ С ОСЯМИ КООРДИНАТ

Длина радиуса-вектора $\vec{a}=(x; y)$ находится по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (17.7)$$

Длина вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A; y_B-y_A)$ находится по формуле

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}. \qquad (17.8)$$

С помощью этой формулы вычисляется также расстояние между двумя точками на плоскости.

Углы, образуемые вектором $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ с осями координат Ox и Oy, находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{x_B-x_A}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}};\quad \cos\beta=\frac{y_B-y_A}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}. \qquad (17.9)$$

38. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1; 1)$ и $B(4; -3)$.

○ По формуле (17.8) находим $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2}=5$. ●

39. Найти единичный вектор того же направления, что и вектор: 1) $\vec{a}=(3; 4)$; 2) $\vec{b}=(-6; -8)$.

○ 1) Находим длину данного вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Единичный вектор $\vec{e}$ того же направления, что и вектор $\vec{a}$, равен $\vec{e}=\vec{a}/|\vec{a}|=(1/5)\vec{a}$. Каждая проекция вектора $\vec{e}$ также в пять раз меньше соответствующей проекции вектора $\vec{a}$, поэтому $\vec{e}=(3/5)\vec{i}+(4/5)\vec{j}$, или $\vec{e}=(3/5; 4/5)$.

2) Аналогично получим $\vec{e}=(-0{,}6; -0{,}8)$. ●

40. Найти косинусы углов, образуемых заданными векторами с осями координат: 1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(2; -3)$; $B(1; 4)$; 2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(-1; 1)$, $C(2; 5)$.

○1) По формулам (17.9) находим

$$\cos\alpha=\frac{1-2}{\sqrt{(1-2)^2+(4+3)^2}}=-0{,}1\sqrt{2};$$

$$\cos\beta=\frac{4+3}{\sqrt{(1-2)^2+(4+3)^2}}=0{,}7\sqrt{2}.$$

2) В этом случае получаем $\cos\alpha=0{,}6$; $\cos\beta=0{,}8$. ●

41. Даны точки $A(4; 0)$, $B(7; 4)$ и $C(-4; 6)$. Найдите длины векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{CA}$.

42. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки: 1) $A(4; 0)$, $B(7; 4)$ и $C(-4; 6)$; 2) $A(6; 7)$, $B(3; 3)$ и $C(1; -5)$.

43. Найдите косинусы углов, образуемых заданными векторами с осями координат: 1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(-2; -3)$; $B(3; 9)$; 2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(4; -1)$; $C(0; 2)$.

44. Найдите точку, равноудаленную от точек: 1) $A(7; -1)$, $B(-2; 2)$ и $C(-1; -5)$; 2) $A(10; 7)$, $B(-4; -7)$ и $C(12; -7)$.

45. Найдите центр окружности, проходящей через точки $A(-1; 9)$, $B(-8; 2)$, $C(9; 9)$, и длину ее радиуса.

46. Расстояние от точки M, лежащей на оси Ox, до точки $N(10; 5)$ равно 13. Найдите точку M.

47. Расстояние от точки B, лежащей на оси Oy, до точки $A(3; -1)$ равно 5. Найдите точку B.

48. Вычислите координаты точки на оси Oy, равноудаленной от точек: 1) $A(-4; 0)$ и $B(-3; -7)$; 2) $A(-3; -1)$ и $B(6; 2)$.

49. Найдите точку на оси Ox, равноудаленную от точек: 1) $A(5; 13)$ и $B(-12; -4)$; 2) $A(0; 6)$ и $B(2; -4)$.

50. Вычислите координаты точки M, равноудаленной от осей координат и от точки: 1) $A(-8; -1)$; 2) $A(4; 2)$.

51. Найдите точку M, расстояние которой от оси ординат и от точки $A(8; 6)$ равно 5.

52. Вычислите координаты точки M, расстояние которой от оси абсцисс и от точки $A(1; 2)$ равно 10.

§ 5. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Если отрезок AB разделен точкой C в отношении $AC:CB=\lambda$, то координаты точки C находятся по формулам

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{17.10}$$

Если $\lambda=1$, то получаются формулы для нахождения координат середины отрезка:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}. \tag{17.11}$$

53. Отрезок, концы которого $A(-11;\ 1)$ и $B(9;\ 11)$, разделен в отношении 2:3:5 (от A к B). Найти точки деления.

○ Обозначим точки деления от A к B через C и D. По условию, $x_A=-11$, $x_B=9$, $y_A=1$, $y_B=1$ и $AC:CD:DB=2:3:5$. Точка C делит AB в отношении $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{2}{3+5}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; значит,

$$x_C=\frac{-11+(1/4)\cdot 9}{1+1/4}=-7;\quad y_C=\frac{1+(1/4)\cdot 11}{1+1/4}=3;\quad C(-7;\ 3).$$

Точка D служит серединой AB, поэтому

$$x_D=\frac{-11+9}{2}=-1;\quad y_D=\frac{1+11}{2}=6;\quad D(-1;\ 6). \bullet$$

54. Даны вершины треугольника $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ и $C(x_C;\ y_C)$. Найти точку пересечения медиан этого треугольника.

○ Известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины треугольника.

Найдем точку D — середину стороны BC: $x_D=(x_B+x_C)/2$, $y_D=(y_B+y_C)/2$.

Находим точку M, в которой пересекаются медианы; для этого разделим медиану AD в отношении $\lambda=2:1=2$ (от A к D):

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{x_A+2\cdot(x_B+x_C)/2}{1+2}=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};$$

$$y_M=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{y_A+2\cdot(y_B+y_C)/2}{1+2}=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

Таким образом, координаты точки пересечения медиан треугольника равны среднему арифметическому одноименных координат его вершин. ●

55. Отрезок AB задан точками $A(-9;\ -3)$ и $B(1;\ 2)$. До какой точки C нужно продолжить отрезок AB, чтобы $AB:BC=5:3$?

○ По условию, $x_A=-9$, $x_B=1$, $y_A=-3$, $y_B=2$, $\lambda=AB:BC=5:3$. Требуется найти $C(x_C;\ y_C)$.

Для точки $B(1;\ 2)$, делящей отрезок AC в данном отношении, получим:

$$1=\frac{-9+(5/3)x_C}{1+5/3},\quad 2=\frac{-3+(5/3)y_C}{1+5/3},$$

откуда $x_C=7$, $y_C=5$, т. е. $C(7;\ 5)$. ●

56. Вычислите координаты точки C — середины отрезка AB, если: 1) $A(5;\ -4)$ и $B(-1;\ 2)$; 2) $A(6;\ -3)$ и $B(-2;\ -7)$.

57. Точка C делит отрезок AB в отношении 3:5 (от A к B). Концами отрезка служат точки $A(2;\ 3)$ и $B(10;\ 11)$. Найдите точку C.

58. Отрезок, концами которого служат точки $A(3;\ -2)$ и $B(10;\ -9)$, делится точкой C в отношении 2:5. Найдите точку C.

59. Отрезок, концами которого служат точки $A(-5;\ -2)$ и $B(4;\ 2{,}5)$, разделен в отношении 3:4:2 от A к B. Найдите точки деления.

60. Концом отрезка служит точка $A(-3;\ -5)$, а его серединой — точка $C(3;\ -2)$. Найдите второй конец отрезка — точку B.

61. Найдите точку пересечения медиан треугольника, если вершинами его служат точки: 1) $A(7;\ -4)$, $B(-1;\ 8)$ и $C(-12;\ -1)$; 2) $A(-4;\ 2)$, $B(2;\ 6)$ и $C(0;\ -2)$.

62. Концами отрезка служат точки $A(-8;\ -5)$ и $B(10;\ 4)$. Найдите точки C и D, делящие этот отрезок на три равные части.

63. Точка $C(3;\ 5)$ делит отрезок AB в отношении $AC:CB=3:4$. Найдите начало отрезка — точку A, если его концом служит точка $B(-1;\ 1)$.

64. Точка $C(-2;\ 1)$ делит отрезок AB в отношении $AC:CB=2:1$. Найдите конец отрезка — точку B, если его началом служит точка $A(-10;\ 5)$.

65. Отрезок задан точками $A(-4;\ 7)$ и $B(-3;\ 5)$. Найдите на продолжении отрезка AB такую точку C, чтобы $AB:BC=1:7$.

66. Отрезок задан точками $A(-5;\ -2)$ и $B(-1;\ 0)$. До какой точки C нужно его продолжить, чтобы $AB:BC=2:5$?

§ 6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, по определению,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \tag{17.12}$$

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого вектора по направлению первого:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\mathrm{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\mathrm{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{17.13}$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2. \tag{17.14}$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения:

$$(\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0)\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}. \qquad (17.15)$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ состоит в выполнении соотношения

$$\vec{a}\,\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}| \qquad (17.16)$$

(при этом знак плюс соответствует случаю $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а знак минус — случаю $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ выражается через их координаты по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (17.17)$$

Угол между двумя векторами $\vec{a}=(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (17.18)$$

Из этой формулы следует, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \qquad (17.19)$$

67. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=60°$. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, вычислить $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})$.

○ Используя формулы (17.12) и (17.14), получим

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4\vec{a}^2-6\,|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos 60°+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°-3\vec{b}^2=$$
$$=4\cdot 6^2-6\cdot 6\cdot 3\cdot 0{,}5+2\cdot 6\cdot 3\cdot 0{,}5-3\cdot 3^2=81.\ \bullet$$

68. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(-3; 2)$ и $\vec{b}=(4; 3)$.

○ По формуле (17,17) получим $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot 4+2\cdot 3=-6$. ●

69. Вычислить угол между векторами $\vec{a}=(-4; 3)$ и $\vec{b}=(3; -4)$.

○ По формуле (17.18) находим

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=\frac{-4\cdot 3+3\cdot(-4)}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-0{,}96;\ (\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=163°{,}7.\ \bullet$$

70. Проверить, перпендикулярны ли векторы: 1) $\vec{a}=(-3; 2)$ и $\vec{b}=(4; 6)$; 2) $\vec{c}=(3/4; -1/5)$ и $\vec{d}=(4/3; 5)$; 3) $\vec{p}=(-2; 5)$ и $\vec{q}=(3; 1)$.

○ По формуле (17.19) находим:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot 4+2\cdot 6=0$, т. е $\vec{a}\perp\vec{b}$;
2) $\vec{c}\cdot\vec{d}=(3/4)\cdot(4/3)+(-1/5)\cdot 5=0$, т. е. $\vec{c}\perp\vec{d}$;
3) $\vec{p}\cdot\vec{q}=(-2)\cdot 3+5\cdot 1=-1\neq 0$, т. е. $\vec{p}\not\perp\vec{q}$. ●

71. Найти работу силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$, если $|\vec{F}|=3$, $|\vec{s}|=8$ и $(\vec{F}\,\widehat{,}\,\vec{s})=60°$.

○ Работа A вычисляется по формуле $A=\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos(\vec{F}\,\widehat{,}\,\vec{s})$, где $\vec{F}$ — вектор действующей силы, s — вектор пути. Имеем $A=3\cdot 8\cdot\cos 60°=12$ (ед. работы). ●

72. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120°. Зная, что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, вычислите $(2\vec{a}-3\vec{b})^2$.

73. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 150°. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\cdot 4\vec{a}$.

74. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\vec{a}=(2; 4)$ и $\vec{b}=(4; 1)$; 2) $\vec{c}=(1/2; 2/5)$ и $\vec{d}=(2/3; 5/6)$.

75. Даны точки $A(-2; 4)$, $B(3; -6)$, $C(4; -2)$ и $D(1; 5)$. Вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

76. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\vec{a}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(1; 3)$, $B(-2; -4)$ и $C(4; -3)$.

77. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(3; 1)$, $B(7; 4)$, $C(3; 2)$ и $D(6; 6)$.

78. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=(2; 3)$ и $\vec{b}(1; 1)$.

79. Проверьте, перпендикулярны ли векторы: 1) $\vec{a}=(-3; 5)$ и $\vec{b}=(5; 3)$; 2) $\vec{c}=(2; -4)$ и $\vec{d}=(-4; -2)$; 3) $\vec{p}=(-3; -4)$ и $\vec{q}=(5; 1)$.

80. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a}-\vec{b}$?

81. Вычислите работу, производимую силой $\vec{F}=(2; -1)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1; -2)$ в положение $N(5; -5)$.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

1. Параллельный перенос осей координат. Пусть имеются две системы прямоугольных координат с разными началами, оси которых параллельны и одинаково направлены. Тогда между координатами одной и той же точки в этих системах имеет место зависимость

$$x=x_1+x_0,\ y=y_1+y_0, \qquad (17.20)$$

где x и y — координаты точки в исходной системе; x_1 и y_1 — ее координаты в новой системе; x_0 и y_0 — координаты нового начала O_1 относительно исходной системы (рис. 115).

2. Преобразование координат при повороте осей без изменения начала координат. Пусть x и y — исходные координаты, α — угол поворота, x_1 и y_1 — координаты той же точки в новой, повернутой системе координат (рис. 116). Тогда

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha \qquad (17.21)$$

и

$$x_1=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ y_1=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \qquad (17.22)$$

82. Координаты точки в новой системе $x_1=3$ и $y_1=-1$, а координаты нового начала при сохранении направления осей $x_0=2$ и $y_0=-3$. Найти координаты точки в исходной системе.

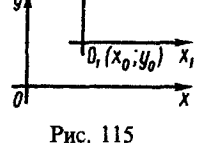


Рис. 115

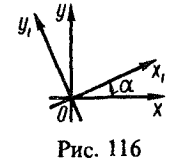


Рис. 116

○ По формулам (17.20) получим

$$x=x_1+x_0=3+2=5,\ y=y_1+y_0=-1+(-3)=-4.$$ ●

83. Координаты точки в исходной системе $x=-4$ и $y=2$, а координаты нового начала при сохранении направления осей $x_0=3$ и $y_0=-1$. Найти координаты точки в новой системе координат.

○ По формулам (17.20) находим

$$x_1=x-x_0=-4-3=-7,\ y_1=y-y_0=2-(-1)=3.$$ ●

84. Относительно двух систем координат xOy и $x_1O_1y_1$, имеющих одно и то же направление осей, известны координаты некоторой точки: $(-2; 3)$ и $(-7; 6)$. Найти координаты начала каждой из этих систем относительно другой.

○ Полагая $x=-2$, $y=3$ и $x_1=-7$, $y_1=6$, по формулам (17.20) получим $-2=-7+x_O$, $3=6+y_O$, т. е. $x_O=5$, $y_O=-3$. Координаты нового начала в системе xOy таковы: $O(5; -3)$.

Поменяв местами x и x_1, y и y_1 в формулах (17.20), получим $-7=-2+x_{O_1}$, $6=3+y_{O_1}$, т. е. $x_{O_1}=-5$, $y_{O_1}=3$. Координаты нового начала в системе $x_1O_1y_1$ таковы: $O_1(-5; 3)$. ●

85. Дана точка $M(-2\sqrt{3}; 4)$. Найти координаты этой точки в новой системе координат при повороте осей на угол 60° без изменения начала координат.

○ По формулам (17.22) получим

$$x_1=-2\sqrt{3}\cos 60°+4\sin 60°,\ y_1=2\sqrt{3}\sin 60°+4\cos 60°,$$

т. е. $x_1=\sqrt{3}$, $y_1=5$. ●

86. В системе, повернутой относительно исходной на угол 45°, дана точка $(-2; 4)$. Найти координаты этой точки относительно исходной системы.

○ По формулам (17.21) получим

$$x=-2\cos 45°-4\sin 45°,\ y=-2\sin 45°+4\cos 45°,$$

т. е. $x=-3\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$. ●

87. Координаты точки в новой системе $x_1=-2$ и $y_1=4$. Найдите координаты этой точки в исходной системе, если при сохранении направления осей начало координат перенесено в точку: 1) $(-3; 5)$; 2) $(4; -2)$; 3) $(-1; -3)$; 4) $(2; 1)$.

88. Координаты точки в исходной системе $x=-2$ и $y=-3$. Найдите координаты этой точки в новой системе, если при сохранении направления осей начало координат перенесено в точку: 1) $(3; 2)$; 2) $(-3; 2)$; 3) $(3; -2)$; 4) $(-3; -2)$.

89. Относительно двух систем координат xOy и $x_1O_1y_1$, имеющих одно и то же направление осей, известны координаты некоторой точки: $(-4; 7)$ и $(-8; 3)$. Найдите координаты начала каждой из этих систем относительно другой.

90. Две системы координат имеют одинаковое направление осей. Первая система координат относительно второй имеет начало в точке $(-3; 5)$. Найдите координаты начала второй системы относительно первой.

91. Дана точка $M(x; y)$. Как изменятся координаты этой точки, если за ось абсцисс принять ось ординат и за ось ординат — ось абсцисс?

92. Дана точка $A(4; -2)$. Найдите координаты этой точки в новой системе координат при повороте осей на угол: 1) 45°; 2) 30°.

93. Найдите координаты точки относительно исходной системы, если эта точка имеет координаты $(2\sqrt{3}; 2)$ в системе, повернутой относительно исходной на угол: 1) 30°; 2) 60°.

§ 8. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Элементами полярной системы координат являются: 1) точка O — полюс; 2) луч, выходящий из точки O, — полярная ось Op; 3) единица измерения длины l.

Положение точки M на плоскости (рис. 117) задается расстоянием этой точки от полюса — длиной радиуса-вектора, выраженной в принятых единицах измерения, и углом между радиусом-вектором и полярной осью. Числа φ и r иазываются *полярными координатами* точки M; r — *полярным радиусом*, а φ — *полярным углом*. Полярные координаты точки записываются так: $M(r; \varphi)$.

Если точка M совпадает с полюсом, то $r=0$, а значение φ не определено. Для любой другой точки плоскости $r>0$, а значение φ определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, то прямоугольные координаты точки выражаются через ее полярные координаты по формулам

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi. \qquad (17.23)$$

Для выражения полярных координат точки через ее прямоугольные координаты используются формулы

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\ \sin\varphi=y/\sqrt{x^2+y^2};\ \cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (17.24)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=y/x. \qquad (17.25)$$

94. Построить точку $M(2; \pi/4)$ в полярной системе координат.

○ Проведем через полюс O луч Om под углом $\pi/4$ к полярной оси Op. На луче Om отложим отрезок OM, равный двум единицам масштаба. Точка M является искомой (рис. 118). ●

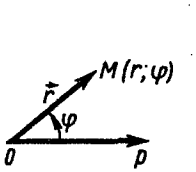


Рис. 117

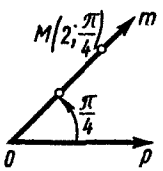


Рис. 118

95. Найти прямоугольные координаты точки $A(4;\ \pi/3)$.

○ По формулам (17.23) получим:

$$x=4\cos(\pi/3)=2,\quad y=4\sin(\pi/3)=2\sqrt{3}.$$ ●

96. Найти полярные координаты точки, прямоугольные координаты которой $(-3;\ 3\sqrt{3})$.

○ По формулам (17.24) получим:

$$r=\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=6,\quad \sin\varphi=3\sqrt{3}/6=\sqrt{3}/2,\quad \cos\varphi=-3/6=-1/2.$$

Учитывая знаки синуса и косинуса, находим полярный угол $\varphi=2\pi/3$. ●

97. Вычислить расстояние между двумя точками $A(r_1;\ \varphi_1)$ и $B(r_2;\ \varphi_2)$, заданными в полярных координатах.

○ По теореме косинусов имеем

$$AB=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$ ●

98. В полярной системе координат постройте точки: 1) $(3;\ \pi/3)$; 2) $(4;\ 3\pi/4)$; 3) $(2;\ -\pi/6)$; 4) $(5;\ -3\pi/4)$.

99. Найдите полярные координаты точек, симметричных точкам $(2;\ \pi/4)$, $(4;\ 2\pi/3)$ и $(1;\ -\pi/6)$: 1) относительно полюса; 2) относительно полярной оси.

100. Найдите прямоугольные координаты точек: 1) $(2;\ \pi/2)$; 2) $(2\sqrt{3};\ -\pi/3)$; 3) $(\sqrt{2};\ -\pi/4)$; 4) $(2;\ 3\pi/4)$.

101. Найдите полярные координаты точек: 1) $(0;\ 5)$; 2) $(0;\ -\sqrt{3})$; 3) $(-\sqrt{3};\ -1)$; 4) $(1;\ -1)$.

102. Могут ли быть прямоугольные и полярные координаты точки представлены одной и той же парой чисел?

103. Вычислите расстояние между двумя точками $A(6;\ \pi/3)$ и $B(5;\ 2\pi/3)$.

§ 9. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

В задачах 104—113 доказательства проведите с применением векторов.

104. Докажите, что три медианы любого треугольника могут служить сторонами треугольника.

105. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, равен половине третьей стороны.

106. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка плоскости O. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

107. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

108. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

109. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

110. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

111. Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны.

112. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

113. Докажите, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности,— прямой.

114. Найдите точки, симметричные точке $A(-2;\ -3)$ относительно: 1) начала координат; 2) оси Ox; 3) оси Oy; 4) биссектрисы I и III координатных углов.

115. Дан отрезок с концами $A(-3;\ 1)$ и $B(-1;\ 7)$. Найдите концы отрезка, симметричного данному относительно: 1) начала координат; 2) оси Ox; 3) оси Oy; 4) биссектрисы II и IV координатных углов.

116. Дан треугольник с вершинами $A(3;\ 2)$, $B(7;\ 4)$ и $C(1;\ 6)$. Найдите вершины треугольника, симметричного данному относительно: 1) начала координат; 2) оси Ox; 3) оси Oy; 4) биссектрисы I и III координатных углов.

117. На векторах $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ построен треугольник ABC, в котором проведены медианы AM_1, BM_2 и CM_3. Выразите векторы $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_1}$ и $\overrightarrow{CM_3}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите $|AM_1|$, если координаты вершин треугольника $A(2;\ 5)$, $B(4;\ -4)$ и $C(12;\ -2)$.

118. Отрезок AB задан точками $A(-7;\ -1)$, $B(9;\ 7)$ и делится точкой C в отношении 5:3 (от A к B). Найдите длину отрезка, соединяющего точку C с точкой, симметричной ей относительно начала координат.

119. Отрезок AB разделен на семь равных частей. Четвертая точка деления (от A к B) есть $F(4;\ 1)$. Найдите точку A, если $B(13;\ 4)$.

120. На биссектрисе I и III координатных углов найдите точку, равноудаленную от точек $A(7;\ 2)$ и $B(2;\ -13)$.

121. Точки $A(3;\ 2)$, $B(-2;\ 1)$ и $C(1;\ -4)$ служат вершинами параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найдите четвертую вершину D.

122. Смежными вершинами параллелограмма служат точки $A(-3;\ 1)$ и $B(1;\ 3)$. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке $M(1;\ -2)$. Найдите две другие вершины.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2;\ -3)$, $B(1;\ 4)$.

2) Точка $C(2;\ 3)$ делит AB в отношении 1:4 (от A к B). Найдите точку A, если $B(-6;\ -1)$.

3) Найдите точку M, равноудаленную от осей координат и от данной точки $A(4;\ -2)$.

4) Вычислите угол между векто-

II вариант

1) Даны точки $A(-3;\ -4)$ и $B(2;\ 5)$. Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей.

2) Отрезок AB задан точками $A(7;\ -4)$ и $B(-8;\ 1)$ и делится точкой C в отношении 1:4 (от A к B). Найдите точку C.

3) Отрезок задан точками

рами $\vec{a}=(-3;\ 4)$ и $\vec{b}=(4;\ 3)$.

5) Докажите, что если O — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

$A(-10;\ 4)$ и $B(5;\ -1)$. До какой точки C нужно его продолжить, чтобы $AB:BC=5:1$?

4) Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}=(3;\ 4)$ и $\vec{b}=(5;\ 12)$.

5) В треугольнике ABC проведена медиана $\overrightarrow{AM}$. Докажите, что $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Глава 18

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И ЕЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. ВЕКТОРНОЕ И КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

§ 1. Общее уравнение прямой. Уравнение первой степени относительно переменных x и y, т. е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (18.1)$$

при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением* прямой.

Отметим частные случаи общего уравнения прямой.

Значение коэффициента	Вид уравнения	Положение прямой
$C=0$	$Ax+By=0$ $(y=kx)$	Проходит через начало координат
$A=0$	$By+C=0$ $(y=b)$	Параллельна оси Ox
$B=0$	$Ax+C=0$ $(x=a)$	» » Oy
$A=C=0$	$y=0$	Совпадает с осью Ox
$B=C=0$	$x=0$	» » » Oy

2. Векторное уравнение прямой. Пусть l — прямая на плоскости xOy (рис. 119), $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка на этой прямой, а $\vec{n}=(A;\ B)$ — ненулевой вектор, перпендикулярный прямой l (он называется *нормальным вектором* прямой). Если $M(x;\ y)$ — произвольная точка на прямой l, отличная от M_0, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=(x-x_0;\ y-y_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}=(A;\ B)$, т. е. скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_0)=0. \qquad (18.2)$$

Уравнение (18.2) называется *векторным уравнением* прямой. Если его переписать в координатной форме, то получится уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (18.3)$$

3. Каноническое уравнение прямой. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — заданная точка прямой, а $\vec{q}=(m;\ n)$ — вектор, коллинеарный прямой (он называется *направляющим вектором* прямой). Если $M(x;\ y)$ — произвольная точка на прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0)$ и $\vec{q}=(m;\ n)$ коллинеарны, т. е. координаты этих векторов пропорциональны:

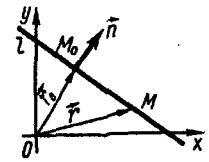


Рис. 119

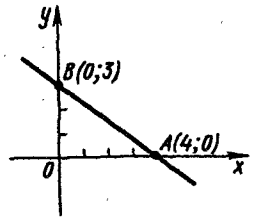


Рис. 120

$$(x-x_0)/m=(y-y_0)/n. \qquad (18.4)$$

Уравнение (18.4) называется *каноническим уравнением* прямой.

1. Проверить, принадлежат ли точки $A(3;\ 14)$, $B(4;\ 13)$, $C(-3;\ 0)$, $D(0;\ 7)$ прямой $7x-3y+21=0$.

○ Если координаты точки удовлетворяют уравнению, т. е. обращают его в тождество, то эта точка принадлежит данной прямой; если же координаты точки не удовлетворяют уравнению, то точка не принадлежит прямой.

Подставив вместо переменных x и y в уравнение $7x-3y+21=0$ координаты точки A, получим тождество $7\cdot 3-3\cdot 14+21=0$; следовательно, точка $A(3;\ 14)$ принадлежит данной прямой.

Аналогично убеждаемся в том, что точки C и D принадлежат прямой, а точка B — не принадлежит. ●

2. Построить прямую $3x+4y-12=0$.

○ Для построения прямой найдем координаты точек пересечения с осями Ox и Oy. Полагая $y=0$, получим $3x-12=0$, $x=4$, $A(4;\ 0)$. При $x=0$ получим $4y-12=0$, $y=3$, $B(0;\ 3)$. Через точки A и B проводим искомую прямую (рис. 120). ●

3. Построить прямые: 1) $x=3$; $x=-2$; $x=0$; 2) $y=4$; $y=-1$; $y=0$.

○ 1) На оси Ox возьмем точки $x=3$, $x=-2$. Через эти точки проводим прямые, параллельные оси Oy (рис. 121). Прямая $x=0$ является осью Oy.

2) *На оси Oy возьмем точки* $y=4$, $y=-1$. Через эти точки проводим прямые, параллельные оси Ox (рис. 122). Прямая $y=0$ является осью Ox. ●

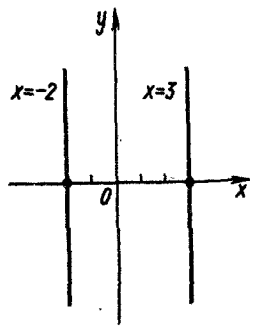


Рис. 121

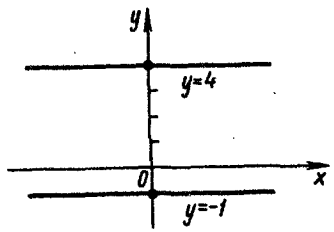


Рис. 122

4. Прямая, параллельная оси Ox, проходит через точку $(-2; 2)$. Составить уравнение этой прямой.

○ Уравнение прямой, параллельной Ox, имеет вид $y=b$. Ордината точки, через которую проходит искомая прямая, равна 3; следовательно, уравнение прямой $y=3$, или $y-3=0$. ●

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; -5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(4; 2)$.

○ Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-3; y+5)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}=(4; 2)$. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Записав произведение этих векторов в координатной форме, получим

$$(4; 2)(x-3; y+5)=0 \Leftrightarrow 4(x-3)+2(y+5)=0 \Leftrightarrow 4x+2y-2=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид $2x+y-1=0$. ●

6. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(2; 3)$.

○ Вектор $\overrightarrow{OM}=(2; 3)$ коллинеарен искомой прямой. Для составления уравнения прямой используем каноническое уравнение прямой (18.4). Подставив значения $m=2$, $n=3$, $x_0=0$, $y_0=0$ в уравнение (18.4), получим

$$(x/2=y/3) \Leftrightarrow (3x-2y=0). \bullet$$

7. Вычислить длину отрезка прямой $3x+4y-24=0$, заключенного между осями координат.

○ Найдем координаты точек пересечения прямой с осями координат: $y=0$, $x=8$, $A(8; 0)$; $x=0$, $y=6$, $B(0; 6)$. Следовательно, длина отрезка AB равна $AB=\sqrt{64+36}=10$. ●

8. На прямой $2x+y-6=0$ найти точку M, равноудаленную от точек $A(3; 5)$ и $B(2; 6)$.

○ Обозначив координаты точки M через $(x_M; y_M)$, получим:

$$MA=\sqrt{(x_M-3)^2+(y_M-5)^2}, \quad MB=\sqrt{(x_M-2)^2+(y_M-6)^2}.$$

Так как $MA=MB$, то

$$\sqrt{(x_M-3)^2+(y_M-5)^2}=\sqrt{(x_M-2)^2+(y_M-6)^2}.$$

После возведения в квадрат и упрощений получим

$$x_M-y_M+3=0.$$

Точка $M(x_M; y_M)$ принадлежит прямой $2x+y-6=0$, следовательно, ее координаты удовлетворяют этому уравнению.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_M-y_M+3=0, \\ 2x_M+y_M-6=0, \end{cases}$$

находим $x_M=1$, $y_M=4$; $M(1; 4)$. ●

9. Постройте прямые: 1) $2x-5y+10=0$; 2) $4x+6y-3=0$.

10. Постройте прямые: 1) $x=4$; 2) $x=-3$; 3) $y=2$; 4) $y=-4$.

11. Постройте фигуру, ограниченную линиями $x=-2$, $x=0$, $y=-3$ и $y=0$. Вычислите площадь этой фигуры.

12. 1) Прямая, параллельная оси Ox, проходит через точку $(3; -4)$. Составьте уравнение этой прямой.

2) Прямая, параллельная оси Oy, проходит через точку $(-6; 0)$. Составьте уравнение этой прямой.

13. 1) Длины сторон прямоугольника равны 3 и 4. Составьте уравнения всех его сторон, если он расположен в III координатном угле так, что две из его сторон лежат на осях координат, причем меньшая из них лежит на оси Oy.

2) Составьте уравнения сторон квадрата, если он расположен в I координатном угле и две из его вершин имеют координаты $A(2; 0)$ и $B(5; 0)$.

14. Составьте уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}$: 1) $M_0(-2; -3)$, $\vec{n}=(4; -5)$; 2) $M_0(1; -1)$, $\vec{n}=(-3; 4)$.

15. Составьте уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору $\overrightarrow{AB}$: 1) $M_0(-2; -3)$, $A(-5; 2)$, $B(-1; 4)$; 2) $M_0(2; 2)$, $A(1; -3)$, $B(6; -5)$; 3) $M_0(-2; -3)$, $A(2; 1)$, $B(1; 5)$.

16. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и данную точку: 1) $(-4; -1)$; 2) $(5; -4)$.

17. Вычислите длину отрезка прямой $4x+3y-36=0$, заключенного между осями координат.

18. 1) На прямой $x-2y-4=0$ найдите точку, равноудаленную от точек $A(5; -1)$ и $B(2; -4)$.

2) На прямой $3x+4y+20=0$ найдите точку, равноудаленную от точек $A(-8; -3)$ и $B(-5; -6)$.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ НА ОСЯХ

Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{18.5}$$

где a и b — соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy.

19. Построить прямую $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

○ Перепишем данное уравнение так:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1,$$

т. е. $a=2$ и $b=-3$. Таким образом, получаем точки $A(2; 0)$ и $B(0; -3)$. Прямая, проведенная через точки A и B, является искомой (рис. 123). ●

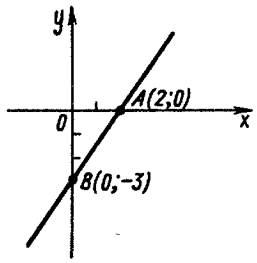


Рис. 123

20. Общее уравнение прямой $3x-4y+2=0$ преобразовать к уравнению в отрезках на осях.

○ Произведем следующие преобразования:

$$3x-4y=-2;\quad \frac{3x}{-2}-\frac{4y}{-2}=1;\quad \frac{x}{-2/3}+\frac{y}{1/2}=1.$$ ●

21. Составить уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке (3; 0), а ось ординат — в точке (0; 5).

○ Согласно условию, $a=3$ и $b=5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x/3+y/5=1$. ●

22. Постройте прямые: 1) $x/2+y/6=1$; 2) $x/5-y/4=1$; 3) $-x/3++y/2=1$; 4) $-x/6-y/3=1$.

23. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях: 1) $x+y-3=0$; 2) $2x+3y+1=0$; 3) $2x+3y-6=0$; 4) $3x-4y+12=0$.

24. Составьте уравнение прямой в отрезках на осях, если она пересекает оси координат в точках: 1) $A(-2; 0)$ и $B(0; 3)$; 2) $A(3; 0)$ и $B(0; -4)$.

25. Найдите длины отрезков, заключенных между точками пересечения с осями координат, для следующих прямых: 1) $x/6+y/8=1$; 2) $x/12-y/16=1$; 3) $x/9-y/12=1$.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y=kx+b, \qquad (18.6)$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, а b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Если $\alpha=0$, то $k=0$, т. е. прямая параллельна оси Ox.

При $\alpha=90°$ углового коэффициента k не существует, т. е. прямая, перпендикулярная оси Ox, не имеет углового коэффициента.

Если на прямой, проходящей через начало координат, взята точка $A(x_A; y_A)$, то

$$k=\operatorname{tg}\alpha=y_A/x_A. \qquad (18.7)$$

26. Построить прямые: $y=3x$; $y=x$; $y=(1/2)x$; $y=-3x$.

○ Положение прямой на плоскости определяется двумя точками, но для прямой, проходящей через начало координат, одна точка (начало координат) уже известна, поэтому достаточно из уравнения прямой найти еще одну точку и, соединив ее с началом координат, получить искомую прямую.

Построим прямую $y=3x$. Полагая $x=1$, находим $y=3\cdot 1=3$. Соединив точку $A(1; 3)$ с началом координат, получим искомую прямую.

Аналогично построим остальные прямые: $y=x$, $B(1; 1)$; $y=(1/2)x$, $C(1; 1/2)$; $y=-3x$, $D(1; -3)$ (рис. 124). ●

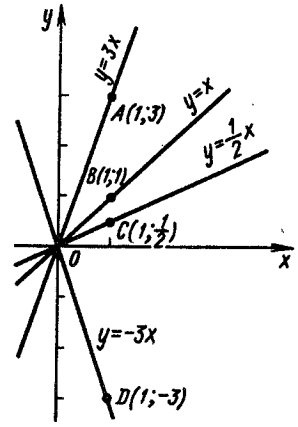


Рис. 124

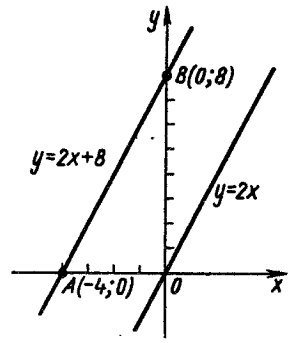


Рис. 125

27. Построить прямую $y=2x+8$.

○ I способ. Построим прямую $y=2x$. Прямая $y=2x+8$ проходит параллельно прямой $y=2x$ на 8 ед. выше начала координат (рис. 125).

II способ. Найдем точки пересечения прямой с осями координат. Полагая $y=0$, получим $x=-4$, т. е. $A(-4; 0)$. Полагая теперь $x=0$, находим $y=8$, т. е. $B(0; 8)$. Через точки A и B проводим искомую прямую (рис. 125). ●

28. Вычислить углы наклона к оси Ox для прямых: 1) $y=x$; 2) $y=-x$; 3) $y=3x$; 4) $y=-2x$; 5) $y=mx$.

○ 1) $y=x$, $k=\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=45°$;
2) $y=-x$, $k=\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=135°$;
3) $y=3x$, $k=\operatorname{tg}\alpha=3$, $\alpha=71°{,}6$;
4) $y=-2x$, $k=\operatorname{tg}\alpha=-2$; $\alpha=180°-63°{,}4=116°{,}6$;
5) $y=mx$, $k=\operatorname{tg}\alpha=m$, $\alpha=\operatorname{arctg} m$, если $m\geqslant 0$; $\alpha=\pi-\operatorname{arctg} m$, если $m<0$. ●

29. Вычислить угол наклона прямой $3x+2y+6=0$ к оси Ox.

○ Разрешив уравнение $3x+2y+6=0$ относительно y, получим $y=(-3/2)x-3$, откуда $k=\operatorname{tg}\alpha=-3/2$; $\alpha=180°-56°{,}3=123°{,}7$. ●

30. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, если ее угловой коэффициент: 1) $k=5$; 2) $k=-3$.

○ Для составления уравнения искомой прямой достаточно подставить числовое значение k в уравнение $y=kx$. Имеем: 1) $y=5x$, или $5x-y=0$; 2) $y=-3x$, или $3x+y=0$. ●

31. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол: 1) 0; 2) $\pi/4$; 3) 120°; 4) $\operatorname{arctg}(-3)$.

○ 1) $k=\operatorname{tg} 0=0$; $y=0$ — уравнение оси Ox;
2) $k=\operatorname{tg}(\pi/4)=1$; $y=x$, или $x-y=0$;
3) $k=\operatorname{tg} 120°=\operatorname{tg}(180°-60°)=-\operatorname{tg} 60°=-\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{3}x$, или $\sqrt{3}x++y=0$;
4) $k=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-3))=-3$; $y=-3x$, или $3x+y=0$. ●

32. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $A(-2; 3)$.

○ Чтобы составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, необходимо знать k. Величину k находим из соотношения (18.7): $k=y_A/x_A=-3/2$; подставив значение k в уравнение $y=kx$, получим $y=(-3/2)x$, или $3x+2y=0$.

Значение k можно также вычислить, подставив координаты точки $A(-2; 3)$ в уравнение $y=kx$ вместо переменных x и y: $3=k(-2)$, откуда $k=-3/2$. ●

33. Найти координаты точки A, если угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и через точку A, равен $3/4$ и точка A удалена от начала координат на 10 ед. длины.

○ Из соотношения (18.7) имеем $y_A/x_A=3/4$. С другой стороны, длина отрезка OA равна $\sqrt{x_A^2+y_A^2}=10$. Решая систему

$$\begin{cases} y_A/x_A=3/4, \\ \sqrt{x_A^2+y_A^2}=10, \end{cases}$$

получим $(x_A=8;\ y_A=6)$ или $(x_A=-8;\ y_A=-6)$, т. е. условию задачи удовлетворяют две точки $(8; 6)$ и $(-8; -6)$. ●

34. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(3; 4)$ и отсекающей на оси Oy отрезок $b=2$.

○ Для составления искомого уравнения прямой необходимо найти k. Подставив в уравнение (18.6) вместо переменных x и y координаты данной точки и значение b, получим $4=k\cdot 3+2$, откуда $k=2/3$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $y=(2/3)x+2$. ●

35. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 6)$ и образующей с осью Ox угол $\operatorname{arctg} 5$.

○ Для составления искомого уравнения прямой необходимо вычислить k и b. Найдем угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)=5$. Для вычисления b подставим в уравнение (18.6) координаты данной точки и найденное значение k; получим $6=5\cdot 2+b$, откуда $b=-4$. Искомое уравнение имеет вид $y=5x-4$. ●

36. Постройте прямые: 1) $y=5x$; 2) $y=-(1/3)x$; 3) $y=4x+3$; 4) $y=-x+2$.

37. Найдите углы наклона к оси Ox для прямых: 1) $y=(\sqrt{3}/3)x$; 2) $y=-3x$; 3) $y=7x-8$; 4) $y=-2{,}9x+3$; 5) $3x+5y+20=0$; 6) $29x-10y+10=0$.

38. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат, если ее угловой коэффициент: 1) $k=-1$; 2) $k=4$.

39. Составьте уравнение прямой, если ее угловой коэффициент $k=2/3$, а $b=-1/2$.

40. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол: 1) 60°; 2) $\pi/6$; 3) 135°; 4) $\operatorname{arctg} 3$; 5) $\operatorname{arctg}(-5)$.

41. Составьте уравнение прямой, для которой $b=3$, а угол наклона к оси Ox: 1) $\alpha=45°$; 2) $\alpha=120°$; 3) $\alpha=\operatorname{arctg} 5$.

42. Составьте уравнение прямой, для которой $b=-2$, а угол наклона к оси Ox: 1) $\alpha=30°$; 2) $\alpha=135°$; 3) $\alpha=\operatorname{arctg} 2$.

43. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку: 1) $A(3; -6)$, 2) $A(-1; -5)$.

44. 1) Точка P удалена от начала координат на 5 ед. длины. Угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и через точку P, равен $3/4$. Найдите точку P.

2) Диагональ прямоугольника, две стороны которого лежат на положительных направлениях осей координат, равна 20 ед. длины. Угловой коэффициент диагонали равен $4/3$. Найдите вершины прямоугольника.

45. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-5; -2)$ и отсекающей на оси Oy отрезок $b=-12$.

46. Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $(5; -7)$ и образующей с осью Ox угол $\operatorname{arctg}(-2)$; 2) проходящей через точку $(-1; -4)$ и образующей с осью Ox угол 135°.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_A; y_A)$ в заданном направлении, имеет вид

$$y-y_A=k(x-x_A), \tag{18.8}$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой.

Уравнение (18.8) можно рассматривать как уравнение *пучка прямых*, т. е. множества прямых, проходящих через одну и ту же точку плоскости — точку $A(x_A; y_A)$. Заметим, что только одна прямая из всех проходящих через точку A, а именно прямая, перпендикулярная оси Ox, не выражается уравнением вида (18.8). Ее уравнение имеет вид $x=x_A$.

47. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -1)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$.

○ По условию, $x_A=5$, $y_A=-1$, $k=3$. Подставляя эти значения в уравнение (18.8), получим

$$y+1=3(x-5), \text{ или } 3x-y-16=0. \text{ ●}$$

48. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-3; -2)$ и образующей с осью Ox угол $\operatorname{arctg} 2$.

○ По условию, $x_A=-3$, $y_A=-2$. Найдем $k=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)=2$. Подставив эти значения в уравнение (18.8), получим

$$y+2=2(x+3), \text{ или } 2x-y+4=0. \text{ ●}$$

49. 1) Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $(-1; -1)$ и имеющей угловой коэффициент $k=1$; 2) проходящей через точку $(2; 0)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-2$.

50. 1) Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $(4; -5)$ и образующей с осью Ox угол $\operatorname{arctg}(-3)$; 2) проходящей через точку $(2; 3)$ и образующей с осью Ox угол 45°; 3) проходящей через точку $(0; 5)$ и образующей с осью Ox угол 135°.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ДАННЫЕ ТОЧКИ

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, имеет вид

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A). \qquad (18.9)$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и B, находится из соотношения

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}. \qquad (18.10)$$

51. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -3)$ и $B(-1; 4)$.

○ По условию, $x_A=2$, $x_B=-1$, $y_A=-3$ и $y_B=4$. Подставив эти значения в уравнение (18.9), получим

$$y+3=\frac{4+3}{-1-2}(x-2), \text{ или } 7x+3y-5=0. \bullet$$

52. Найти угол наклона к оси Ox прямой, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(-3; 1)$.

○ По условию, $x_A=2$, $x_B=-3$, $y_A=3$ и $y_B=1$. По формуле (18.10) находим

$$k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-3}{-3-2}=\frac{2}{5}=0{,}4,$$

откуда $\alpha=\operatorname{arctg}0{,}4=21°{,}8$. ●

53. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямой, проходящей через точки $A(6; 2)$ и $B(-3; 8)$.

○ Подставив в уравнение (18.9) координаты точек $A(6; 2)$ и $B(-3; 8)$, получим

$$y-2=\frac{8-2}{-3-6}(x-6).$$

Приведем это уравнение к уравнению в отрезках на осях:

$$y-2=(-2/3)(x-6),\ y-2=(-2/3)x+4,\ (2/3)x+y=6;$$

$$\frac{(2/3)x}{6}+\frac{y}{6}=1,\ \frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1.$$

Следовательно, $a=9$ и $b=6$. ●

54. Прямая, проходящая через точку $(-5; 1)$, отсекает на оси Oy отрезок $b=6$. Составить уравнение этой прямой.

○ Искомая прямая пересекает ось Oy в точке $(0; 6)$. Подставив в уравнение (18.9) координаты точек $A(-5; 1)$ и $B(0; 6)$, получим искомое уравнение

$$y-1=\frac{6-1}{0+5}(x+5), \text{ или } x-y+6=0. \bullet$$

55. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: 1) $A(-1; -1)$ и $B(-2; -2)$; 2) $A(3; 0)$ и $B(0; 4)$.

56. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки: 1) $A(-3; -2)$, $B(1; 5)$ и $C(8; -4)$; 2) $(-1; -3)$, $(3; 5)$ и $(4; 0)$.

57. 1) Треугольник задан вершинами $A(-3; 4)$, $B(-4; -3)$ и $C(8; 1)$. Составьте уравнение медианы AD.

2) Треугольник задан вершинами $A(2; 5)$, $B(-6; -4)$ и $C(6; -3)$. Составьте уравнение медианы BD.

58. Найдите угол наклона к оси Ox прямой, проходящей через точки $A(-3; -3)$ и $B(2; 1)$.

59. 1) Прямая проходит через точки $A(-1; -6)$ и $B(7; 2)$. Найдите отрезки, отсекаемые этой прямой на осях Ox и Oy.

2) Точка, двигаясь прямолинейно, прошла через положения $A(12; -1)$ и $B(3; 2)$. В какой точке она пересечет ось Oy?

60. 1) Прямая, проходящая через точку $(-4; -1)$, пересекает ось Oy в точке $(0; 3)$. Составьте уравнение этой прямой.

2) Прямая, проходящая через точку $(-2; 4)$, отсекает на оси Ox отрезок $a=2$. Составьте уравнение этой прямой.

§ 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Если даны две пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то для вычисления координат точки пересечения данных прямых необходимо решить систему уравнений этих прямых.

61. Найти точку пересечения прямых $3x-4y+11=0$ и $4x-y-7=0$.

○ Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-4y+11=0, \\ 4x-y-7=0, \end{cases}$$

получим $x=3$ и $y=5$. Следовательно, $(3; 5)$ — точка пересечения этих прямых. ●

62. Даны уравнения сторон треугольника: $x+3y-3=0$, $3x-11y-29=0$ и $3x-y+11=0$. Найти вершины этого треугольника.

○ Для вычисления координат вершин треугольника необходимо решить три системы уравнений:

$$\begin{cases} x+3y-3=0, \\ 3x-11y-29=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-11y-29=0, \\ 3x-y+11=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y+11=0, \\ x+3y-3=0. \end{cases}$$

Решение первой системы $x=6$, $y=-1$, второй $x=-5$, $y=-4$ и третьей $x=-3$, $y=2$. Следовательно, вершинами треугольника служат точки $(6; -1)$, $(-5; -4)$ и $(-3; 2)$. ●

63. Составить уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(4; -3)$ и проходящей через точку пересечения прямых $x+11y-27=0$ и $6x-7y-16=0$.

○ Находим точку M_1 пересечения данных прямых:

$$\begin{cases} x+11y-27=0, \\ 6x-7y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x=5,\ y=2); \quad M_1\,(5;\ 2).$$

Составив скалярное пронзведение векторов $\vec{n}=(4;\ -3)$ и $\overrightarrow{M_1M}=(x-5;\ y-2)$ в координатной форме и производя упрощения, получаем искомое уравнение:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M}=(4;\ -3)(x-5;\ y-2)=0\Leftrightarrow 4(x-5)-3(y-2)=0\Leftrightarrow 4x-3y-14=0.$$ ●

64. Найдите точки пересечения прямых: 1) $y=3x$ и $x+y+4=0$; 2) $x-2y-8=0$ и $x+y-2=0$.

65. Найдите вершины треугольника, если его стороны заданы уравнениями: 1) $4x+3y+20=0$, $6x-7y-16=0$ и $x-5y+5=0$; 2) $7x+3y-25=0$, $2x-7y-15=0$ и $9x-4y+15=0$.

66. Составьте уравнение прямой, перпендикулярной данному вектору и проходящей через точку пересечения данных прямых: 1) $n=(-3;\ 2)$, $2x+3y-17=0$, $x+y-6=0$; 2) $\vec{n}=(-4;\ -5)$; $3x+y-10=0$, $2x+y-6=0$.

§ 7. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Угол φ между двумя прямыми, заданными общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (18.11)$$

Угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}. \qquad (18.12)$$

Угол φ между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями $(x-x_1)/m_1=(y-y_1)/n_1$ и $(x-x_2)/m_2=(y-y_2)/n_2$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \qquad (18.13)$$

Формулы (18.11)—(18.13) определяют значение тригонометрической функции одного из двух углов (острого или тупого) между заданными прямыми. Для нахождения острого угла между прямыми выражения в правой части этих формул следует брать по модулю.

67. Найти острый угол между прямыми $y=5x$ и $y=2x$ (рис. 126).

○ Угловые коэффициенты данных прямых равны 5 и 2. Воспользуемся формулой (18.12), причем ее правую часть берем по модулю:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{2-5}{1+2\cdot5}\right|=\frac{3}{11}=0{,}273; \quad \varphi\approx15°{,}3.$$ ●

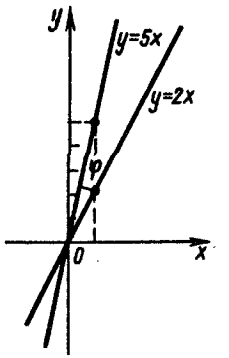


Рис. 126

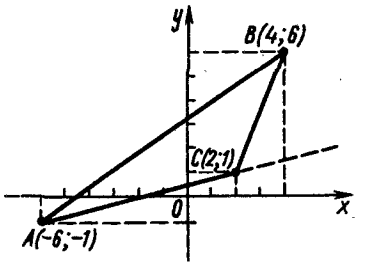


Рис. 127

68. Найти острый угол между прямыми $5x-12y-16=0$ и $3x+4y-12=0$.

○ По формуле (18.11) находим

$$\cos\varphi=\left|\frac{5\cdot3-12\cdot4}{\sqrt{5^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{33}{65}; \quad \varphi=\arccos\frac{33}{65}\approx59°{,}5.$$ ●

69. Найти острый угол между прямыми $(x-5)/(-24)=(y-2)/7$ и $(x+4)/8=(y-3)/15$.

○ По формуле (18.13) находим

$$\cos\varphi=\left|\frac{-24\cdot8+7\cdot15}{\sqrt{(-24)^2+7^2}\sqrt{8^2+15^2}}\right|=\frac{87}{425}; \quad \varphi=\arccos\frac{87}{425}\approx78°{,}2.$$ ●

70. Дан треугольник с вершинами $A\,(-6;\ -1)$, $B\,(4;\ 6)$ и $C\,(2;\ 1)$. Найти внутренние углы этого треугольника.

○ Находим угловые коэффициенты сторон этого треугольника:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-(-1)}{4-(-6)}=\frac{7}{10}; \quad k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-6}{2-4}=\frac{5}{2};$$

$$k_{CA}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-1-1}{-6-2}=\frac{1}{4}.$$

Найдем углы треугольника:

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{k_{AB}-k_{CA}}{1+k_{AB}k_{CA}}=\frac{7/10-1/4}{1+(7/10)\cdot(1/4)}=0{,}383; \quad \hat{A}=21°;$$

$$\operatorname{tg}\hat{B}=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{BC}k_{AB}}=\frac{5/2-7/10}{1+(5/2)\cdot(7/10)}=0{,}655; \quad \hat{B}=33°{,}2;$$

$$\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{k_{BC}-k_{CA}}{1+k_{BC}k_{CA}}=\frac{5/2-1/4}{1+(5/2)\cdot(1/4)}=1{,}39; \quad \hat{C}=54°{,}2.$$

Складывая найденные значения углов, получим $21°+33°{,}2+54°{,}2=108°{,}4$. Сумма углов треугольника оказалась меньше 180° потому, что при вычислении был найден ие внутренний угол треугольника, а внешний, смежный с ним. Построением убедимся в том, что угол C является тупым

(рис. 127); он равен $180°-54°,2=125°,8$. Тогда сумма углов треугольнника составит $21°+33°,2+125°,8=180°$.

Не обращаясь к построению треугольника, легко показать, что один из углов данного треугольника тупой. Вычислим длнны сторон треугольника:

$$AB=\sqrt{(-6-4)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{149};\ BC=\sqrt{(4-2)^2+(6-1)^2}=\sqrt{29};$$

$$AC=\sqrt{(-6-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{68}.$$

Известно, что еслн в треугольннке квадрат большей стороны больше суммы квадратов двух другнх сторон, то этот треугольник тупоугольный. Так как $AB^2>BC^2+AC^2$, то сторона AB лежит протнв тупого угла. ●

71. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(2;\,3)$ и образующей с прямой $2x-y-1=0$ угол arctg (4/3).

○ Очевидно, что задача имеет два решения, так как угловой коэффициент данной прямой в формуле (18.12) может быть равным н k_1, и k_2.

1) $k_1=2$; $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=\frac{k_2-2}{1+2k_2}$, или $\frac{4}{3}=\frac{k_2-2}{1+2k_2}$. Решив это уравненне, получим $k_2=-2$. Искомое уравнение имеет вид

$$y-3=-2(x-2),\ \text{или}\ 2x+y-7=0.$$

2) $k_2=2$; $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=\frac{2-k_1}{1+2k_1}$, откуда $k_1=\frac{2}{11}$; таким образом, имеем

$$y-3=\frac{2}{11}(x-2),\ \text{или}\ 2x-11y+29=0.$$ ●

72. Треугольник задан вершинами $A\,(2;\,-1)$, $B\,(-7;\,3)$ и $C\,(-1;\,-5)$. Составить уравнение биссектрисы угла C.

○ Найдем точку M пересечения биссектрисы угла C со стороной AB. Известно, что бнссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон треугольника. Следовательно, $\lambda=BM:MA=CB:CA$. Так как $CB=\sqrt{(-1+7)^2+(-5-3)^2}=10$, $CA=\sqrt{(-1-2)^2+(-5+1)^2}=5$, то $\lambda=10/5=2$. Вычнслим координаты точки M:

$$x_M=\frac{-7+2\cdot 2}{1+2}=-1,\ y_M=\frac{3+2(-1)}{1+2}=\frac{1}{3},\ M\left(-1;\,\frac{1}{3}\right).$$

Абсциссы точек C и M равны, следовательно, биссектриса угла C параллельна осн Oy: $x=-1$ или $x+1=0$. ●

73. Найдите острый угол между прямыми: 1) $y=3x$ и $y=-x$; 2) $2x-3y+6=0$ и $3x-y-3=0$; 3) $x/5+y/2=1$ и $x/3+y/4=1$; 4) $3x+4y-12=0$ и $15x-8y-45=0$.

74. Найдите острый угол между прямыми $(x-1)/5=(y-4)/12$ и $(x+3)/3=(y+2)/4$.

75. Найдите внутренние углы треугольника, если его стороны заданы уравнениями: 1) $7x+4y+9=0$, $x-8y+27=0$ и $2x-y-6=0$; 2) $6x-y+13=0$, $3x+7y-1=0$ и $3x-8y-31=0$; 3) $3x-2y-1=0$, $5x+4y-31=0$ и $x-8y-15=0$.

76. Найдите острый угол между двумя прямыми, если: 1) первая из них проходит через точки $A_1\,(4;\,2)$ и $B_1\,(1;\,-7)$, а вторая — через точки $A_2\,(-1;\,3)$ и $B_2\,(8;\,6)$; 2) первая проходит через точки $A_1\,(-6;\,7)$ и $B_1\,(2;\,-5)$, а вторая — через точки $A_2\,(-5;\,2)$ и $B_2\,(1;\,1)$.

77. Найдите острый угол между двумя прямыми, имеющими общую точку $M\,(-2;\,-1)$, если первая из них проходит через точку $A\,(3;\,3)$, а вторая — через точку $B\,(3;\,-2)$.

78. Найдите внутренние углы треугольника, если его вершинами служат точки: 1) $A\,(-6;\,-3)$, $B\,(6;\,7)$ и $C\,(2;\,-1)$; 2) $A\,(0;\,4)$, $B\,(4;\,-2)$ и $C\,(-4;\,-2)$.

79. Дан треугольник с вершинами $A\,(6;\,8)$, $B\,(2;\,-4)$ и $C\,(-6;\,4)$. Найдите угол между стороной AB и медианой, проведенной из вершины A.

80. Найдите острый угол между: 1) прямой $3x+2y+4=0$ и прямой, проходящей через точки $A\,(4;\,-3)$ и $B\,(2;\,-2)$; 2) прямой $x+2y-4=0$ и прямой, проходящей через точки $A\,(1;\,5)$ и $B\,(-4;\,3)$.

81. Найдите острый угол между двумя прямыми, проходящими через начало координат и через точки, которыми отрезок прямой $x+3y-9=0$, заключенный между осями координат, делится в отношении $1:3:2$ в направлении от точки его пересечения с осью Ox к точке пересечения с осью Oy.

82. Найдите острый угол между двумя прямыми, проходящими через точку $C\,(8;\,7)$ и через точки, которыми отрезок прямой $3x+2y-18=0$, заключенный между осями координат, делится на три равные части.

83. Найдите острый угол между двумя прямыми, проходящими через точку $M\,(-6;\,-8)$ и через точки, которыми отрезок прямой $2x+y+10=0$, заключенный между осями координат, делится в отношении $1:2:2$ в направлении от точки пересечения его с осью Ox к точке пересечения с осью Oy.

84. 1) Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $(-2;\,5)$ и образующей с прямой $3x-y+4=0$ угол arctg (1/7); 2) проходящей через начало координат и образующей с прямой $x-y+1=0$ угол 45°. Найдите точку пересечения этой прямой с данной.

85. Две прямые, проходящие через начало координат, образуют между собой угол arctg (1/3). Отношение угловых коэффициентов этих прямых равно 2/7. Составьте уравнения этих прямых.

86. Две прямые, проходящие через начало координат, образуют между собой угол arctg (7/9). Отношение угловых коэффициентов этих прямых равно 9/2. Составьте уравнения этих прямых.

87. Треугольник задан вершинами $A\,(-6;\,-2)$, $B\,(4;\,8)$ и $C\,(2;\,-10)$. Составьте уравнение биссектрисы угла A.

§ 8. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Условие параллельностн двух прямых, заданных общимн уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, имеет вид

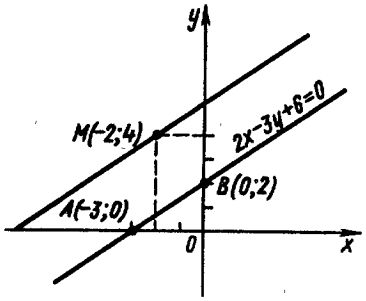


Рис. 128

$$A_1/A_2=B_1/B_2.$$

Условие параллельности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y_2=k_2x+b_2$, имеет вид

$$k_2=k_1.$$

Условие параллельности двух прямых, заданных каноническими уравнениями $(x-x_1)/m_1=(y-y_1)/n_1$ и $(x-x_2)/m_2=(y-y_2)/n_2$, имеет вид

$$m_1/m_2=n_1/n_2.$$

88. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;\,4)$ параллельно прямой $2x-3y+6=0$ (рис. 128).

○ Записав уравнение данной прямой в виде $y=(2/3)x+2$, найдем ее угловой коэффициент $k_1=2/3$. Так как данная и искомая прямая параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т. е. $k_2=k_1=2/3$. Искомая прямая проходит через точку $M(-2;\,4)$ и имеет угловой коэффициент $k_2=2/3$. Поэтому ее уравнение записывается в виде

$$y-4=\frac{2}{3}(x+2),\ \text{или}\ 2x-3y+16=0.\ \bullet$$

89. Проверьте, параллельны ли следующие прямые: 1) $2x-3y++4=0$ и $10x-15y-7=0$; 2) $25x+20y-8=0$ и $5x+4y+4=0$; 3) $y==-2x+8$ и $y=-2x+1$; 4) $y=3x+4$ и $y=-3x+2$.

90. При каком значении параметра a прямые $(x-1)/2=(y+4)/5$ и $(x+6)/4=(y-2)/a$ параллельны?

91. Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $A(-3;\,2)$ параллельно прямой $5x-3y+21=0$; 2) проходящей через точку $A(-1;\,-4)$ параллельно прямой $x/4+y/3=1$.

92. Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $M(-3;\,-1)$ параллельно прямой (AB), где $A(-2;\,6)$ и $B(3;\,-1)$; 2) проходящей через точку $(1;\,-4)$ параллельно прямой AB, где $A(-3;\,1)$ и $B(3;\,2)$.

93. Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку пересечения прямых $x+y-4=0$ и $x-y=0$ параллельно прямой $x-4y+4=0$; 2) проходящей через точку пересечения прямых $x/6+y/3=1$ и $x/3+y/6=1$ параллельно прямой $x-2y-6=0$.

§ 9. УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, имеет вид

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Условие перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, имеет вид

$$k_2=-1/k_1,\ \text{или}\ k_2k_1=-1.$$

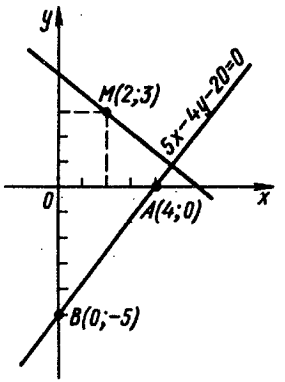


Рис. 129

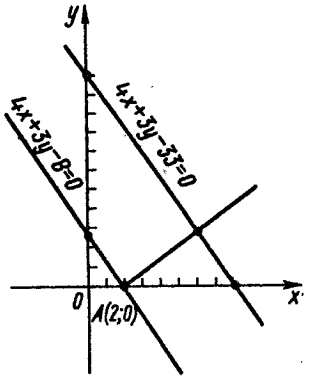


Рис. 130

Условие перпендикулярности двух прямых, заданных каноническими уравнениями $(x-x_1)/m_1=(y-y_1)/n_1$ и $(x-x_2)/m_2=(y-y_2)/n_2$, имеет вид

$$m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Расстояние d от точки $M_1(x_1;\,y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\qquad(18.14)$$

94. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\,3)$ перпендикулярно прямой $5x-4y-20=0$ (рис. 129).

○ Найдем угловой коэффициент данной прямой $k_1=5/4$. Тогда угловой коэффициент искомой прямой $k_2=-4/5$ и, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$y-3=-\frac{4}{5}(x-2),\ \text{или}\ 4x+5y-23=0.\ \bullet$$

95. Найти расстояние от точки $M(6;\,8)$ до прямой $4x+3y+2=0$.

○ По формуле (18.14) получим

$$d=\frac{|4\cdot6+3\cdot8+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=10.\ \bullet$$

96. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $4x+3y-8=0(AB)$ и $4x+3y-33=0(CD)$.

○ На прямой AB возьмем произвольную точку, например точку $A(2;\,0)$ пересечения этой прямой с осью Ox (рис. 130). По формуле (18.14) найдем расстояние от точки $A(2;\,0)$ до прямой $4x+3y-33=0$:

$$d=\frac{|4\cdot2+3\cdot0-33|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5.\ \bullet$$

97. Проверьте, перпендикулярны ли следующие прямые: 1) $3x-4y+12=0$ и $4x+3y-6=0$; 2) $4x+5y-8=0$ и $3x-2y+4=0$; 3)

$(x-x_1)/2=(y-y_1)/3$ и $(x-x_2)/3=(y-y_2)/(-2)$; 4) $(x-x_1)/5=(y-y_1)/(-4)$ и $(x-x_2)/4=(y-y_2)/5$.

98. При каком значении параметра k прямые $y=5x-4$ и $y=kx-2$ перпендикулярны?

99. Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку $M(4; -3)$ перпендикулярно прямой $5x-2y+10=0$; 2) проходящей через точку $M(-4; 1)$ перпендикулярно прямой $x/5-y/6=1$; 3) проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $2x+3y-12=0$.

100. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 4)$ перпендикулярно прямой MN, где $M(-2; 6)$ и $N(3; -3)$.

101. Прямая проходит через точки $(-4; 1)$ и $(2; -5)$. Через точку ее пересечения с осью Oy перпендикулярно данной проходит другая прямая. Составьте уравнения этих прямых.

102. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой, пересекающей ось Ox в точке $(2; 0)$ и ось Oy в точке $(0; -6)$.

103. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y+4=0$ и $3x-y-9=0$ перпендикулярно прямой $x+y-7=0$.

104. Прямая проходит через точку пересечения прямых $x+y-5=0$ и $x-y+3=0$ перпендикулярно прямой, пересекающей ось Ox в точке $(-2; 0)$ и ось Oy в точке $(0; -3)$. Составьте уравнение этой прямой.

105. Прямая проходит через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Составьте уравнение этой прямой, если: 1) $A(-2; 1)$, $B(4; 4)$; 2) $A(-1; 4)$, $B(3; -2)$.

106. Прямая проходит через середину отрезка прямой $3x-7y+21=0$, заключенного между осями координат, перпендикулярно этому отрезку. Составьте уравнение прямой.

107. Составьте уравнения высот треугольника, вершинами которого служат точки: 1) $(-4; 2)$, $(6; 5)$ и $(1; -4)$; 2) $(2; -3)$, $(7; 2)$ и $(-8; -2)$; 3) $(4; 2)$, $(6; -5)$ и $(-5; 4)$.

108. Составьте уравнения высот треугольника по уравнениям его сторон: 1) $11x+2y-21=0$, $8x-3y+7=0$ и $3x+5y+21=0$; 2) $2x-y+5=0$, $x+y-5=0$ и $x-2y-5=0$; 3) $3x-10y+28=0$, $5x+4y+26=0$ и $4x-3y-4=0$.

109. Найдите расстояние: 1) от точки $M(-2; 4)$ до прямой $4x-3y-5=0$; 2) от точки $(4; 6)$ до прямой $3x+4y+14=0$.

110. Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми: 1) $4x+3y+33=0$ и $4x+3y-17=0$; 2) $12x+5y-101=0$ и $12x+5y+68=0$.

§ 10. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

111. При каком значении коэффициента k прямая $y=kx+9$ проходит через точку пересечения прямых $x-y+5=0$ и $x+2y+2=0$?

112. Прямая проходит через точку $M(2; 5)$ и составляет с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 3$. Найдите на этой прямой точку с абсциссой -2.

113. Отрезок прямой $x+2y-4=0$, заключенный между осями координат, делится двумя прямыми, проходящими через начало координат, в отношении $1:2:1$. Составьте уравнения этих прямых.

114. Отрезок прямой $x/9+y/3=1$, заключенный между осями координат, делится двумя прямыми, проходящими через начало координат, на три равные части. Составьте уравнения этих прямых.

115. Даны уравнения сторон треугольника: $6x-5y+8=0$, $4x+y-38=0$ и $x-3y-3=0$. Найдите уравнения его медиан.

116. Даны уравнения сторон треугольника: $4x-5y+22=0$, $5x-2y+2=0$ и $x+3y+14=0$. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения его медиан и через точку $(1; -3)$.

117. На прямой $2x+3y-18=0$ найдите точку, которая отстоит от оси Oy в три раза дальше, чем от оси Ox.

118. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол, в два раза больший угла, образуемого с осью Ox прямой $y=0{,}2x$.

119. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(8; 5)$ и образующей с осью Ox угол, в два раза больший угла, образуемого с осью Ox прямой $x-4y+4=0$.

120. Найдите уравнения прямых, проходящих через точку $(-7; 8)$ под углом $45°$ к прямой $3x-5y+15=0$.

121. Найдите уравнения перпендикуляров к прямой $5x-4y-20=0$, восставленных в точках пересечения ее с осями координат.

122. Треугольник задан вершинами: $A(-5; -2)$, $B(7; 6)$ и $C(5; -4)$. Найдите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины A; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) углы B и C; 5) центр тяжести этого треугольника.

123. Даны две параллельные прямые $x-y-7=0$ и $x-y+3=0$. Составьте уравнение параллельной им прямой, которая делит расстояние между ними в отношении $3:2$ (в направлении от прямой с меньшей начальной ординатой к прямой с большей начальной ординатой).

124. К прямой, проходящей через точки $A(-4; 2)$ и $B(8; 4)$, проведен перпендикуляр через точку, которая делит расстояние AB (от A к B) в отношении $3:4$. Составьте уравнение перпендикуляра.

125. Даны уравнения двух сторон ромба $3x-10y+37=0$ и $9x+2y-17=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x-2y-19=0$. Найдите уравнения двух других сторон ромба и второй его диагонали.

126. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $3x-2y+12=0$ и $x-3y+11=0$ и точка пересечения его диагоналей $(2; 2)$. Составьте уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

127. Две стороны, исходящие из одной вершины параллелограмма, заданы соответственно уравнениями $5x-3y+28=0$, $x-3y-4=0$; координаты противоположной вершины параллелограмма $(10; 6)$. Составьте уравнение двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

128. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(-1; 1)$ и $C(5; 3)$. Составьте уравнения сторон и диагоналей этого квадрата.

129. Составьте уравнения катетов прямоугольного равнобед-

ренного треугольника, если уравнение его гипотенузы $x-2y-3=0$, а вершиной прямого угла служит точка $C(1; 6)$.

130. Луч света, выйдя из точки $A(3; 10)$, отражается от прямой $2x+y-6=0$ и после отражения проходит через точку $B(7; 2)$. Составьте уравнения падающего и отраженного лучей.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

Треугольник задан вершинами: $A(-7; 3)$, $B(2; -1)$ и $C(-1; -5)$. Найдите: 1) уравнение прямой AM, параллельной стороне BC; 2) уравнение медианы AD; 3) уравнение высоты BF; 4) угол B; 5) уравнение биссектрисы CN.

II вариант

Треугольник задан вершинами: $A(-8; -2)$, $B(2; 10)$ и $C(4; 4)$. Найдите: 1) уравнение прямой BN, параллельной стороне AC; 2) уравнение медианы CD; 3) уравнение высоты AE; 4) угол B; 5) центр тяжести этого треугольника.

Глава 19
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

Уравнению с переменными x и y соответствует на плоскости некоторая линия как множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Обратно: линии на плоскости, представляющей множество точек, соответствует некоторое уравнение с переменными x и y.

Чтобы составить по условию задачи уравнение множества точек на плоскости, нужно установить зависимость между переменными величинами x и y (координатами произвольной точки, принадлежащей этому множеству точек) и данными в задаче постоянными величинами (параметрами) и записать эту зависимость уравнением.

1. Составить уравнение множества точек на плоскости, равноудаленных от точек $A(2; 4)$ и $B(4; 6)$.

○ Пусть точка M принадлежит искомому множеству точек (рис. 131), тогда $MA=MB$. Так как $MA=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$, $MB=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}$, то

$$\sqrt{(x-2)^2-(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}.$$

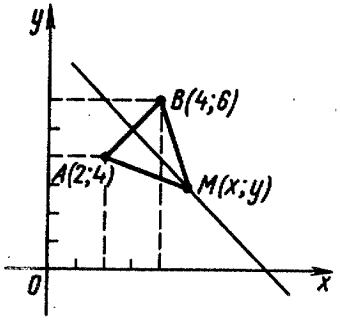


Рис. 131

После возведения левой и правой частей в квадрат и упрощений получим

$$(x-2)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-6)^2,$$
$$\text{или } x+y-8=0.$$

Множеством точек, обладающих указанным в условии свойством, является прямая $x+y-8=0$. Эта прямая, как известно, является серединным перпендикуляром к отрезку AB. ●

2. Найти множество точек на плоскости, удаленных от начала координат на расстояние r.

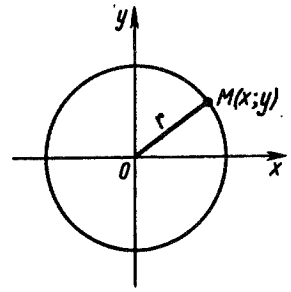


Рис. 132

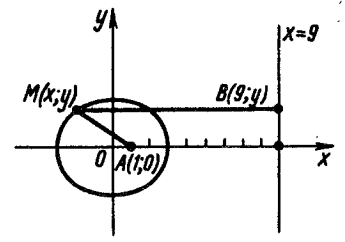


Рис. 133

○ Из условия следует, что для любой точки $M(x; y)$, принадлежащей искомому множеству, справедливо равенство $\widehat{OM}=r$. Так как $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, то отсюда получаем

$$\sqrt{x^2+y^2}=r, \text{ или } x^2+y^2=r^2.$$

Искомое множество точек есть окружность с центром в начале координат и радиусом r (рис. 132). ●

3. Составить уравнение множества точек на плоскости, отношение расстояний которых от точки $A(1; 0)$ и от прямой $x=9$ равно $\lambda=1/3$.

○ Из условия следует, что для любой точки $M(x; y)$ искомого множества справедливо соотношение $MA:MB=1/3$ (рис. 133). Так как $MA=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, $MB=\sqrt{(x-9)^2}=|x-9|$, то

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-9|}=\frac{1}{3}, \text{ или } 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-9|.$$

Возведя левую и правую части в квадрат и упрощая, получим

$$9(x-1)^2+9y^2=|x-9|^2, \text{ т. е. } 8x^2+9y^2=72, \text{ или } x^2/9+y^2/8=1. ●$$

4. Составьте уравнение множества точек на плоскости, равноудаленных от точек $A(-4; 2)$ и $B(6; -8)$.

5. Составьте уравнение множества точек на плоскости, отстоящих от точки $A(6; 0)$ в 3 раза дальше, чем от точки $B(2; 0)$.

6. Составьте уравнение множества точек на плоскости, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек $A(-6; 0)$ и $B(6; 0)$ есть величина постоянная, равная 104.

7. Составьте уравнение множества точек на плоскости, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек $A(0;-2)$ и $B(0;2)$ есть величина постоянная, равная 33.

8. Найдите уравнение множества точек на плоскости, отношение расстояний которых от точки $A(3;0)$ и от прямой $x=12$ равно $\lambda=1/2$.

9. Составьте уравнение траектории точки M, которая при своем движении по плоскости остается вдвое ближе к точке $A(1;0)$, чем к прямой $x=4$.

10. Составьте уравнение множества точек на плоскости, каждая из которых находится вдвое ближе к прямой $x=2$, чем к точке $A(8;0)$.

11. Найдите уравнение траектории точки $M(x;y)$, которая при своем движении по плоскости остается втрое ближе к прямой $x=1$, чем к точке $A(9;0)$.

12. Составьте уравнение множества точек на плоскости, равноудаленных от оси Ox и от точки $A(0;-2)$.

13. Составьте уравнение множества точек на плоскости, равноудаленных от оси Oy и от точки $A(3;0)$.

14. Составьте уравнение множества точек на плоскости, равноудаленных от: 1) прямой $x=4$ и точки $A(-2;3)$; 2) прямой $y=-2$ и точки $A(-3;4)$.

15. Найдите уравнение траектории движения точки на плоскости, если квадрат ее расстояния от точки $A(2;-1)$ равен квадрату расстояния от оси Ox.

16. Найдите уравнение траектории движения точки на плоскости, если квадрат ее расстояния от точки $A(-3;4)$ равен удвоенному квадрату расстояния ее от оси Ox.

§ 2. ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид

$$x^2+y^2=r^2. \tag{19.1}$$

Уравнение окружности с центром в точке $O_1(a;b)$ и радиусом r имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{19.2}$$

Уравнение окружности в общем виде записывается так:

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0, \tag{19.3}$$

где A, B, C и D — постоянные коэффициенты.

17. Составить уравнение окружности с центром в точке $(5;-7)$ и проходящей через точку $(2;-3)$.

○ Найдем радиус окружности как расстояние от центра до данной ее точки: $r=\sqrt{(2-5)^2+[-3-(-7)]^2}=5$. Теперь в уравнение (19.2) подставим координаты центра и найденную величину радиуса: $(x-5)^2+(y+7)^2=25$. ●

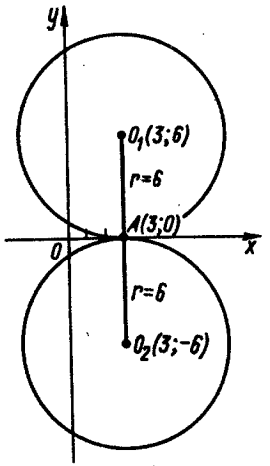


Рис. 134

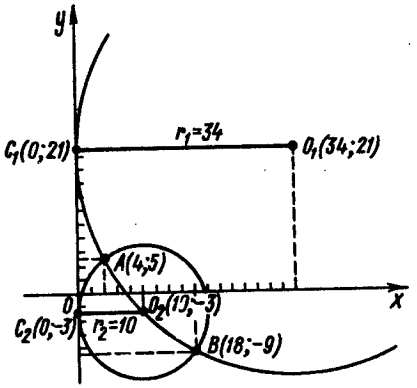


Рис. 135

18. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$ и $C(-5;-3)$.

○ Пусть $O_1(a;b)$ — центр искомой окружности; тогда $O_1A=O_1B=O_1C$ как радиусы одной и той же окружности. Имеем $O_1A=\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}$; $O_1B=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2}$; $O_1C=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}$. Составим систему уравнений относительно неизвестных a и b и решим ее:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2}\\ \sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+3=0,\\ 2a+b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow(a=-2,\ b=1);\ O_1(-2;1).$$

Находим $r=O_1A=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5$. Следовательно, искомое уравнение окружности имеет вид $(x+2)^2+(y-1)^2=25$. ●

19. Составить уравнение окружности, касающейся оси абсцисс в точке $A(3;0)$ и имеющей радиус, равный 6.

○ Пусть $O_1(a;b)$ — центр окружности (рис. 134). Абсцисса точки касания и центра окружности одна и та же $(a=3)$. Найдем ординату центра окружности b:

$$(3-3)^2+(0-b)^2=6^2;\ b=\pm6,$$

т. е. имеется два центра: $O_1(3;6)$ и $O_2(3;-6)$.

Отсюда получаем уравнения двух окружностей, удовлетворяющих данным условиям: $(x-3)^2+(y-6)^2=36$ и $(x-3)^2+(y+6)^2=36$. ●

20. Составить уравнение окружности, касающейся оси ординат и проходящей через точки $A(4;5)$ и $B(18;-9)$.

○ Пусть $O_1(a;b)$ — центр искомой окружности (рис. 135). Проведем радиус в точку касания $C(0;b)$. Радиус окружности $r=a$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-4)^2+(b-5)^2}=a,\\ \sqrt{(a-18)^2+(b+9)^2}=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-10b-8a+41=0,\\ b^2+18b-36a+405=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(a=34,\ b=21),\\ (a=10,\ b=-3).\end{array}\right.$$

Следовательно, имеется два центра $O_1(34;21)$ и $O_2(10;-3)$ и два значения радиуса $r_1=34$ и $r_2=10$, т. е. условию задачи удовлетворяют две окружности: $(x-34)^2+(y-21)^2=34^2$ и $(x-10)^2+(y+3)^2=10^2$. ●

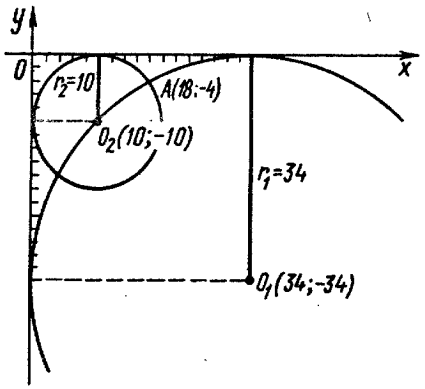


Рис. 136

21. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(18;-4)$.

○ Центр искомой окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку IV координатного угла, имеет координаты $O_1(a;-a)$, где $a>0$. Радиус окружности $r=a$ (рис. 136). Следовательно,

$$\sqrt{(a-18)^2+(-a+4)^2}=a\Leftrightarrow(a^2-44a+340=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=10,\\ a=34.\end{array}\right.$$

Таким образом, имеется два центра $O_1(34;-34)$ и $O_2(10;-10)$ и два значения радиуса $r_1=34$ и $r_2=10$, т. е. условию задачи удовлетворяют две окружности: $(x-34)^2+(y+34)^2=34^2$ и $(x-10)^2+(y+10)^2=10^2$. ●

22. Центр окружности находится в точке $O_1(-3;1)$. Составить уравнение окружности, если она касается прямой $4x+3y-16=0$.

○ Так как угловой коэффициент касательной $k_1=-4/3$, то угловой коэффициент прямой O_1A, перпендикулярной касательной (рис. 137), $k_2=3/4$. Поэтому уравнение прямой O_1A имеет вид

$$y-1=\frac{3}{4}(x+3),\ \text{или}\ 3x-4y+13=0.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases}4x+3y-16=0,\\ 3x-4y+13=0\end{cases}\Leftrightarrow(x=1,\ y=4);\ A(1;4).$$

Теперь находим $r=O_1A=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $(x+3)^2+(y-1)^2=25$. ●

23. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

○ Перепишем данное уравнение в виде $x^2-8x+y^2-10y=8$. Дополнив двучлены x^2-8x и y^2-10y до полных квадратов, получим

$$x^2-2\cdot4x+4^2+y^2-2\cdot5y+5^2=8+4^2+5^2,\ \text{или}\ (x-4)^2+(y-5)^2=49,$$

откуда $a=4$, $b=5$, $r=7$, т. е. центр окружности — точка $(4;5)$, а радиус равен 7.

24. Составьте уравнение окружности: 1) с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{3}$; 2) с центром в точке $(-2;-5)$ и радиусом, равным 3. Постройте эти окружности.

25. Составьте уравнение окружности: 1) с центром в точке $(-1;4)$ и проходящей через точку $(3;5)$; 2) с центром в точке $(-3;0)$ и проходящей через точку $(2;4)$.

26. Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты: 1) $(0;3)$ и $(6;-7)$ 2) $(-2;3)$ и $(2;5)$.

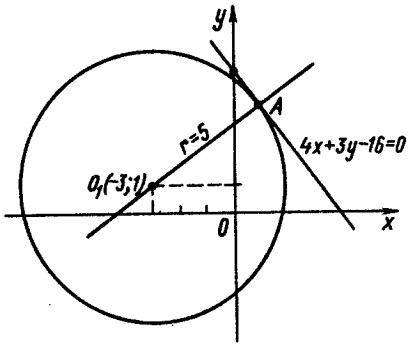


Рис. 137

27. Составьте уравнение окружности, диаметром которой служит заключенный между осями координат отрезок прямой: 1) $4x+3y-24=0$; 2) $5x-4y+40=0$.

28. Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке: 1) $(-2;3)$; 2) $(3;-5)$.

29. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2+y^2-8x-2y-8=0$ и прямой $4x+3y-19=0$.

30. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки: 1) $(2;8)$, $(4;-6)$ и $(-12;-6)$; 2) $(-2;-6)$, $(-3;1)$ и $(4;2)$.

31. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого лежат на прямых: 1) $x-y+4=0$, $3x+y-16=0$ и $x+2y-2=0$; 2) $2x-y+2=0$, $x-3y-14=0$ и $x+y-2=0$; 3) $4x-3y-17=0$, $7x+y-61=0$ и $x-7y-73=0$.

32. Составьте уравнение окружности, касающейся оси ординат в точке $A(0;4)$ и имеющей радиус, равный 5.

33. Составьте уравнение окружности, касающейся оси абсцисс и проходящей через точки $A(7;8)$ и $B(6;9)$.

34. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(8;9)$.

35. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(8;5)$ и $B(-1;-4)$ и имеющей центр на оси абсцисс.

36. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;7)$ и $B(5;-1)$ и имеющей центр на оси ординат.

37. Составьте уравнение окружности: 1) проходящей через точки $A(-8;3)$ и $B(2;-7)$, если центр ее лежит на прямой $x+4y+16=0$; 2) проходящей через точки $M(3;2)$ и $N(-1;-6)$, если центр ее лежит на прямой, пересекающей оси координат в точках $A(2;0)$ и $B(0;-4)$.

38. Центр окружности находится в точке $(-1;-4)$. Составьте уравнение окружности, если она касается прямой, пересекающей оси координат в точках $A(9/4;0)$ и $B(0;3)$.

39. Найдите координаты центра и радиус окружности: 1) $x^2+y^2+6x-10y+13=0$; 2) $x^2+y^2+12y-13=0$; 3) $4x^2+4y^2-4x+20y-23=0$, 4) $x^2+y^2-4x-10y+29=0$; 5) $x^2+y^2+6x+14y+81=0$.

40. Найдите расстояние между центрами окружностей: 1) $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ и $x^2+y^2+6x+4y-12=0$; 2) $x^2+y^2+4x-12y+36=0$ и $x^2+y^2-8x+10y+5=0$.

41. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: 1) $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ и $x^2+y^2+4x+12y+4=0$; 2) $x^2+y^2+4x-6y-23=0$ и $x^2+y^2-10x-14y+58=0$.

42. В окружности $x^2+y^2+6x-4y-12=0$ диаметр образует угол 60° с осью абсцисс. Составьте уравнение диаметра.

43. Дана окружность $x^2+y^2-8x-2y+4=0$. Составьте уравнение диаметра, перпендикулярного хорде $x-5y-12=0$.

44. Дана окружность $x^2+y^2+4x-6y=0$. Составьте уравнение диаметра, перпендикулярного хорде $2x-3y+13=0$.

45. Составьте уравнение радиуса: 1) проведенного в точку $A(5;-6)$ окружности $x^2+y^2-6x+2y-19=0$; 2) проведенного в точку $A(6;3)$ окружности $x^2+y^2-6x-9=0$.

46. Составьте уравнение общей хорды двух пересекающихся окружностей: $x^2+y^2+2x+2y-23=0$ и $x^2+y^2-26x-2y+45=0$.

47. Составьте уравнение окружности: 1) проходящей через точку $A(4;-7)$ и концентрической с окружностью $x^2+y^2+4x-2y-11=0$; 2) проходящей через точку $A(5;6)$ и концентрической с окружностью $x^2+y^2-2x+6y+1=0$.

§ 3. ЭЛЛИПС

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), бóльшая расстояния между фокусами ($2c$).

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b), \tag{19.4}$$

где a — длина большой полуоси; b — длина малой полуоси (рис. 138). Зависимость между параметрами a, b и c выражается соотношением

$$a^2-b^2=c^2. \tag{19.5}$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большой оси $2a$:

$$e=c/a=\sqrt{a^2-b^2}/a<1. \tag{19.6}$$

Если фокусы эллипса лежат на оси Oy (рис. 139), то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b). \tag{19.7}$$

Во всех задачах на эллипс предполагается, что оси симметрии эллипса совпадают с осями координат.

48. Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A_1(-6;0)$ и $A_2(6;0)$, а фокусы — в точках $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$.

○ Из условия следует, что $a=6$ и $c=4$. По формуле (19.5) находим $b^2=6^2-4^2=20$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (19.4), получим $x^2/36+y^2/20=1$. ●

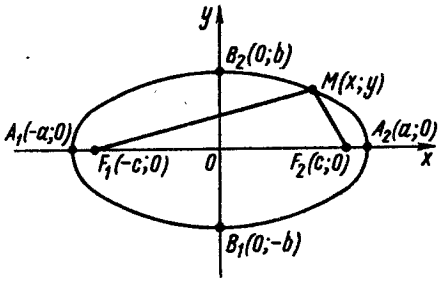


Рис. 138

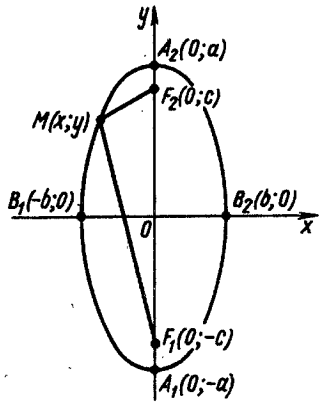


Рис. 139

49. Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $B_1(-8;0)$ и $B_2(8;0)$, а фокусы — в точках $F_1(0;-6)$ и $F_2(0;6)$.

○ Из условия следует, что фокусы лежат на оси Oy; тогда $b=8$; $c=6$. По формуле (19.5) имеем $a^2=8^2+6^2=100$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (19.7), получим $x^2/64+y^2/100=1$. ●

50. Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6 (фокусы лежат на оси Ox) и большая ось равна 10.

○ Из условия имеем $a=5$ и $c=3$. По формуле (19.5) находим $b^2=5^2-3^2=16$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (19.4), получим $x^2/25+y^2/16=1$. ●

51. Дан эллипс $x^2/100+y^2/51=1$. Вычислить его эксцентриситет.

○ Из уравнения эллипса имеем $a^2=100$ и $b^2=51$. По формуле (19.5) найдем $c=\sqrt{100-51}=7$. Эксцентриситет находим по формуле (19.6): $e=7/10$. ●

52. Составить уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $(-4;0)$ и $(4;0)$, а эксцентриситет $e=0{,}8$.

○ Из условия имеем $c=4$, $e=c/a=0{,}8$. Подставив в это равенство значение c, получим $a=5$. По формуле (19.5) найдем $b^2=5^2-4^2=9$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2/25+y^2/9=1$. ●

53. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если его большая ось равна 14, а эксцентриситет $e=2/3$.

○ Из условия имеем $a=7$; $e=c/a=2/3$. Подставив в это соотношение значение a, получим $c=14/3$. Далее, находим $b^2=7^2-(14/3)^2=245/9$. Итак, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{245/9}=1, \text{ или } \frac{x^2}{49}+\frac{9y^2}{245}=1. \text{ ●}$$

54. Составьте уравнение эллипса: 1) с фокусами на оси Ox, если $2a=8$ и $2b=6$; 2) с фокусами на оси Oy, если $2a=10$, $2b=4$.

55. Составьте уравнение эллипса, если: 1) две его вершины находятся в точках $(-5; 0)$ и $(5; 0)$, а фокусы — в точках $(-3; 0)$ и $(3; 0)$; 2) две его вершины находятся в точках $(0; -8)$ и $(0; 8)$, а фокусы — в точках $(-5; 0)$ и $(5; 0)$; 3) две его вершины находятся в точках $(0; -4)$ и $(0; 4)$, а фокусы — в точках $(0; -2)$ и $(0; 2)$.

56. Составьте уравнение эллипса, если: 1) расстояние между фокусами равно 10 (фокусы лежат на оси Ox) и большая ось равна 12; 2) фокусами служат точки $(-2; 0)$ и $(2; 0)$, а малая ось равна 8.

57. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $(0; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$, а большая ось равна $4\sqrt{7}$.

58. Найдите координаты вершин и длины осей эллипса: 1) $x^2/25+y^2/9=1$; 2) $x^2/16+y^2/81=1$.

59. Найдите координаты фокусов и расстояние между фокусами эллипса: 1) $x^2/12+y^2/3=1$; 2) $x^2/10+y^2/26=1$.

60. Вычислите эксцентриситет эллипса: 1) $x^2/25+y^2/9=1$; 2) $x^2/7+y^2/16=1$.

61. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; 0)$, а эксцентриситет $e=1/3$.

62. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если расстояние между фокусами равно 12, а эксцентриситет $e=0{,}6$.

63. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если: 1) большая ось равна 10, а эксцентриситет $e=0{,}6$; 2) малая ось равна 16, а эксцентриситет $e=0{,}6$.

64. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если: 1) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8; 2) сумма полуосей равна 25, а фокусы имеют координаты $(-5; 0)$ и $(5; 0)$.

65. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если он проходит через точки: 1) $A(6; 4)$ и $B(8; 3)$; 2) $A(\sqrt{2}; 2)$ и $B(2; \sqrt{3})$.

66. Найдите координаты точек пересечения: 1) эллипса $x^2/225+y^2/25=1$ и прямой $x+3y-21=0$; 2) эллипса $x^2/25+y^2/9=1$ и прямой $3x+5y-21=0$.

67. Найдите: 1) длину отрезка прямой $x+4y-28=0$, заключенного внутри эллипса $x^2/400+y^2/25=1$; 2) длину отрезка прямой $x-2y-2=0$, заключенного внутри эллипса $x^2/100+y^2/25=1$.

§ 4. ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), меньшая расстояния между фокусами ($2c$).

Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{19.8}$$

где a — длина действительной полуоси; b — длина мнимой полуоси (рис. 140).

Зависимость между параметрами a, b и c выражается соотношением

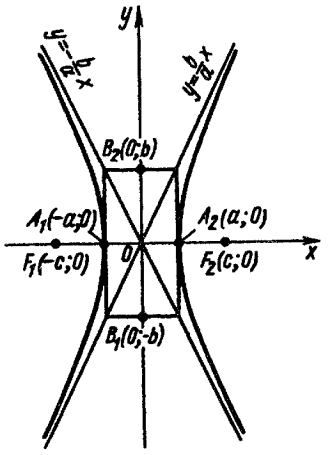


Рис. 140

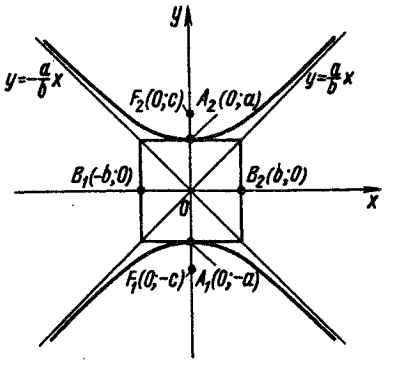


Рис. 141

$$b^2=c^2-a^2. \tag{19.9}$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к ее действительной оси:

$$e=c/a=\sqrt{a^2+b^2}/a>1. \tag{19.10}$$

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y=\pm(b/a)x. \tag{19.11}$$

Если действительная и мнимая оси гиперболы равны (т. е. $a=b$), то гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы записывается в виде

$$x^2-y^2=a^2, \tag{19.12}$$

а уравнения ее асимптот

$$y=\pm x. \tag{19.13}$$

Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy (рис. 141), то ее уравнение имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1, \text{ или } \frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1, \tag{19.14}$$

а уравнения асимптот такой гиперболы

$$y=\pm(a/b)x. \tag{19.15}$$

Формулы (19.9) и (19.10) для гиперболы с фокусами на оси Oy остаются без изменений.

Гиперболы (19.8) и (19.14) называются сопряженными.

Уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Oy имеет вид

$$y^2-x^2=a^2. \tag{19.16}$$

Во всех задачах на гиперболу предполагается, что оси симметрии гиперболы совпадают с осями координат.

68. Составить уравнение гиперболы, если ее вершины находятся в точках $A_1(-3; 0)$ и $A_2(3; 0)$, фокусы — в точках $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$.

○ Из условия следует, что $a=3$ и $c=5$. По формуле (19.9) находим $b^2=5^2-3^2=16$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (19.8), получим $x^2/9-y^2/16=1$. ●

69. Дано уравнение гиперболы $x^2/81-y^2/144=1$. Найти координаты ее вершин и фокусов.

○ Из уравнения гиперболы имеем $a^2=81$, $a=\pm 9$. По формуле (19.9) находим $c^2=81+144=225$, $c=\pm 15$. Следовательно, вершинами гиперболы служат точки $(-9; 0)$ и $(9; 0)$, а фокусами — точки $(-15; 0)$ и $(15; 0)$. ●

70. Дано уравнение гиперболы $x^2/25-y^2/11=1$. Найти ее эксцентриситет.

○ Из уравнения гиперболы имеем $a^2=25$, $b^2=11$. Эксцентриситет вычисляется по формуле (19.10): $e=\sqrt{25+11}/5=6/5$. ●

71. Дано уравнение гиперболы $x^2/144-y^2/256=1$. Составить уравнения ее асимптот.

○ Из уравнения гиперболы найдем $a=12$, $b=16$. Подставив значения a и b в равенства (19.11), получим $y=\pm(16/12)x$, или $y=\pm(4/3)x$. ●

72. Составить уравнение гиперболы, если известны координаты ее фокусов $(-20, 0)$ и $(20; 0)$ и эксцентриситет $e=5/3$.

○ Из условия имеем $c=20$, $e=c/a=5/3$. Подставив в это равенство значение c, получим $20/a=5/3$, т. е. $a=12$. Далее, по формуле (19.9) найдем $b^2=20^2-12^2=256$. Подставив значения a^2 и b^2 в уравнение (19.8), получим $x^2/144-y^2/256=1$. ●

73. Составить уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y=\pm(\sqrt{6}/3)x$ и она проходит через точку $(6; -4)$.

○ По условию, $b/a=\pm\sqrt{6}/3$. Подставим в уравнение (19.8) координаты данной точки и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 6^2/a^2-(-4)^2/b^2=1, \\ b/a=\pm\sqrt{6}/3, \end{cases} \Leftrightarrow (a^2=12,\ b^2=8).$$

Подставив теперь значения a^2 и b^2 в уравнение (19.8), получим $x^2/12-y^2/8=1$. ●

74. Найти вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $x^2/36-y^2/64=-1$.

○ Уравнение данной гиперболы имеет вид (19.14), т. е. фокусы ее лежат на оси Oy. Из уравнения получим $a^2=64$, $a=\pm 8$ и $b^2=36$, $b=\pm 6$. Вершины гиперболы находятся в точках $A_1(0; -8)$ и $A_2(0; 8)$. По формуле (19.9) имеем $c^2=64+36=100$, $c=\pm 10$; следовательно, фокусами служат точки $F_1(0; -10)$ и $F_2(0; 10)$. Эксцентриситет вычислим по формуле (19.10): $e=5/4$. Асимптоты гиперболы найдем по формуле (19.15); $y=\pm(4/3)x$. ●

75. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если ее действительная ось равна 24, а мнимая ось равна 40.

76. Составьте уравнение гиперболы, если ее вершины находятся в точках $(-3; 0)$ и $(3; 0)$, а фокусы — в точках $(-3\sqrt{5}; 0)$ и $(3\sqrt{5}; 0)$.

77. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если длина ее действительной оси равна 12, а расстояние между фокусами равно 20.

78. Дано уравнение гиперболы $x^2/14-y^2/22=1$. Найдите координаты ее фокусов и расстояние между ними.

79. Найдите эксцентриситет гиперболы: 1) $x^2/9-y^2/7=1$; 2) $x^2/25-y^2/24=1$.

80. Составьте уравнения асимптот гиперболы: 1) $x^2/64-y^2/36=1$; 2) $x^2/9-y^2/8=1$.

81. Составьте уравнение гиперболы, если известны координаты ее фокусов и эксцентриситет: 1) $(\pm 2\sqrt{2}; 0)$, $e=2$; 2) $(\pm 3\sqrt{3}; 0)$, $e=\sqrt{6}/2$.

82. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если: 1) длина ее действительной оси равна 6, а эксцентриситет равен $5/3$; 2) длина ее мнимой оси равна 8, а эксцентриситет равен $3\sqrt{5}/5$.

83. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если: 1) длина действительной оси равна 16 и гипербола проходит через точку $(-10; -3)$; 2) длина ее мнимой оси равна 12 и гипербола проходит через точку $(20; 8)$.

84. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если она проходит через точки: 1) $(-6; -\sqrt{7})$ и $(6\sqrt{2}; 4)$; 2) $(-8; 2\sqrt{2})$ и $(6; -1)$.

85. Составьте уравнение гиперболы по координатам фокусов и уравнениям ее асимптот: 1) $(\pm 5; 0)$, $y=\pm(4/3)x$, 2) $(\pm 3; 0)$, $y=\pm\sqrt{2}x$; 3) $(\pm 8; 0)$, $y=\pm\sqrt{3}x$.

86. Составьте уравнение гиперболы по уравнениям ее асимптот и координатам точки, через которую она проходит: 1) $y=\pm(\sqrt{3}/3)x$, $(9; 3\sqrt{2})$; 2) $y=\pm(\sqrt{2}/2)x$, $(-4; -2)$; 3) $y=\pm(\sqrt{3}/2)x$, $(4\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$.

87. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $x^2/9-y^2/16=-1$.

88. Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, если гипербола проходит через точку: 1) $A(-5; 4)$; 2) $B(8; 2)$.

89. Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Oy, если гипербола проходит через точку $(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$.

§ 5. ПАРАБОЛА С ВЕРШИНОЙ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены вправо (рис. 142, *а*), имеет вид

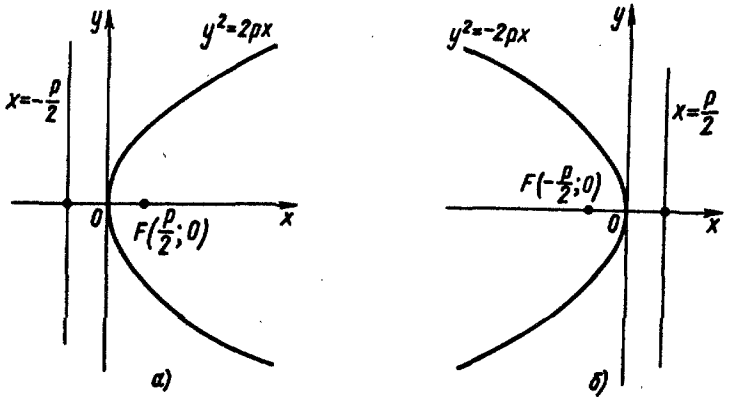


Рис. 142

$$y^2=2px, \qquad (19.17)$$

где $p>0$ (параметр параболы)—расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $x=-p/2$.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены влево (рис. 142, *б*), имеет вид

$$y^2=-2px\,(p>0). \qquad (19.18)$$

Уравнение ее директрисы $x=p/2$.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oy и ветви направлены вверх (рис. 143, *а*), имеет вид

$$x^2=2py\,(p>0). \qquad (19.19)$$

Уравнение ее директрисы $y=-p/2$.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oy и ветви направлены вниз (рис. 143, *б*), имеет вид

$$x^2=-2py\,(p>0). \qquad (19.20)$$

Уравнение ее директрисы $y=p/2$.

Во всех задачах этого параграфа предполагается, что осью симметрии параболы служит одна из осей координат.

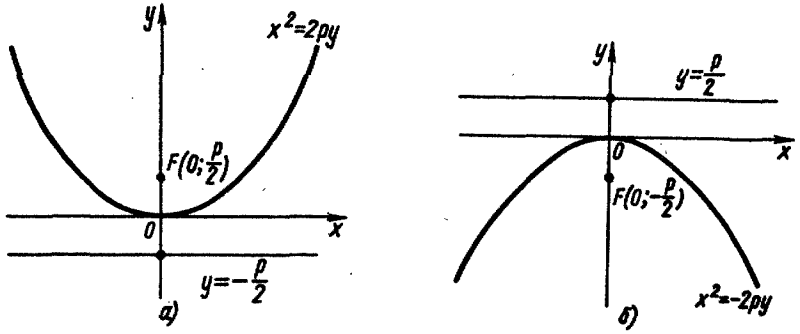


Рис. 143

90. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке $F(3;\,0)$

○ Фокус параболы лежит на положительной полуоси Ox, следовательно, уравнение параболы имеет вид (19.17). Так как координаты фокуса $(p/2;\,0)$, то $p/2=3$, откуда $p=6$. Подставив значение p в уравнение (19.17), получим $y^2=12x$. ●

91. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая $x=-4$.

○ Расстояние директрисы от начала координат равно $p/2$; следовательно, $p/2=4$, т. е. $p=8$. Уравнение этой параболы имеет вид (19.17), так как абсцисса директрисы отрицательна. Подставив в уравнение (19.17) значение параметра p, получим $y^2=16x$. ●

92. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $A(4;\,2)$.

○ Искомая парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $A(4;\,2)$; следовательно, ее уравнение имеет вид (19.19). Подставив в это уравнение координаты точки A, найдем $p=4$. После подстановки в уравнение (19.19) значения p получим $x^2=8y$. ●

93. Найти координаты фокуса параболы с вершиной в начале координат, если уравнение директрисы $x=-3$.

○ Расстояние от начала координат до директрисы равно расстоянию от начала координат до фокуса и равно $p/2$. Из уравнения директрисы $x=-3$ следует, что $p/2=3$. Уравнению директрисы $x=-p/2$ соответствует парабола $y^2=2px$, фокус которой $F(3;\,0)$. ●

94. Дана парабола $y^2=12x$. Найти длину хорды, проходящей через фокус параболы перпендикулярно ее оси.

○ Хорда проходит через фокус параболы перпендикулярно ее оси, поэтому абсциссы точек пересечения хорды с параболой равны абсциссе фокуса (рис. 144). Из уравнения параболы найдем координаты ее фокуса: $y^2=12x$, $2p=12$, $p/2=3$; $F(3;\,0)$.

Для вычисления ординат точек пересечения хорды с параболой подставим значение $x=3$ в уравнение параболы: $y^2=12\cdot3=36$, откуда $y_{1,2}=\pm6$. Следовательно, $M_1(3;\,6)$ и $M_2(3;\,-6)$—точки пересечения хорды с параболой. Длина хорды M_1M_2 равна 2 $FM_1=2\cdot6=12$. ●

95. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке: 1) $F(5;\,0)$; 2) $F(-4;\,0)$; 3) $F(0;\,2)$; 4) $F(0;\,-3)$.

96. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая: 1) $x=-2$; 2) $x=3$; 3) $y=-4$; 4) $y=1$.

97. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку: 1) $(5;\,-3)$; 2) $(-4;\,2)$; 3) $(-2;\,-2)$.

98. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку: 1) $(2;\,-3)$; 2) $(-3;\,1)$.

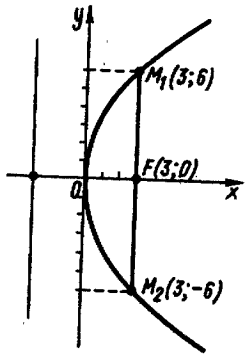


Рис. 144

99. Составьте уравнение директрисы параболы: 1) $y^2=8x$; 2) $y^2=-9x$; 3) $x^2=4y$; 4) $x^2=-10y$.

100. По данному уравнению параболы вычислите координату ее фокуса: 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $x^2=14y$; 4) $x^2=-5y$.

101. Найдите координаты фокуса параболы с вершиной в начале координат, если ее директриса задана уравнением: 1) $x=2$; 2) $x=-5$; 3) $y=4$; $y=-6$.

102. Дана парабола $y^2=20x$. Найдите длину хорды, проходящей через фокус параболы перпендикулярно ее оси.

103. Найдите точки пересечения: 1) параболы $y^2=16x$ с прямой $2x-y+2=0$; 2) параболы $y^2=4x$ с прямой $2x-3y+4=0$.

104. Найдите точки пересечения парабол: 1) $y=x^2$ и $x=y^2$; 2) $y^2=9x$ и $x^2=9y$.

§ 6. ПАРАБОЛА СО СМЕЩЕННОЙ ВЕРШИНОЙ

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Ox, и ветвями, направленными вправо (рис. 145, *а*), имеет вид

$$(y-b)^2=2p(x-a). \qquad (19.21)$$

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Ox, и ветвями, направленными влево (рис. 146, *б*), имеет вид

$$(y-b)^2=-2p(x-a). \qquad (19.22)$$

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Oy, и ветвями, направленными вверх (рис. 146, *а*), имеет вид

$$(x-a)^2=2p(y-b). \qquad (19.23)$$

Уравнение параболы с вершиной в точке $(a; b)$, с осью симметрии, параллельной оси Oy, и ветвями, направленными вниз (рис. 146, *б*) имеет вид

$$(x-a)^2=-2p(y-b). \qquad (19.24)$$

В каждом из уравнений параметр параболы $p>0$ — расстояние от фокуса параболы до ее директрисы.

105. Составить уравнение параболы, имеющей вершину $A(1; 2)$ и проходящей через точку $M(4; 8)$, если ось симметрии параболы параллельна оси Ox.

○ Согласно условию, уравнение искомой параболы имеет вид (19.21), так как точка $M(4; 8)$ расположена правее вершины параболы и, значит, ветви параболы направлены вправо. Для вычисления параметра p подставим в уравнение (19.21) координаты вершины A и точки M: $(8-2)^2=2p(4-1)$, откуда $p=6$. Подставив теперь в уравнение (19.21) найденное значение $p=6$ и координаты вершины A, получим искомое уравнение $(y-2)^2=12(x-1)$. ●

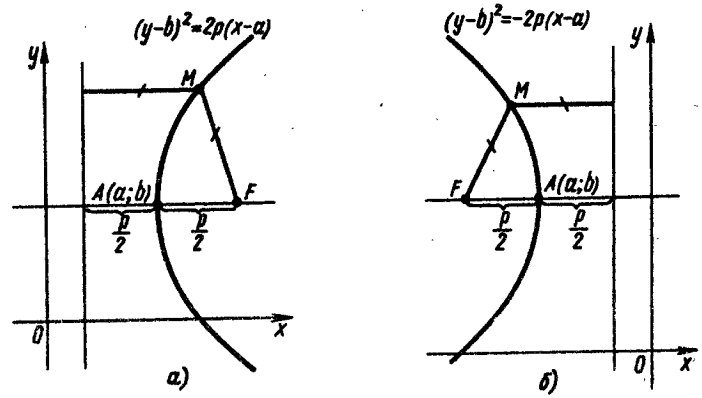


Рис. 145

106. Составить уравнение параболы, вершиной которой служит точка $A(4; 6)$, а директрисой — прямая $x=-2$.

○ Согласно условию, уравнение искомой параболы имеет вид (19.21), поскольку ее директриса перпеидикулярна оси Ox и, следовательно, ось параболы параллельна оси Ox, а ветви параболы направлены вправо (директриса расположена левее вершииы). Так как расстояние от директрисы до вершины параболы равно $p/2$, то величина $p/2$ равна сумме абсолютных величин абсцисс директрисы и вершины параболы, т. е. $p/2=|-2|+4=6$, откуда $p=12$. Подставив в уравнение (19.21) координаты вершины A и найденное значение p, получим $(y-6)^2=24(x-4)$. ●

107. Вычислить координаты фокуса параболы $y^2+4y-24x+76=0$.

○ Преобразуем уравнение параболы к виду (19.21):

$y^2+4y=24x-76$; $y^2+2\cdot2y+2^2=24x-76+2^2$; $(y+2)^2=24(x-3)$,

откуда $A(3; -2)$, $2p=24$, $p=12$.

Расстояиие от вершины параболы до фокуса равно $p/2=12/2=6$. Абсцисса фокуса равна $3+p/2=3+6=9$. Фокус лежит правее вершины параболы, поскольку ветви параболы направлены вправо; ордината же фокуса равна ординате вершины, так как ось параболы параллельиа оси Ox (рис. 147); тогда $F(9; -2)$. ●

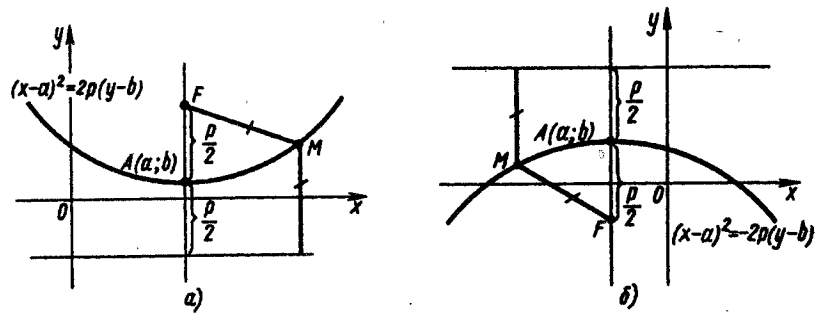


Рис. 146

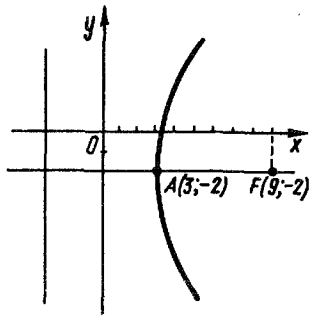


Рис. 147

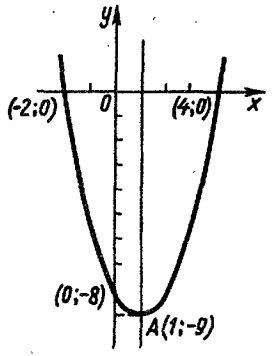


Рис. 148

108. Дана парабола $y^2-4y-20x+24=0$. Составить уравнение ее директрисы.

○ Директриса параболы проходит иа расстояиии $p/2$ от ее вершины перпендикулярио оси параболы. Из уравиения параболы найдем p:

$$y^2-4y=20x-24;\quad y^2-2\cdot 2y+4=20x-24+4;\quad (y-2)^2=20(x-1),$$

откуда $a=1$, $b=2$; $A(1;2)$; $2p=20$, $p/2=5$.

Ось симметрии параболы параллельиа оси Ox, а ветви параболы иаправлены вправо, следовательио, директриса проходит левее вершины. Оиа также проходит и левее иачала координиат, так как расстояние от вершины до оси Oy равио 1, а от вершииы до директрисы равио 5. Абсцисса директрисы равна разиости $p/2-1=5-1=4$, взятой со зиаком мииус; поэтому уравнение директрисы $x=-4$. ●

109. Построить параболу $x^2-2x-y-8=0$.

○ I способ. Hайдем вершиу параболы, преобразовав уравиение $y=x^2-2x-8$ к виду (19.21):

$$x^2-2x=y+8;\quad x^2-2x+1=y+8+1;\quad (x-1)^2=y+9;$$

откуда $a=1$, $b=-9$; $A(1;-9)$.

Найдем точки пересечеиия параболы с осями Ox и Oy: $(-2;0)$, $(4;0)$ и $(0;-8)$. Получим ряд характериых точек $(-2;0)$, $(0;-8)$, $(1;-9)$ и $(4;0)$, по которым построим параболу, симметричиую относительно оси $x=1$ (рис. 148).

II способ (примеияется в тех случаях, когда парабола пересекает ось Ox). Полагая $y=0$, получим уравиеиие $x^2-2x-8=0$, кории которого $x_1=-2$ и $x_2=4$. Абсцисса вершины параболы равиа полусумме абсцисс точек пересечеиия параболы с осью Ox: $x_{вер}=(x_1+x_2)/2=(-2+4)/2=1$. Ординату вершины иайдем, подставив зиачение абсциссы вершины в даиное уравиеиие: $y(1)=1^2-2\cdot 1-8=-9$; $A(1;-9)$.

Дополиительиые точки иаходим приемом, описаиным в I способе построеиия. ●

110. Составьте уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Ox, если парабола проходит через точку M и имеет вершину A: 1) $M(1;3)$, $A(-4;-2)$; 2) $M(0;0)$, $A(-2;-4)$; 3) $M(-3;-3)$, $A(3;-1)$.

111. Составьте уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Oy, если парабола проходит через точку M и имеет вершину A: 1) $M(-6;-8)$, $A(2;4)$; 2) $M(0;0)$, $A(5;-5)$; 3) $M(0;0)$, $A(3;5)$.

112. Составьте уравнение параболы с вершиной A и фокусом F: 1) $A(4;6)$, $F(-2;6)$; 2) $A(3;-2)$, $F(3;0)$; 3) $A(-1;1)$, $F(-1;-4)$.

113. Составьте уравнение параболы, если известны координаты ее вершины A и уравнение директрисы: 1) $A(1;-3)$, $x=5$; 2) $A(-2;4)$, $y=-2$; 3) $A(-3;5)$, $y=7$.

114. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, если известны координаты ее вершины A и уравнение директрисы: 1) $A(3;0)$, $x=0$; 2) $A(-4;0)$, $x=2$.

115. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy, если известны координаты ее вершины A и уравнение директрисы: 1) $A(0;2)$, $y=0$; 2) $A(0;-2)$, $y=-5$; 3) $A(0;-3)$, $y=0$.

116. Составьте уравнение параболы, если известны координаты ее фокуса F и уравнение директрисы: 1) $F(-6;-1)$, $x=2$; 2) $F(0;0)$, $x=-4$; 3) $F(2;2)$, $y=-4$; 4) $F(0;0)$, $y=4$.

117. Найдите координаты вершины параболы: 1) $x^2-6x-6y-21=0$; 2) $x^2+8x+5y+21=0$; 3) $y^2+6y+3x+15=0$; 4) $y^2-6y-12x+33=0$.

118. Вычислите координаты фокуса параболы: 1) $y^2-8y-8x-8=0$; 2) $y^2-12x-36=0$; 3) $x^2+10x+8y+41=0$; 4) $x^2-6y-9=0$.

119. Составьте уравнение оси параболы: 1) $y^2-10y-10x+5=0$; 2) $x^2+16x-18y+100=0$.

120. Составьте уравнение директрисы параболы: 1) $y^2-2y-10x+11=0$; 2) $y^2+8y+8x+32=0$; 3) $x^2-6x+2y+7=0$.

121. Постройте параболу: 1) $x^2+2x-y-8=0$; 2) $x^2+8x+4y=0$; 3) $y^2-4x+2y=0$.

§ 7. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К КРИВОЙ

Пусть иа кривой $y=f(x)$ даиа точка $M_0(x_0;y_0)$, для которой $y_0=f(x_0)$ (рис. 149).

Значеиие производиой фуикции $y=f(x)$ при $x=x_0$ равио угловому коэффициеиту касательиой, проведеииой к кривой $y=f(x)$ в ее точке с абсциссой x_0, т. е.

$$k=y'(x_0)=f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол между касательиой к кривой в точке $M_0(x_0;y_0)$ и положительным иаправлеиием оси Ox.

Уравиение касательиой к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (19.25)$$

Нормалью к кривой $y=f(x)$ в данной ее точке $M_0(x_0;y_0)$ иазывается перпендикуляр к касательиой, проведеииой через точку касания $M_0(x_0;y_0)$ (рис. 149).

Уравиение иормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (19.26)$$

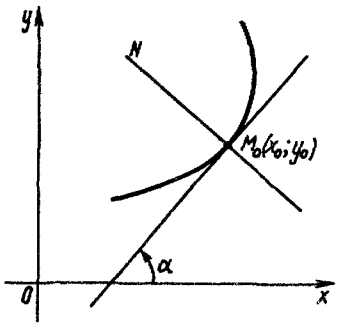


Рис. 149

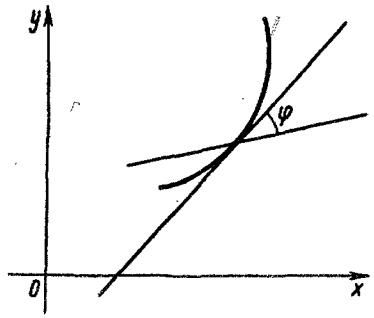


Рис. 150

Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклона кривой в данной ее точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью Ox.

Углом между пересекающимися прямой и кривой называется угол между прямой и касательной к кривой, проведениой через точку их пересечения (рис. 150).

Углом между двумя пересекающимися кривыми называется угол между касательными к этим кривым, проведенным в точке их пересечения (рис. 151).

122. Найти угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к кривой $y=\sin x$ в точке $x=\pi/3$.

○ Найдем производную функции $y=\sin x$ при $x=\pi/3$:

$$y'=\cos x,\ y'(\pi/3)=\cos(\pi/3)=1/2.$$

Тангенс угла наклона касательной в точке $x=\pi/3$ равен $1/2$, т. е. $k=\operatorname{tg}\alpha=1/2$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg}(1/2)\approx 26°,6$ (рис.152). ●

123. Под какими углами парабола $y=x^2+x$ пересекает ось Ox?

○ Найдем точки пересечения параболы $y=x^2+x$ с осью Ox. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+x, \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-1;\ 0), \\ (0;\ 0). \end{array}\right.$$

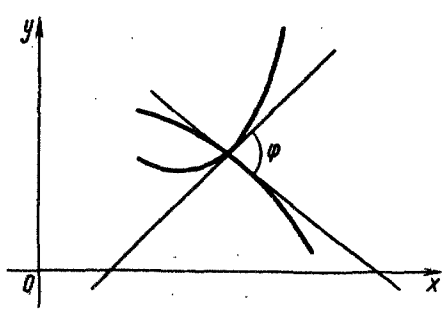


Рис. 151

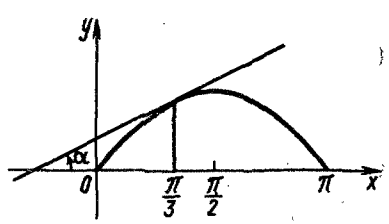


Рис. 152

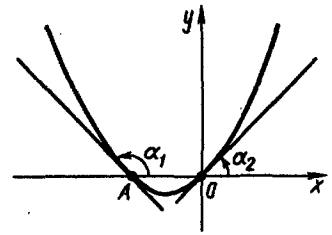


Рис. 153

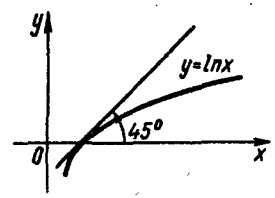


Рис. 154

Значит, парабола пересекает ось Ox в точках $A(-1;0)$ и $O(0;0)$ (рис. 153). Найдем угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках:

$$y'=(x^2+x)'=2x+1;\ k(-1)=2\cdot(-1)+1=-1;\ k(0)=2\cdot 0+1=1.$$

Вычислим углы α_1 и α_2, образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью Ox: $\operatorname{tg}\alpha_1=-1$, $\alpha_1=135°$; $\operatorname{tg}\alpha_2=1$, $\alpha_2=45°$. ●

124. Найти угол, образованный кривой $y=\ln x$ при пересечении ее с осью Ox.

○ Найдем точку пересечения кривой $y=\ln x$ с осью Ox. В этой точке $\ln x=0$, откуда $x=1$ (рис. 154).

Вычислим угловой коэффициент касательной в точке $x=1$:

$$y'=(\ln x)'=1/x;\ y'(1)=1.$$

Найдем угол, образуемый касательной в точке пересечения кривой $y=\ln x$ с осью Ox: $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=45°$. ●

125. К параболе $y=3x^2-x$ в точке $x=-1$ проведены касательная и нормаль. Составить их уравнения.

○ Для составления уравнения касательной найдем ординату точки M, через которую проходит касательиая, и ее угловой коэффициент.

Найдем ординату точки касания, подставив в уравнение параболы значение $x=-1$:

$$y(-1)=3\cdot(-1)^2-(-1)=4;\ M(-1;\ 4).$$

Вычислим угловые коэффициенты касательной и нормали:

$$k_{кас}=y'=(3x^2-x)'=6x-1;\ y'(-1)=6\cdot(-1)-1=-7;\ k_{норм}=1/7.$$

Подставив в уравнения (19.25) и (19.26) координаты точки M и значения $k_{кас}$ и $k_{норм}$, получим

$$y-4=-7(x+1),\ \text{или}\ 7x+y+3=0$$

(уравнение касательной) и

$$y-4=\frac{1}{7}(x+1),\ \text{или}\ x-7y+29=0$$

(уравнение нормали). ●

126. Составить уравнение касательной и нормали к эллипсу $x^2/27+y^2/24=1$ в точке $(-3;\ -4)$.

○ Дифференцируем уравнение эллипса по x, рассматривая y как функцию от x:

$$\frac{2x}{27}+\frac{2yy'}{24}=0,\ 8x+9yy'=0,\ \text{откуда}\ y'=-\frac{8x}{9y}.$$

Найдем угловые коэффициенты касательной и нормали в точке $(-3;\ -4)$;

$$k_{\text{кас}}=y'(-3)=-\frac{8\cdot(-3)}{9\cdot(-4)}=-\frac{2}{3};\ k_{\text{норм}}=\frac{3}{2}.$$

Отсюда получаем

$$y+4=-(2/3)(x+3),\ \text{или}\ 2x+3y+18=0$$

(уравнение касательной) и

$$y+4=(3/2)(x+3),\ \text{или}\ 3x-2y+1=0$$

(уравнение нормали). ●

127. На параболе $y=x^2-2x-8$ найти точку M, в которой касательная параллельна прямой $4x+y+4=0$.

○ Определим угловой коэффициент касательной к параболе: $k=y'=(x^2-2x-8)'=2x-2$. Найдем угловой коэффициент данной прямой: $4x+y+4=0$; $y=-4x-4$; $k=-4$.

Касательная к параболе и данная прямая параллельны, следовательно, их угловые коэффициенты равны: $2x-2=-4$, откуда абсцисса точки касания $x=-1$. Ординату точки касания M вычислим из уравнения параболы: $y(1)=(-1)^2-2\cdot(-1)-8=-5$; $M(-1;\ -5)$ (рис. 155). ●

128. Вычислить острые углы, образуемые при пересечении параболы $x^2-4y=0$ и прямой $x-2y+4=0$.

○ Найдем точки пересечения параболы и прямой; для этого решим систему уравнений $\begin{cases}x^2-4y=0,\\ x-2y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(-2;\ 1),\\ (4;\ 4).\end{array}\right.$ Таким образом, парабола и прямая пересекаются в точках $A(-2;\ 1)$ и $B(4;\ 4)$ (рис. 156).

Найдем угловой коэффициент данной прямой: $x-2y+4=0$; $y=(1/2)x+2$, $k=1/2$. Вычислим угловые коэффициенты касательных в точках $A(-2;\ 1)$ и $B(4;\ 4)$. Записав уравнение параболы в виде $y=(1/4)x^2$, найдем $k=y'=(1/2)x$. Угловой коэффициент касательной в точке A есть $k(-2)=(1/2)\cdot(-2)=-1$; угловой коэффициент касательной в точке B равен $k(4)=(1/2)\cdot 4=2$.

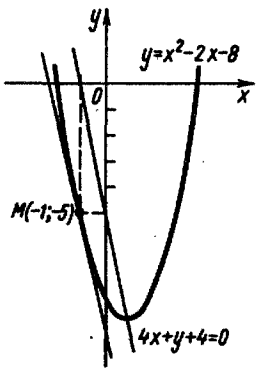


Рис. 155

Угол между параболой и прямой в точке A найдем как угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами $k_1=-1$ (угловой коэффициент касательной в точке A) и $k_2=1/2$ (угловой коэффициент прямой):

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{1/2-(-1)}{1+(1/2)\cdot(-1)}=3;\quad \varphi_1\approx 71°,6.$$

Аналогично находим угол между параболой и прямой в точке B:

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{2-1/2}{1+2\cdot(1/2)}=\frac{3}{4};\quad \varphi_2\approx 36°,9.\ ●$$

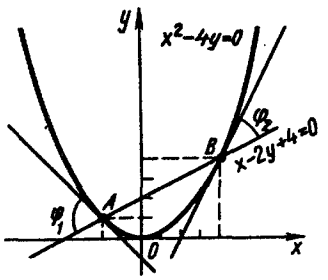


Рис. 156

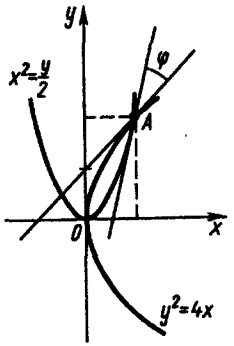


Рис. 157

129. Вычислить острые углы, образуемые при пересечении парабол $y^2=4x$ и $x^2=y/2$.

○ Найдем точки пересечения парабол; для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases}y^2=4x,\\ x^2=y/2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(0;0),\\ (1;\ 2).\end{array}\right.$$

Следовательно, параболы пересекаются в точках $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 2)$ (рис. 157).

Угол между двумя пересекающимися параболами найдем как угол между касательными к ним, проведенными в точке пересечения. Вычислим угловые коэффициенты касательных к параболам в точках их пересечения. В точке $(0;\ 0)$ касательными к параболам служат оси Ox и Oy, следовательно, в этой точке параболы пересекаются под прямым углом. Для нахождения углового коэффициента касательной к параболе $y^2=4x$ в точке A перепишем ее уравнение в виде $y=2\sqrt{x}$ (перед радикалом берем знак плюс, так как пересечение парабол происходит в I четверти): $k=y'=1/\sqrt{x}$; $k=y'(1)=1$. Вычислим угловой коэффициент касательной к параболе $x^2=y/2$ в точке A; записав ее уравнение в виде $y=2x^2$, имеем $k=y'=4x$; $k=y'(1)=4\cdot 1=4$.

Найдем угол φ между касательными, зная их угловые коэффициенты $k_1=1$ и $k_2=4$; $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\dfrac{4-1}{1+4\cdot 1}=\dfrac{3}{5}=0{,}6$; $\varphi\approx 31°$. ●

130. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе: 1) $y=-x^2+x$ в точке $x=-2$; 2) $y=x^2-3x+2$ в точке $x=3$.

131. Найдите угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к кривой: 1) $y=x^2-2x$ в точке $x=2$; 2) $y=x^3$ в точке $x=-2$; 3) $y=\sin x$ в точке $x=2\pi/3$; 4) $y=\operatorname{tg}x$ в точках $x=\pi/3$, $x=\pi/4$.

132. Под какими углами парабола $y=x^2+2x-8$ пересекает ось Ox?

133. Найдите угол, образованный кривой $y=\sin x$ при пересечении ее с осью Ox в точке 1) $x=0$; 2) $x=\pi$.

134. Под каким углом: 1) кривая $y=\lg x$ пересекает ось Ox; 2) кривая $y=e^{\sqrt{3x}}$ пересекает ось Oy?

135. Составьте уравнения касательной и нормали: 1) к параболе $y=x^2-7x+10$ в точке $x=4$; 2) к кривой $y=2x^3$ в точке $x=-1$.

136. Составьте уравнения касательной и нормали: 1) к окружности $x^2+y^2=25$ в точке $(-3; 4)$; 2) к эллипсу $x^2/100+y^2/25=1$ в точке $(-8; 3)$; 3) к гиперболе $x^2/16-y^2/64=1$ в точке $(-5; 6)$; 4) к параболе $y^2=8x$ в точке $(2; -4)$;

137. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой: 1) $y=\sin 3x$ в точке $(\pi/3; 0)$; 2) $y=\sin(x/3)$ в точке $(\pi; \sqrt{3}/2)$; 3) $y=\cos 3x$ в точке $(\pi/6; 0)$.

138. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y=x^2+3x-10$ образует угол 135° с осью Ox.

139. Найдите координаты точки, в которой касательная к кривой $y=\sin x$ $(0<x<\pi/2)$ образует угол $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/2)$ с осью Ox.

140. На параболе $y=-x^2+7x-10$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $x+y-1=0$.

141. В какой точке касательная к параболе $y=-x^2+4$ перпендикулярна прямой $x-2y+2=0$?

142. Вычислите острые углы, образуемые при пересечении параболы $y^2-x=0$ с прямой $x+y-6=0$.

143. Вычислите острые углы, образуемые при пересечении парабол: 1) $y=x^2$ и $x=y^2$; 2) $y^2=4x$ и $2x^2=27y$.

144. Вычислите острый угол, образованный при пересечении кривой $y=\lg x$ и прямой $y=1$.

§ 8. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

145. Через центры окружностей $x^2+y^2-12x-6y+29=0$ и $x^2+y^2+4x+6y+4=0$ проведена прямая до пересечения с осью Ox. Вычислите угол, образуемый этой прямой с осью Ox.

146. Найдите угол между прямыми, проходящими через центр окружности $x^2+y^2-4x-16y+32=0$ и через фокусы эллипса $x^2/36+y^2/20=1$.

147. Вычислите углы, под которыми видны из центра окружности $x^2+y^2-6x-12y+36=0$ большая и малая оси эллипса $x^2/36+y^2/16=1$.

148. Окружность $x^2+y^2+2x-6y-40=0$ пересекает прямая $3x-y+16=0$, внутренний отрезок которой служит стороной вписанного в окружность прямоугольника. Составьте уравнения сторон этого прямоугольника.

149. Найдите точки пересечения эллипса $x^2/8+y^2/2=1$ и окружности $x^2+y^2=5$.

150. В окружность $x^2+y^2=4$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого имеет координаты $(0; 2)$. Вычислите координаты двух других вершин треугольника.

151. Составьте уравнения прямых, проходящих через фокусы эллипсов $x^2/25+y^2/16=1$ и $x^2/24+y^2/49=1$.

152. Вычислите площадь квадрата, вписанного в эллипс $x^2/36+y^2/9=1$.

153. Вычислите площадь прямоугольника, вписанного в эллипс $x^2/16+y^2/12=1$ так, что две его противоположные стороны проходят через фокусы.

154. Составьте уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса $x^2/20+y^2/8=1$, а фокусы — в вершинах эллипса.

155. Найдите расстояние от вершины гиперболы $x^2/25-4y^2/25=1$ до ее асимптоты.

156. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах равносторонней гиперболы $x^2-y^2=18$, если эллипс проходит через точку $(5\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.

157. Найдите точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в начале координат, а фокусы — в точках $F_1(3; 0)$ и $F_2(0; 3/8)$.

158. Окружность $x^2+y^2=20$ пересекает параболу $x^2=8y$. Составьте уравнение их общей хорды.

159. Из точки O под острым углом к горизонту брошено тело, которое, описав дугу параболы, упало на землю на расстоянии 40 м от точки O. Найдите параметр параболической траектории, если максимальная высота, достигнутая телом, равна 25 м (сопротивление воздуха в расчет не принимать).

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Составьте уравнение радиуса, проведенного в точку $A(-3; 1)$ окружности: $x^2+y^2-4x+2y-24=0$.

2) Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если расстояние между фокусами равно 20, а эксцентриситет равен 5/6.

3) Дана гипербола $x^2/81-y^2/63=1$. Найдите ее эксцентриситет.

4) Даиа парабола $y^2-2y+16x+65=0$. Составьте уравнение ее оси.

5) Дана парабола $x^2+6x-12y-3=0$. Составьте уравнение ее директрисы.

II вариант

1) Составьте уравнение касательной, проведенной в точке $A(-2; 1)$ окружности $x^2+y^2-2x+4y-13=0$.

2) Дан эллипс $x^2/625+y^2/400=1$. Найдите его эксцентриситет.

3) Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, зная расстояние между фокусами $2c=90$ и уравнения ее асимптот $y=\pm(4/3)x$.

4) Дана парабола $x^2+6x+20y-51=0$. Составьте уравнение ее оси.

5) Даиа парабола $y^2+8y+28x+72=0$. Составьте уравнение ее директрисы.

Глава 20
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1. Простейшие задачи на построение сечения многогранника. *Сечением* многогранника называется часть секущей плоскости, ограниченной линиями пересечения этой плоскости с поверхностью многогранника. При постро-

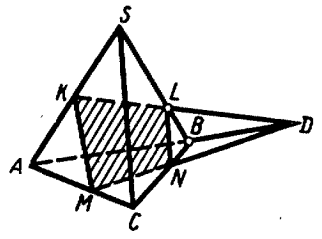


Рис. 158

ении сечения многогранника необходимо найти: 1) положение секущей плоскости; 2) линию пересечения секущей плоскости с поверхностью многогранника.

1. В тетраэдре $SABC$ провести сечение плоскостью, проходящей через три точки K, L, M, лежащие соответственно на ребрах SA, SB и AC (прямые KL и AB не параллельны; рис. 158).

○ Плоскость, проходящую через точки K, L, M, обозначим α. Плоскость α имеет с плоскостью SAB общие точки K и L; поэтому плоскости SAB и α пересекаются по прямой KL. Отрезок KL — пересечение грани SAB и плоскости α. Аналогично построим отрезок KM.

Плоскость грани ABC имеет с секущей плоскостью α общую точку M; для построения линии пересечения этих плоскостей достаточно найти еще одну их общую точку. Такой точкой является точка D пересечения прямых KL и AB (точка D лежит в плоскости α и в плоскости ABC). Проведя прямую MD, получим точку N на ребре BC. Отрезки MN и NL — две другие стороны сечения. Итак, сечение $MKLN$ — искомое. ●

2. Даны тетраэдр $SABC$ и точки M и N, причем точка M лежит на ребре SC, а точка N — на ребре AB. Постройте пересечение плоскостей ABM и SCN.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем K лежит на ребре AA_1, L — на ребре CC_1 и M — на ребре DC. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение плоскостью, проходящей через: 1) вершины A_1, B и D; 2) середины ребер, выходящих из одной вершины; 3) диагональ основания BD и вершину A_1; 4) три точки, лежащие на ребрах AA_1, CC_1 и BC.

5. В тетраэдре $SABC$ постройте сечение плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на ребрах SA, AC и BC.

6. В тетраэдре $SABC$ постройте сечение плоскостью, проходящей через вершину S и точки M и N, лежащие соответственно на ребрах AB и AC.

7. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер BS и CS. Найдите площадь сечения, если ребро тетраэдра равно a.

8. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через ребро SA и точку пересечения медиан грани ACB. Найдите площадь сечения, если ребро тетраэдра равно a.

2. Скрещивающиеся прямые. Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми a и b, достаточно через прямую b провести плоскость $\alpha \| a$ и из любой точки A прямой a провести к плоскости α перпендикуляр AA_1 (рис. 159).

9. На модели куба укажите его ребра, лежащие на скрещивающихся прямых.

10. Через данную точку проведите прямую, скрещивающуюся с данной прямой.

11. Сколько пар ребер, лежащих на скрещивающихся прямых, имеет тетраэдр?

12. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром a.

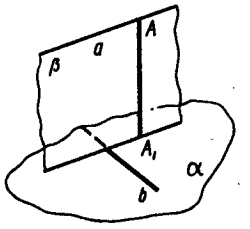


Рис. 159

3. Параллельные прямые

13. Концы данного отрезка длиной 50 см отстоят от плоскости на 30 и 44 см. Найдите проекцию этого отрезка на плоскость.

14. Отрезок длиной 15 см пересекает плоскость, концы его отстоят от плоскости на 3 и 6 см. Найдите проекцию этого отрезка на плоскость.

15. Отрезок пересекает плоскость; концы его отстоят от плоскости на 3 и 12 см. Найдите расстояние середины этого отрезка от плоскости.

4. Параллельность прямой и плоскости

16. Дан тетраэдр $SABC$, причем M лежит на ребре AS и N на ребре AC. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельной прямой AB.

○ Анализ. Предположим, что сечение построено (рис. 160). Пересечение плоскости сечения с гранью ASC получим, соединив точки M и N. По условию, прямая AB параллельна плоскости сечения, поэтому грани ABC и ABS пересекают плоскость сечения по отрезкам PN и MQ, параллельным прямой AB.

Построение. 1) $NP \| AB$, P лежит на ребре BC; 2) $MQ \| AB$, Q лежит на ребре SB. Четырехугольник $NMQP$ — искомое сечение.

Доказательство. Плоскость $NMQP$ параллельна прямой AB, так как $MQ \| AB$.

Исследование. Задача имеет единственное решение, так как ребро BC пересекает плоскость сечения в единственной точке P и через точки M, N, P проходит единственная плоскость.

Мы применили общую схему решения задач на построение (анализ, построение, доказательство, исследование).

17. 1) Даны точка A и прямая a, причем A не лежит на прямой a. Проведите через точку A прямую, параллельную данной плоскости.

2) Даны точка A и прямая a, причем A не лежит на прямой a. Проведите через точку A плоскость, параллельную прямой a.

18. Дано $a \| b$. Проведите через прямую a плоскость, параллельную прямой b.

19. Проведите через данную точку отрезок так, чтобы его проекция на данную плоскость была равна длине отрезка.

20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите сечение через: 1) ребра AB и D_1C_1; 2) ребро AD и середину ребра BB_1; 3) середину ребер AD и DC параллельно ребру DD_1; 4) середину ребра CC_1 параллельно ребрам AB и A_1D_1.

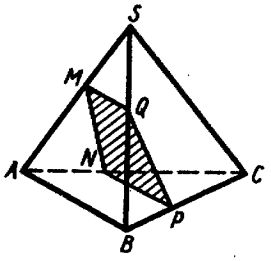


Рис. 160

21. В тетраэдре $SABC$ проведите сечение через середину ребра AC параллельно ребрам AB и CS.

22. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через середину ребер BS и CS и внутреннюю точку D ребра AC.

23. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью, проходящей через ребра DC и A_1B_1.

5. Параллельные плоскости

24. Через точку грани ASB тетраэдра $SABC$ проведите сечение, параллельное: 1) плоскости грани ABC; 2) плоскости грани ASB.

25. Через точку на боковой грани призмы проведите сечение, параллельное: 1) плоскости основания призмы; 2) плоскости данного диагонального сечения призмы.

26. Две прямые, проведенные из точки S, пересекают три параллельные плоскости соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Известно, что $A_1A_2=4$ см, $B_2B_3=9$ см, $A_2A_3=B_1B_2$. Вычислите A_1A_3 и B_1B_3.

27. В тетраэдре $SABC$ проведены сечения $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, плоскости которых параллельны грани ABC. Известно, что $SB_1=A_1A_2=6$ см, $C_1C_2=B_2B=12$ см, $SA_1=4$ см. Вычислите SA, SB, SC.

§ 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. ДВУГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

1. Перпендикулярность прямой и плоскости

28. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем M лежит на ребре AB. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AB.

29. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей; $SA=SC$, $SB=SD$, где S — точка вне плоскости параллелограмма. Докажите, что $SO\perp$пл. $ABCD$.

2. Расстояние от точки до плоскости

30. Диагональ куба равна m. Найдите расстояние от вершины куба до плоскости противолежащей грани.

31. Сторона правильного треугольника равна a, точка M расположена вне плоскости треугольника и отстоит от всех его вершин на расстоянии l. Найдите расстояние от M до плоскости треугольника.

32. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Точка M находится на расстоянии h от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от всех его вершин. Найдите это расстояние.

3. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых

Отрезок, имеющий концы на двух скрещивающихся прямых и перпендикулярный им, называется общим перпендикуляром скрещивающихся прямых.

Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых является расстоянием между этими прямыми.

33. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите общий перпендикуляр прямых: 1) AB и DD_1; 2) BC и AA_1; 3) A_1D_1 и DC.

34. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC, если ребро куба равно a.

4. Теорема о трех перпендикулярах

35. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 15 и 20 см проведен перпендикуляр длиной 16 см к плоскости треугольника. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до гипотенузы.

36. Стороны треугольника равны 51, 30 и 27 см. Из вершины меньшего угла треугольника проведен к его плоскости перпендикуляр длиной 10 см. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до противолежащей стороны треугольника.

37. Диагонали ромба равны 60 и 80 см. В точке пересечения диагоналей к плоскости ромба проведен перпендикуляр длиной 45 см. Найдите расстояние от этой точки до стороны ромба.

38. Точка M находится на расстоянии 11 см от каждой стороны равнобедренной трапеции с основаниями 16 и 30 см. Вычислите расстояние от точки M до плоскости трапеции.

39. Точка M равноудалена от всех вершин правильного треугольника со стороной a и находится на расстоянии h от плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки M до стороны треугольника.

5. Угол между наклонной и плоскостью

40. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы наклона диагонали AC_1 к плоскостям граней, имеющих общую вершину A, если $AB=BC=a$, $AA_1=2a$.

41. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a, проведены две наклонные под углом 45° к плоскости, а их проекции составляют между собой угол 120°. Вычислите расстояние между концами наклонных.

42. В равнобедренном прямоугольном треугольнике один из катетов образует с плоскостью, в которой лежит другой катет, угол 45°. Докажите, что гипотенуза образует с этой плоскостью угол 30°.

43. Наклонная AB образует с плоскостью α угол 45°, а прямая AC, лежащая в плоскости α, составляет угол 45° с проекцией наклонной AB. Докажите, что $\widehat{BAC}=60°$.

44. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 60°.

6. Двугранные углы

45. На грани двугранного угла в 60° дана точка, удаленная от ребра на расстояние m. Найдите расстояние от этой точки до другой грани.

46. Внутри двугранного угла 120° дана точка M, удаленная от каждой из граней на расстояние m. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

47. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их отклонены на 60°. Общее основание равно 12 см, боковая сторона одного треугольника равна 10 см, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

48. Отрезок, длина которого равна α, упирается своими концами в грани прямого двугранного угла, образуя с каждым из них угол α. Вычислите проекцию этого отрезка на ребро двугранного угла.

7. Перпендикулярные плоскости

49. Концы отрезка AB лежат на двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Длины перпендикуляров, опущенных из точек A и B на линию пересечения плоскостей, соответственно равны a и b, а расстояние между их основаниями равно c. Вычислите длину отрезка AB и длины его проекций на данные плоскости.

50. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 4 см; боковое ребро 8 см. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная основанию. Вычислите площадь сечения.

8. Площадь проекции плоской фигуры

51. Площадь плоского многоугольника равна 150 см^2. Найдите площадь проекции этого многоугольника на плоскость, составляющую с плоскостью многоугольника угол 60°.

52. Дан треугольник ABC со сторонами $a=13$ см, $b=14$ см, $c=15$ см. Через сторону BC проведена плоскость α под углом 30° к плоскости $\triangle ABC$. Найдите площадь проекции этого треугольника на плоскость α.

53. Найдите площадь плоского многоугольника, если площадь его проекции равна 20 м^2 и двугранный угол между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции равен 45°.

54. Найдите площадь проекции круга на плоскость, образующую с плоскостью круга угол 30°. Радиус круга равен 2 м.

9. Трехгранные углы

55. 1) Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла — прямые, то и противоположные им двугранные углы — прямые.

2) Докажите, что если в трехгранном угле два двугранных угла — прямые, то противоположные им плоские углы — прямые.

56. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер от вершины отложен отрезок, длина которого равна a, и из конца отрезка опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

57. Каждый из плоских углов трехгранного угла равен α. Вычислите угол между ребром и противолежащей гранью.

§ 3. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

58. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите сечение через середины ребер A_1D_1 и D_1C_1 и вершину A. Вычислите площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

59. Из точки O, лежащей вне двух параллельных плоскостей α и β, проведены три луча, пересекающие плоскости α и β соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 $(OA<OA_1)$. Вычислите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $OA=m$, $AA_1=n$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

60. Точка M лежит вне плоскости прямоугольного треугольника ABC $(\hat{C}=90°)$; $MA\perp AC$, $MC\perp CB$. Докажите, что $MA\perp$ пл. ABC.

61. Меньшее основание трапеции лежит в плоскости α, которая отстоит от большего основания трапеции на расстоянии 10 см; основания трапеции относятся, как 3 : 5. Найдите расстояние точки пересечения диагоналей трапеции от плоскости α.

62. В треугольнике ABC угол B — прямой и $BC=a$. Из вершины A проведен к плоскости треугольника перпендикуляр AD. Найдите расстояние от точки D до катета BC, если $DC=m$.

63. В треугольнике, стороны которого равны 10, 17 и 21 см, из вершины большего угла проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Вычислите расстояние от конца этого перпендикуляра, лежащего вне плоскости треугольника, до большей стороны треугольника.

64. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 и 32 см. Из точки D, делящей гипотенузу пополам, проведен к плоскости треугольника перпендикуляр DE, равный 12 см. Вычислите расстояние от точки E до каждого катета.

65. Через вершину квадрата проведена наклонная к его плоскости, составляющая угол α с каждой из сторон квадрата, проходящих через эту вершину. Найдите угол между этой наклонной и диагональю квадрата.

66. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Вычислите острый угол ромба.

67. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине α; через основание треугольника проведена плос-

кость, образующая с каждой из его боковых сторон угол β. Найдите расстояние этой плоскости от вершины треугольника.

68. Отрезки, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся, как 2:3, и образуют с плоскостями углы, отношение которых равно 2. Вычислите эти углы.

69. Два равных квадрата имеют общую сторону; их плоскости образуют двугранный угол, равный α. Из общей вершины в каждом из квадратов проведены диагонали. Вычислите угол между этими диагоналями.

70. В одной грани острого двугранного угла проведена прямая под углом 30° к другой грани и под углом 45° к ребру. Вычислите двугранный угол.

71. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их составляют угол 60°. Общее основание равно 16 см, боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Вычислите расстояние между вершинами треугольников.

72. В одной из граней двугранного угла, равного α, проведена прямая, образующая угол β с ребром двугранного угла. Найдите угол наклона этой прямой к другой грани.

73. В трехгранном угле каждый из плоских углов равен 60°. Через точку A, взятую на одном из ребер угла на расстоянии a от его вершины, проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру и пересекающая два других ребра в точках B и C. Найдите периметр треугольника ABC.

74. В трехгранном угле два плоских угла равны 45°, а третий плоский угол содержит 60°. Вычислите двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

75. В трехгранном угле каждый из плоских углов равен α. Найдите двугранные углы.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Из центра круга, описанного около прямоугольного треугольника с острым углом 30°, восставлен к его плоскости перпендикуляр, длина которого равна 6 см. Конец перпендикуляра, лежащий вне плоскости треугольника, удален от большего катета на 10 см. Вычислите гипотенузу треугольника.

2) Два равнобедренных треугольника ABC и ACD имеют общее основание AC, двугранный угол AC равен 60°, а угол, образованный стороной BC с плоскостью ADC, равен 45°. Сторона BC равна 6 см. Вычислите площадь треугольника ABC.

II вариант

1) На плоскости дан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 12 см. В пространстве дана точка, удаленная от каждой вершины треугольника на 10 см. Вычислите расстояние данной точки от плоскости.

2) Основание AC равнобедренного треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина B удалена от плоскости α на $3\sqrt{2}$ см. Вычислите площадь треугольника ABC, если $AC=18$ см и плоскость треугольника ABC наклонена к плоскости α под углом 45°.

Глава 21
ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Векторы в пространстве. В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Так же определяют основные понятия для векторов в пространстве: модуль вектора, направление вектора, равенство векторов.

Векторы, расположенные на прямых, параллельных одной и той же плоскости, или лежащие в этой плоскости, называются *компланарными*.

Три вектора, среди которых имеется хотя бы один нулевой вектор, считаются компланарными.

Любой вектор $\vec{d}$ пространства можно разложить по трем заданным некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}. \tag{21.1}$$

2. Прямоугольная система координат в пространстве. Пусть в пространстве задана тройка попарно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, отложенных от некоторого начала — точки O (рис. 161). Такую тройку векторов называют *прямоугольным базисом* в пространстве. Совокупность начала O и прямоугольного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называют *прямоугольной системой координат в пространстве*.

Разложение вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеет вид

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \tag{21.2}$$

Координаты точки M — числа x, y, z (рис. 162) в данной системе координат — называются *координатами вектора* $\overline{OM}=\vec{a}$.

Если $\overline{OM}=\vec{a}=(x; y; z)$, то пишут $M(x; y; z)$. Число x называют *абсциссой*, y — *ординатой* и z — *аппликатой* точки M или вектора $OM=\vec{a}$. Начало O векторов называется *началом координат*. Оси, определяемые векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, называются *координатными осями*, а плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, — *координатными плоскостями*. Пространство, в котором задана система координат, называют *координатным пространством*.

Координатные плоскости делят все не принадлежащие им точки пространства на восемь областей — октантов.

Точки, лежащие на координатных плоскостях, имеют одну из координат, равную нулю. Точки, лежащие на осях координат, имеют две координаты, равные нулю. Начало координат имеет все три координаты, равные нулю.

Знаки координат точек в пространстве представлены в таблице:

Координаты	Октант							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Абсцисса	+	−	−	+	+	−	−	+
Ордината	+	+	−	−	+	+	−	−
Аппликата	+	+	+	+	−	−	−	−

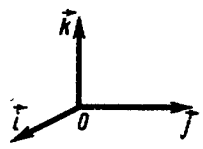


Рис. 161

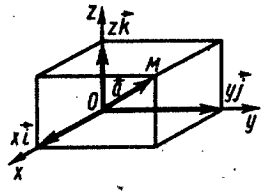


Рис. 162

Если все координаты вектора $\vec{a}$ отличны от нуля, то этот вектор можно изобразить как диагональ прямоугольного параллелепипеда, числовые значения длин ребер которого равны $|x|$, $|y|$, $|z|$ (рис. 162).

В заданном прямоугольном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ каждая тройка чисел $(x; y; z)$ определяет единственный вектор, для которого эти числа являются координатами.

По определению прямоугольного базиса имеем

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1.$$

Если началом вектора $\vec{a}$ является точка $A(x_A; y_A; z_A)$, концом — точка $B(x_B; y_B; z_B)$, то вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ имеет координаты, равные разностям соответствующих координат точек B и A:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A), \tag{21.3}$$

и записывается в виде

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}. \tag{21.4}$$

3. Правила действий над векторами, заданными своими координатами. Если в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ заданы векторы $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$, то:

координаты суммы двух (или более) векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т. е. $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$;

координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$;

координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число: $m\vec{a}=(mx_1; my_1; mz_1)$.

4. Условие коллинеарности двух векторов. Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид

$$x_1=mx_2,\quad y_1=my_2,\quad z_1=mz_2. \tag{21.5}$$

Если $m>0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление; если $m<0$, то направления векторов противоположны.

5. Длина вектора. Длина вектора $\vec{a}$ (расстояние между двумя точками) вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \tag{21.6}$$

Длина радиус-вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{21.7}$$

6. Деление отрезка в данном отношении. Если отрезок AB разделен точкой C в отношении $AC:CB=\lambda$, то координаты точки C находятся по формулам

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\quad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{21.8}$$

При $\lambda=1$ получаются формулы для нахождения координат середины отрезка:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2};\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2};\quad z_C=\frac{z_A+z_B}{2}. \tag{21.9}$$

7. Направляющие косинусы вектора. Углы, образуемые радиус-вектором $\vec{a}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz, вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=$$

$$=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{21.10}$$

Косинусы углов, вычисляемые по этим формулам, называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Для направляющих косинусов вектора имеет место соотношение

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{21.11}$$

1. Отрезок AB, где $A(7; 2; -3)$, $B(-5; 0; 4)$, разделен точкой C в отношении $\lambda=AC:CB=1:5$. Найти координаты точки C.

○ Подставляя в соотношения (21.8) значения $x_A=7$, $y_A=2$, $z_A=-3$, $x_B=-5$, $y_B=0$, $z_B=4$ и $\lambda=1/5$, получим:

$$x_C=\frac{7+(1/5)(-5)}{1+1/5}=5,\quad y_C=\frac{2+(1/5)\cdot 0}{1+1/5}=\frac{5}{3},\quad z_C=\frac{-3+(1/5)\cdot 4}{1+1/5}=-\frac{11}{6}.$$

Таким образом, $C(5;\ 5/3;\ -11/6)$. ●

2. Найти косинусы углов, которые вектор $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ образует с базисными векторами.

○ По формуле (21.6) находим длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3.$$

По формулам (21.10) находим косинусы углов, образованных данным вектором с базисными векторами: $\cos\alpha=1/3$, $\cos\beta=-2/3$, $\cos\gamma=2/3$. ●

3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отложите: 1) от точки A вектор $\overrightarrow{CD}$; 2) от точки B_1 вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) от точки C вектор $\overrightarrow{AA_1}$.

4. Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите сумму векторов: 1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов: 1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{D_1D}$; 4) $\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C_1C}$.

6. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите сумму векторов: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BA_1}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.

7. Пусть M — середина отрезка AB и O — произвольная точка пространства. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})/2$.

8. Дан тетраэдр $ABCD$. От точки B отложите вектор, противоположный вектору: 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}$.

9. Вне плоскости треугольника ABC взята точка O. Отложите от точки O векторы: 1) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$; 2) $-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

10. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$.

11. Дан параллелограмм $ABCD$ и вне его произвольная точка O. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

12. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и O — произвольная точка пространства. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})/3$.

13. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите, какие из следующих трех векторов компланарны 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{CC_1}$; 3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1}$; 4) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA}$; 5) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$; 6) $\overrightarrow{B_1B_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$; 7) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$.

14. Назовите три упорядоченные пары вершин тетраэдра $ABCD$, задающие коллинеарные векторы, и по три упорядоченных пары, задающих компланарные и некомпланарные векторы.

15. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{r}=\overrightarrow{AA_1}$ векторы: 1) $\overrightarrow{AD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}$; 3) $\overrightarrow{AM}$, где M — середина BB_1, 4) $\overrightarrow{AN}$, где N — середина B_1C; 5) $\overrightarrow{AP}$, где $P\in D_1C_1$ и $D_1P:PC_1=3:4$.

16. Дан тетраэдр $ABCD$. Медианы грани ABC пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{DA}$ по векторам $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DM}$.

17. Дан параллелограмм $ABCD$ и вне его точка M. Разложите по векторам $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$ векторы: 1) $\overrightarrow{MO}$, где O — точка пересечения прямых AC и BD; 2) $\overrightarrow{MD}$; 3) $\overrightarrow{MN}$, где N — середина отрезка AD.

18. Постройте точки: $A(2; 3; 4)$; $B(-2; -3; -4)$; $C(-2; -3; 4)$; $D(2; -3; 4)$; $E(-2; 3; 4)$; $F(2; 3; -4)$; $G(0; 0; 2)$; $H(3; 0; -4)$.

19. Назовите координаты вектора 1) $3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$; 2) $2\vec{i}-\vec{k}$; 3) $0{,}5\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}$; 4) $3\vec{k}$; 5) $-4\vec{i}$; 6) $\vec{0}$.

20. Даны векторы: 1) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$; 2) $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}+3k$. Запишите их координаты.

21. Постройте векторы: 1) $\vec{a}=(2; 3; 4)$; 2) $\vec{b}=(2; -3; -4)$; 3) $\vec{c}=(3; -1; -4)$; 4) $\vec{d}=(-5; -4; 3)$.

22. Постройте вектор $\overrightarrow{AB}$, если: 1) $A(2; -3; 4)$ и $B(-3; 2; -5)$; 2) $A(0; -2; 3)$ и $B(5; 0; -4)$.

23. Зная координаты точек $A(4; -3; 2)$ и $B(-2; 4; -3)$, $M(0; 5; 1)$ и $N(-4; 0; -3)$, найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$.

24. Зная координаты векторов $\vec{a}=(2; 3; -4)$, $\vec{b}=(-1; 2; 1)$ и $\vec{c}=(3; 0; 2)$, найдите координаты векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 4) $3\vec{a}$; 5) $-\vec{a}+2\vec{c}$; 6) $2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

25. Пользуясь условием коллинеарности двух векторов, проверьте, коллинеарны ли векторы: 1) $\vec{a}=(2/5; -1/3; 4/5)$ и $\vec{b}=(3/5; -1/2; 6/5)$; 2) $\vec{c}=(-6; 1/3; 3)$ и $\vec{d}=(-2; 1/9; -1/3)$.

26. При каких значениях n и p векторы $\vec{a}=(-3; n; 4)$ и $\vec{b}=(-2; 4; p)$ коллинеарны?

27. Вычислите длину вектора: 1) $\vec{a}=-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$; 2) $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$; 3) $\vec{c}=\vec{i}-\vec{k}$; 4) $\vec{d}=-3\vec{k}$.

28. Вычислите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}=(-1; 2; 1)$, $\vec{b}=(-2; 2; -1)$; 2) $\vec{a}=(1; -2; 3)$, $\vec{b}=(-1; 2; -3)$.

29. Вычислите длину вектора $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(2; 0; 0)$, $\vec{b}=(1; 1; -1)$.

30. Вычислите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5; 3; 1)$ и $B(4; 5; -1)$.

31. Найдите периметр треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $A(8; 0; 6)$, $B(8; -4; 6)$, $C(6; -2; 5)$.

32. Отрезок AB задан координатами своих концов $A(4; 2; -3)$ и $B(6; -4; -1)$. Найдите координаты точки C, делящей этот отрезок пополам.

33. Отрезок AB задан координатами своих концов $A(3; -2; -5)$ и $B(7; 6; -1)$. Найдите координаты точки C, делящей его в отношении $\lambda=AC:CB=1:3$.

34. Найдите точку пересечения медиан треугольника, если вершинами его служат точки $A(7; -4; 5)$, $B(-1; 8; -2)$ и $C(-12; -1; 6)$.

35. Найдите косинусы углов, которые образуют с базисными векторами следующие векторы: 1) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $\vec{b}=(4; 3; 0)$; 3) $\vec{c}=-\vec{j}-3\vec{k}$; 4) $\vec{d}=3\vec{i}$.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$, заданных своими координатами, находится по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{21.12}$$

Угол между векторами $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{21.13}$$

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{21.14}$$

36. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(4; -3; 1)$ и $\vec{b}=(5; -2; -3)$.

○ По формуле (21.12) находим $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot5+(-3)\cdot(-2)+1\cdot(-3)=23$. ●

37. Даны векторы $\vec{a}=-4\vec{i}-3\vec{j}+5k$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$. Найти угол между ними.

○ По формуле (21.13) получим

$$\cos\varphi=\frac{-4\cdot(-2)+(-3)\cdot3+5\cdot1}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+5^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{7}}{35};\quad \varphi=\arccos\frac{2\sqrt{7}}{35}. \;\bullet$$

38. Даны вершины треугольника $A(-1; 4; 1)$, $B(3; 4; -2)$, $C(5; 2; -1)$. Найти $\widehat{ABC}$.

○ Находим координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; имеем $\overrightarrow{BA}=(-4; 0; 3)$, $\overrightarrow{BC}=(2; -2; 1)$. Угол ABC равен углу между векторами BA и BC, поэтому

$$\cos(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC})=\frac{(-4)\cdot 2+0\cdot(-2)+3\cdot 1}{\sqrt{(-4)^2+0+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=-\frac{1}{3}.$$ ●

39. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\vec{a}=(3; -2; 1)$ и $\vec{b}=(4; -7; -3)$; 2) $\vec{c}=(2/3; -5/6; 1/4)$ и $\vec{d}=(3/2; 6/5; 4/3)$.

40. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$. Найдите скалярное произведение суммы двух первых векторов на третий.

41. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между векторами: 1) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$; 4) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; 5) $\overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

42. Найдите угол между векторами: 1) $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}-12\vec{k}$; 2) $\vec{a}=(-2; 2; -1)$ и $\vec{b}=(-6; 3; 6)$; 3) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=(1; -1; 2)$ и $\vec{b}=(0; 2; 1)$.

43. В треугольнике ABC, где $A(1; 1; 5)$, $B(-2; 0; 7)$, $C(-3; -2; 5)$, найдите $\widehat{ACB}$.

44. Проверьте, перпендикулярны ли векторы: 1) $\vec{a}=(3; 0, -6)$ и $\vec{b}=(4; 7; 2)$; 2) $\vec{c}=(-3; 2; 5)$ и $\vec{d}=(6; -3; 1)$.

45. Дан треугольник: $A(2; 4; 5)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(-1; 0; 3)$. Покажите, что $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{BC}$.

46. Даны векторы $\vec{a}=(-2; y; 1)$ и $\vec{b}=(3; -1; 2)$. Найдите координату y, если известно, что $\vec{a}\perp\vec{b}$.

§ 3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям (рис. 163):

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т. е.

$$|\vec{c}\,|=|\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cdot\sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\,); \qquad (21.15)$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

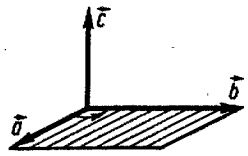


Рис. 163

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против часовой стрелки (т. е. векторы $\vec{a}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую упорядоченную тройку, или правый репер).

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\times\vec{b}$.

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма S, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение выражается формулой

$$\vec{a}\times\vec{b}=S\vec{e}, \qquad (21.16)$$

где $\vec{e}$ — орт направления $\vec{a}\times\vec{b}$.

Векторное произведение векторов $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$, заданных своими координатами, вычисляется следующим образом:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}. \qquad (21.17)$$

Физический смысл векторного произведения состоит в следующем. Если $\vec{F}$ — сила, а $\vec{r}$ — радиус-вектор точки ее приложения, имеющий начало в точке O, то момент силы $\vec{F}$ относительно точки O есть вектор, равный векторному произведению $\vec{r}$ на $\vec{F}$, т. е. $m_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$.

47. Найти векторные произведения: 1) $\vec{i}\times\vec{j}$; 2) $\vec{j}\times\vec{k}$; 3) $\vec{k}\times\vec{i}$; 4) $\vec{j}\times\vec{i}$; 5) $\vec{k}\times\vec{j}$; 6) $\vec{i}\times\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты правой системы координат.

○ 1) Вектор $\vec{i}\times\vec{j}$ коллинеарен $\vec{k}$ и является единичным, так как площадь параллелограмма (квадрата), построенного на векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$, равна единице. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют правую упорядоченную тройку, поэтому $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

Аналогично находим: 2) $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$; 3) $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$; 4) $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ ($\vec{j}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ образуют правую тройку); 5) $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$; 6) $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$. ●

48. Дано: $|\vec{a}\,|=4$, $|\vec{b}\,|=5$, $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\,)=30°$. Найти $\vec{a}\times\vec{b}$.

○ По формуле (21.15) находим модуль векторного произведения:

$$|\vec{a}\times\vec{b}\,|=|\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cdot\sin 30°=4\cdot 5\cdot(1/2)=10.$$

По формуле (21.16) имеем $\vec{a}\times\vec{b}=10\vec{e}$, где $\vec{e}$ — орт направления $\vec{a}\times\vec{b}$. ●

49. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

○ По формуле (21.17) получим

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$ ●

50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

○ Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. По формуле (21.17) находим

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Так как $|\vec{a}\times\vec{b}\,|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$, то искомая площадь $S=3$ (кв. ед.). ●

51. Даны сила $\vec{F}=(2; 3; -1)$ и точка ее приложения $A(-1; -1; 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые моментом с координатными осями.

○ Находим векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}=(-1;\ -1;\ 3)$ точки приложения силы на силу $\vec{F}=(2;\ 3;\ -1)$:

$$m_0(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-8\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}.$$

Находим модуль момента:

$$|m_0(\vec{F})|=\sqrt{(-8)^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{90}\approx 9{,}49.$$

Направляющие косинуса вектора $m_0(\vec{F})$ таковы: $\cos\alpha=-8/9{,}49\approx-0{,}843$; $\cos\beta=5/9{,}49\approx 0{,}527$; $\cos\gamma=-1/9{,}49\approx-0{,}105$. Углы, составляемые моментом силы с координатными осями, равны $\alpha=147°{,}5$; $\beta=58°{,}2$; $\gamma=96°$.

Контрольное вычисление: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(-0{,}843)^2+0{,}527^2+(-0{,}105)^2=1$. ●

52. Дано: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $(\vec{a};\widehat{\ }\vec{b})=\varphi$. Найдите $\vec{a}\times\vec{b}$, если: 1) $\varphi=0$; 2) $\varphi=90°$; 3) $\varphi=150°$.

53. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

54. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

55. Найдите площадь треугольника по координатам его вершин: $A(2;\ -3;\ 4)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$.

56. Даны силы $\vec{F}=(-2;\ -3;\ 2)$ и точка ее приложения $A(-1;\ 3;\ -1)$. Найдите момент силы относительно начала координат и углы, составляемые моментом с координатными осями.

§ 4. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

57. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(1;\ 4;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(2;\ 5;\ 1)$ и $D(3;\ 4;\ 3)$ — параллелограмм.

58. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $A(1;\ -3;\ 7)$ и $B(5;\ 7;\ -5)$.

59. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -3)$ и $D(3;\ -5;\ 3)$ — трапеция.

60. Вершинами треугольника служат точки $A(10;\ -2;\ 8)$, $B(8;\ 0;\ 7)$ и $C(10;\ 2;\ 8)$. Вычислите периметр треугольника.

61. Отрезок AB, концами которого служат точки $A(-6;\ 1;\ 12)$ и $B(9;\ 4;\ -9)$, разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.

62. Даны два вектора: $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. Вычислите координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

63. Вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ задан координатами своих концов: $A(-4;\ 1;\ 3)$, $B(2;\ -5;\ 6)$. Вычислите косинусы углов, которые вектор $\vec{a}$ образует с базисными векторами.

64. Даны векторы $\vec{a}=(2;\ 2;\ -1)$ и $\vec{b}=(-3;\ 6;\ -6)$. Вычислите косинус угла между ними.

65. На векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-\vec{j}+\vec{k}$ построен параллелограмм. Вычислите острый угол между его диагоналями.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ задан координатами своих концов: $A(2;\ 4;\ -3)$ и $B(6;\ -3;\ 1)$. Вычислите его длину и косинусы углов, которые образует вектор с базисными векторами.

2) Даны векторы $\vec{a}=(2;\ -4;\ 5)$ и $\vec{b}=(4;\ -3;\ 5)$. Вычислите косинус угла между ними.

3) Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

II вариант

1) Дан треугольник с вершинами $A(-2;\ -4;\ 0)$, $B(-2;\ -1;\ 4)$ и $C(-2;\ 3;\ 1)$. Вычислите его внутренний угол при вершине A.

2) Даны три вектора: $\vec{a}=12\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$. Вычислите проекцию вектора $\vec{b}+\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$.

3) Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

Глава 22
УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПЛОСКОСТЬ

1. Уравнения плоскости. Пусть P — плоскость, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка, принадлежащая этой плоскости (рис. 164), а $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$ — ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости P (он называется *нормальным вектором плоскости*). Если $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка на плоскости P, отличная от M_0, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}=(A;\ B\ C)$, т. е. скалярное произведение этих векторов равно нулю: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, или

$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_0)=0. \qquad (22.1)$$

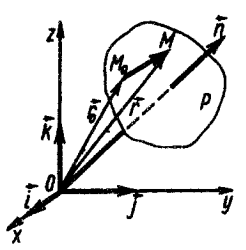


Рис. 164

Уравнение (22.1) называется *уравнением плоскости в векторной форме*. Если его записать в координатной форме, то получится уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (22.2)$$

которое называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку в заданном направлении*.

Уравнение (22.2) можно переписать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (22.3)$$

где $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Уравнение (22.3) называется *общим уравнением плоскости*. Заметим, что так как нормальный вектор $\vec{n}$ — ненулевой, то коэффициенты A, B и C общего уравнения плоскости одновременно не равны нулю.

2. Угол между двумя плоскостями. Угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Пусть две пересекающиеся плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2y+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеют нормаль-

ные векторы $\vec{n}_1=(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2; B_2; C_2)$. Тогда угол между этими плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (22.4)$$

3. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Для того чтобы две плоскости были параллельны, их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ должны быть коллинеарны, т. е. $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$, где $\lambda\neq 0$. Если ни одна из координат векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не равна нулю, то из последнего равенства следует, что

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2, \qquad (22.5)$$

т. е. коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны.

Для того чтобы плоскости были перпендикулярны, их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ также должны быть перпендикулярны, т. е. их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$. Отсюда следует, что

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (22.6)$$

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 $(-3; 0; 2)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(2; 3; 5)$.

○ Здесь $A=2$, $B=3$, $C=5$. Подставив в уравнение (22.2) значения коэффициентов A, B, C и координаты точки M, получим

$$2(x+3)+3(y-0)+5(z-2)=0 \text{ или } 2x+3y+5z-4=0. \bullet$$

2. Состаиить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку M_0 $(2; -1; 3)$.

○ Уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox, имеет вид $Ax+D=0$. Подставив в это уравнение координаты точки M_0, находим $D=-2A$. Подставив теперь значение D в уравнение $Ax+D=0$, получим $Ax-2A=0$, т. е. $x-2=0$. ●

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку M $(3; 2; 4)$.

○ Уравнение искомой плоскости имеет вид $By+Cz=0$. Подставив в это уравнение координаты точки M, получим $2B+4C=0$, т. е. $B=-2C$. Подставив теперь значение B в уравнение $By+Cz=0$, находим $-2Cy+Cz=0$, т. е. $2y-z=0$. ●

4. Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки M_1 $(3; -1; 2)$ и M_2 $(-2; 3; 4)$.

○ Так как искомая плоскость параллельна оси Oz и проходит через точки M_1 $(3; -1; 2)$ и M_2 $(-2; 3; 4)$, то в качестве ее нормального вектора $\vec{n}=(A; B; C)$ можно взять вектор, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{M_1M_2}=(-5; 4; 2)$ и $\vec{n}_1=(0; 0; 1)$ (единичному вектору оси Oz). С другой стороны, известно, что векторное произведение двух векторов есть вектор, перпендикулярный векторам-сомножителям; поэтому за $\vec{n}$ можно принять векторное произведение $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{n}_1$. Следовательно,

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&4&2\\0&0&1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}4&2\\0&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5&2\\0&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5&4\\0&0\end{vmatrix}=4\vec{i}+5\vec{j}.$$

Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку M_1 $(3; -1; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(4; 5; 0)$. Имеем

$$4(x-3)+5(y+1)=0, \text{ или } 4x+5y-7=0. \bullet$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 $(2; -1; 3)$ и параллельной векторам $\vec{a}$ $(3; 0; -1)$ и $\vec{b}$ $(-3; 2; 2)$.

○ Очевидно, что в качестве нормального вектора $\vec{n}=(A; B; C)$ искомой плоскости можно взять векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$:

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&0&-1\\-3&2&2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0&-1\\2&2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3&-1\\-3&2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3&0\\-3&2\end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}.$$

Используя теперь уравнение (22.2) при $A=2$, $B=-3$, $C=6$, $x_0=2$, $y_0=-1$, $z_0=3$, получим

$$2(x-2)-3(y+1)+6(z-3)=0, \text{ или } 2x-3y+6z-25=0. \bullet$$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M $(-2; 3; 4)$ и параллельной плоскости $x+2y-3z+4=0$.

○ Поскольку искомая плоскость параллельна плоскости $x+2y-3z+4=0$, в качестве ее нормального вектора можно взять нормальный вектор $\vec{n}=(1; 2; -3)$ данной плоскости. Используя теперь уравнение плоскости, проходящей через данную точку в заданном направлении, получим

$$(x+2)+2(y-3)-3(z-4)=0, \text{ или } x+2y-3z+8=0. \bullet$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 $(-2; -3; 1)$ и M_2 $(1; 4; -2)$ и перпендикулярной плоскости $2x+3y-z+4=0$.

○ За нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости примем векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}=(3; 7; -3)$ и $\vec{n}_1=(2; 3; -1)$ (ср. с решением задач 4 и 5). Таким образом,

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&7&-3\\2&3&-1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}7&-3\\3&-1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3&-3\\2&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3&7\\2&3\end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}.$$

Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку M_1 $(-2; -3; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2; -3; -5)$:

$$2(x+2)-3(y+3)-5(z-1)=0, \text{ или } 2x-3y-5z=0.$$

Заметим, что при составлении уравнения искомой плоскости вместо точки M_1 можно было взять точку M_2. ●

8. Найти угол между плоскостями $2x-3y+4z-1=0$ и $3x-4y-z+3=0$.

○ Для вычисления угла φ между плоскостями воспользуемся формулой (22.4). Имеем $A_1=2$, $B_1=-3$, $C_1=4$ и $A_2=3$, $B_2=-4$, $C_2=-1$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{|2\cdot 3+(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{29\cdot 26}}=0{,}51;\ \varphi=59°{,}3. \bullet$$

9. Найти расстояние от точки A $(2; 3; 4)$ до плоскости $4x+3y+12z-5=0$.

○ Пусть AB — расстояние от точки A до данной плоскости. Вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\vec{n}=(4; 3; 12)$, поэтому $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n}$. Обозначив координаты точки B через x_1, y_1, z_1, найдем $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_1-2; y_1-3; z_1-4)$.

Из равенства $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n}$ следует, что $x_1-2=4\lambda$, $y_1-3=3\lambda$, $z_1-4=12\lambda$. Используя формулу расстояния между двумя точками, имеем

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(4\lambda)^2+(3\lambda)^2+(12\lambda)^2}=13|\lambda|.$$

Так как координаты точки $B(x_1; y_1; z_1)$ удовлетворяют уравнению плоскости, то

$$4(2+4\lambda)+3(3+3\lambda)+12(4+12\lambda)-5=0, \text{ т. е. } \lambda=-60/169.$$

Следовательно, $AB=13\cdot|-60/169|=60/13$. ●

10. Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x-3y+6z+28=0$ и $2x-3y+6z-14=0$.

○ Для нахождения искомого расстояния нужно взять точку на одной из плоскостей и определить расстояние от этой точки до другой плоскости. Полагая в уравнении первой из заданных плоскостей $y=0$, $z=0$, имеем $2x+28=0$, т. е. $x=-14$; итак, получили точку $M(-14; 0; 0)$.

Теперь, так же как и в задаче 9, находим расстояние от данной точки $M(-14; 0; 0)$ до данной плоскости $2x-3y+6z-14=0$. Это расстояние равно 6 (убедитесь в этом самостоятельно). ●

11. Даны точки $A(3; -2; -1)$, $B(0; 0; 2)$, $C(-3; 1; 0)$, $D(-4; -2; 2{,}5)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x-3y+4z-8=0$.

12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; 5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(-1; -3; 2)$.

13. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; -1)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(3; 4; 1)$ и $M_2(1; -2; -3)$.

14. Даны точки $A(3; -2; 4)$ и $B(1; 4; 2)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$.

15. Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oz и проходящей через точку $M_0(-2; -3; -1)$.

16. Составьте уравнение плоскости: 1) параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $M_0(2; -2; 3)$; 2) параллельной плоскости xOz и проходящей через точку $M_0(-3; -2; -4)$.

17. Составьте уравнение плоскости: 1) проходящей через ось Oz и точку $M(1; 1; 1)$; 2) проходящей через ось Oy и точку $M(-2; -3; -4)$.

18. Составьте уравнение плоскости: 1) параллельной оси Oy и проходящей через точки $M_1(1; -2; -1)$ и $M_2(3; 2; -4)$; 2) параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(-4; 2; 5)$ и $M_2(-5; -1; 3)$.

19. Составьте уравнение плоскости: 1) проходящей через точку $M_0(-4; -3; 1)$ и параллельной векторам $\vec{a}=(5; 2; -3)$ и $\vec{b}=(1; 4; -2)$; 2) проходящей через точку $M(-1; -2; 3)$ и параллельной плоскости $2x-3y+z-1=0$.

20. Составьте уравнение плоскости: 1) проходящей через точки $A(1; -4; -3)$ и $B(4; -2; -1)$ и перпендикулярной плоскости $x-y-3z+7=0$; 2) проходящей через точки $M_1(2; -1; -3)$ и $M_2(-3; 4; 1)$ и перпендикулярной плоскости $x-y-3z+2=0$.

21. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x+2y-2z+4=0$ и $x-2y+z-4=0$.

22. Найдите угол между плоскостями $x-y+z+1=0$ и $2x+3y-z-3=0$.

23. Найдите расстояние: 1) от точки $A(1; -2; 1)$ до плоскости $10x-2y+11z-10=0$; 2) от точки $A(2; 3; -2)$ до плоскости $6x-7y-6z-124=0$.

24. Найдите расстояние между параллельными плоскостями $x-y+2z-4=0$ и $x-y+2z+10=0$.

§ 2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{q}=(m; n; p)$, имеет вид

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{q} \qquad (22.7)$$

и называется *векторно-параметрическим уравнением прямой*. Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор любой точки $M(x; y; z)$ прямой (рис. 165); $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, а t — параметр, принимающий всевозможные действительные значения. Вектор $\vec{q}$ называется *направляющим вектором прямой*, а его координаты (т. е. числа m, n, p) — *направляющими коэффициентами прямой*.

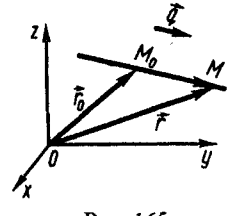


Рис. 165

Если в уравнении (22.7) перейти к координатам векторов, то получаются *параметрические уравнения прямой*:

$$x=x_0+tm, \quad y=y_0+nt, \quad z=z_0+pt. \qquad (22.8)$$

Если исключить из уравнений (22.8) параметр t, то получаются *канонические уравнения прямой*:

$$(x-x_0)/m=(y-y_0)/n=(z-z_0)/p. \qquad (22.9)$$

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)=(z-z_1)/(z_2-z_1). \qquad (22.10)$$

Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, т. е. прямая определяется совместным заданием системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{22.11}$$

Уравнения (22.11) называются *общими уравнениями прямой.*

2. Направляющие косинусы прямой. Направляющие косинусы вектора $\vec{q}=(m;\ n;\ p)$ называются *направляющими косинусами прямой.* Так как за направляющий вектор прямой можно взять и вектор $-\vec{q}=(-m;\ -n;\ -p)$, то прямая имеет две тройки направляющих косинусов:

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{22.12}$$

3. Условии параллельности и перпендикулириости двух прямых в пространстве. Угол между двуми прямыми. Пусть заданы две прямые $(x-x_1)/m_1=(y-y_1)/n_1=(z-z_1)/p_1$ и $(x-x_2)/m_2=(y-y_2)/n_2=(z-z_2)/p_2$. Тогда условие параллельиости этих прямых записывается в виде

$$m_1/m_2=n_1/n_2=p_1/p_2, \tag{22.13}$$

условие перпеидикулярности — в виде

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0, \tag{22.14}$$

а угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{22.15}$$

25. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (2; 1; 3) и параллельной вектору $\vec{q}=(4;\ -5;\ -6)$.

○ Используя равенства (22.9), найдем канонические уравнения прямой:

$$(x-2)/4=(y-1)/(-5)=(z-3)/(-6).$$

Если эти уравнения записать в виде системы, то получим общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} (x-2)/4=(y-1)/(-5), \\ (y-1)/5=(z-3)/6, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x+4y-14=0, \\ 6y-5z+9=0. \end{cases} \bullet$$

26. Составить уравнения прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку M (1; 1; 1).

○ Направляющий вектор $\vec{q}$ прямой коллинеарен оси Ox; следовательно, его проекции на оси Oy и Oz равны нулю. Вектор $\vec{q}$ может иметь любое из двух возможных направлеиий и любую длину. Примем $|\vec{q}|=1$ и выберем направление, совпадающее с положительным направлением оси Ox; тогда $\vec{q}=(1;\ 0;\ 0)$. Составим каионические уравнения прямой: $(x-1)/1=(y-1)/0=(z-1)/0$. Общие уравнения прямой имеют вид $\begin{cases} y-1=0, \\ z-1=0. \end{cases}$ ●

27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A (−1; 2; 1) и параллельной прямой $(x-3)/2=(y-2)/3=(z+2)/1$.

○ Так как искомая прямая параллельна данной, то за ее направляющий вектор можно принять иаправляющий вектор $\vec{q}=(2;\ 3;\ 1)$ данной прямой. Используя теперь равенства (22.9), получаем канонические уравнения искомой прямой: $(x+1)/2=(y-2)/3=(z-1)/1$. ●

28. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и точку A (2; −3; −2).

○ За направляющий вектор примем вектор $\vec{q}=(2;\ -3;\ -2)$. Используя формулы (22.8), получим $x=2+2t$, $y=-3-3t$, $z=-2-2t$. ●

29. Составить уравнения прямой, проходящей через точки A (1; −2; −1) и B (3; 0; 4).

○ По формулам (22.10) получим

$(x-1)/(3-1)=(y+2)/(0+2)=(z+1)/(4+1)$, или $(x-1)/2=(y+2)/2=(z+1)/5$. ●

30. Вычислить углы, образуемые прямой $(x-2)/3=(y+3)/2=(z-1)/6$ с координатными осями.

○ По формулам (22.12) получим:

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{3}{7},\quad \cos\beta=\pm\frac{2}{7},\quad \cos\gamma=\pm\frac{6}{7}.$$ ●

31. Вычислить острый угол между двумя прямыми $(x-3)/2=(y-1)/1=(z+4)/2$ и $(x+1)/12=(y+3)/3=(z-2)/4$.

○ Полагая в равенстве (22.15) $m_1=2$, $n_1=1$, $p_1=2$ и $m_2=12$, $n_2=3$, $p_2=4$, находим

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot12+1\cdot3+2\cdot4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=0{,}897;\quad \varphi=26°{,}2.$$ ●

32. Составьте уравнения прямой: 1) проходящей через точку M_0 (3; 0; −2) и параллельной вектору $\vec{q}=(2;\ 1;\ 1)$; 2) проходящей через точку M_0 (1; 0; −2) и параллельной вектору $\vec{q}=(2;\ 1;\ 0)$.

33. Составьте уравнения прямой, параллельной оси Oz и проходящей через точку M (2; −1; 3).

34. Как расположена прямая относительно координатных осей, если она имеет направляющий вектор: а) $\vec{q}=(0;\ 0;\ 1)$; б) $\vec{q}=(0;\ 1;\ 0)$; в) $\vec{q}=(1;\ 0;\ 0)$?

35. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку A (2; −3; −1) и параллельной прямой $(x-4)/4=(y+1)/3=(z+3)/2$.

36. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку M (1; 4; −3).

37. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки A (−2; −1; −3) и B (0; 2; 1).

38. Вычислите углы, образуемые прямой $(x-1)/4=(y-4)/3=(z+2)/12$ с координатными осями.

39. Докажите, что прямые $(x-1)/(-2)=(y+2)/3=z/(-4)$ и $(x+2)/5=(y-1)/6=(z-5)/2$ взаимно перпендикулярны.

40. Вычислите острый угол между двумя прямыми $(x-1)/3=(y+4)/(-2)=(z-2)/4$ и $(x+3)/2=(y-1)/3=(z+1)/(-2)$.

§ 3. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

Угол φ между прямой

$$(x-a)/m=(y-b)/n=(z-c)/p \qquad (*)$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (**)$$

вычисляется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (22.16)$$

Условие параллельности прямой (*) и плоскости (**) записывается в виде

$$Am+Bn+Cp=0, \qquad (22.17)$$

а условие перпендикулярности — в виде

$$A/m=B/n=C/p. \qquad (22.18)$$

Условия, при которых прямая (*) принадлежит плоскости (**), имеют вид

$$\begin{cases} Aa+Bb+Cc+D=0, \\ Am+Bn+Cp=0. \end{cases} \qquad (22.19)$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

имеет вид

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (22.20)$$

где λ — любое действительное число.

41. Вычислить угол между прямой $(x-2)/3=(y+1)/4=(z-3)/2$ и плоскостью $x+2y-3z+4=0$.

○ Воспользуемся формулой (22.16). Так как $A=1$, $B=2$, $C=-3$, $m=3$, $n=4$, $p=2$, то

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot3+2\cdot4+(-3)\cdot2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=0{,}248; \quad \varphi=14°{,}4. \bullet$$

42. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;\ 2;\ -3)$ перпендикулярно прямой $(x+2)/4=(y-1)/3=(z+3)/2$.

○ Очевидно, что в качестве нормального вектора $\vec{n}$ искомой плоскости можно взять параллельный ему направляющий вектор $\vec{q}=(4;\ 3;\ 2)$ даиной прямой. Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через даниую точку M перпендикулярно вектору $\vec{q}$:

$$4(x+1)+3(y-2)+2(z+3)=0, \quad \text{или} \quad 4x+3y+2z+4=0. \bullet$$

43. Через точку $M(1;\ 3;\ 2)$ провести прямую, перпендикулярную плоскости $x-2y+2z-3=0$. Вычислить направляющие косинусы этой прямой.

○ Примем за направляющий вектор искомой прямой параллельный ему нормальный вектор $\vec{n}=(1;\ -2;\ 2)$ данной плоскости. Зная точку $M(1;\ 3;\ 2)$, чёрез которую проходит прямая, и направляющий вектор этой прямой, запишем ее канонические уравнения: $(x-1)/1=(y-3)/(-2)=(z-2)/2$. Направляющие косинусы прямой находим по формулам (22.12):

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\pm\frac{1}{3}, \quad \cos\beta=\pm\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma=\pm\frac{2}{3}. \bullet$$

44. Найти точку пересечения прямой $(x-2)/4=(y-3)/2=(z+1)/5$ с плоскостью $x+2y-3z-4=0$.

○ Запишем уравнения прямой в параметрической форме. Полагая $(x-2)/4=(y-3)/2=(z+1)/5=t$, получим: $x=2+4t$; $y=3+2t$; $z=-1+5t$. Подставив найденные значения x, y, z в уравнение плоскости, имеем

$$2+4t+2(3+2t)-3(-1+5t)-4=0,$$

откуда $t=1$. Подставим значение $t=1$ в параметрические уравнения прямой; тогда получим: $x=6$, $y=5$, $z=4$. Итак, $(6;\ 5;\ 4)$ — искомая точка пересечения прямой и плоскости. ●

45. Убедиться в том, что прямая $(x-2)/4=(y+4)/3=(z-1)/(-2)$ параллельна плоскости $5x-2y+7z+3=0$.

○ Используя условие (22.17) параллельности прямой и плоскости, получим $5\cdot4+(-2)\cdot3+7\cdot(-2)=0$, т. е. прямая и плоскость параллельны. ●

46. Проверить, что прямая $(x-3)/4=(y-1)/2=(z+2)/3$ лежит в плоскости $2x-y-2z-9=0$.

○ Используя условия (22.19) при $a=3$, $b=1$, $c=-2$, $m=4$, $n=2$, $p=3$, $A=2$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-9$, находим

$$2\cdot3+(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-2)-9=0; \quad 2\cdot4+(-1)\cdot2+(-2)\cdot3=0.$$

Следовательно, прямая лежит в плоскости. ●

47. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x+y-3z+4=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$$

и точку $M(2;\ 1;\ -1)$.

○ Используя равеиство (22.20), запишем уравнеиие пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$2x+y-3z+4+\lambda(x-y+z+3)=0. \qquad (*)$$

Так как координаты точки M должиы удовлетворять уравнению плоскости, то, подставив в соотношение (*) $x=2$, $y=1$, $z=-1$, имеем

$$2\cdot2+1-3(-1)+4+\lambda(2-1-1+3)=0, \quad \text{или} \quad 12+3\lambda=0,$$

откуда $\lambda=-4$. Подставляя теперь в соотношение (*) найденное значение λ, получим $2x-5y+7z+8=0$. ●

48. Вычислите угол между прямой $(x+4)/3=(y-1)/2=(z-3)/4$ и плоскостью $2x-3y-2z+5=0$.

49. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ -1;\ -4)$ перпендикулярно прямой $(x-3)/2=(y+2)/4=(z+5)/3$.

50. Через точку (1; 2; 4) проведена прямая, перпендикулярная плоскости $2x+3y+z-4=0$. Вычислите направляющие косинусы этой прямой.

51. Составьте уравнение перпендикуляра к плоскости $4x-5y-z-3=0$, проходящего через точку $M(-1; 1; -2)$.

52. Найдите точку пересечения прямой $(x+3)/2=(y-1)/3=(z+5)/2$ с плоскостью $2x+3y+z-22=0$.

53. Составьте уравнения перпендикуляра к плоскости $x-3y+2z-26=0$, проходящего через точку $(-2; 2; -4)$. Найдите координаты основания этого перпендикуляра.

54. Проверьте, что прямая $(x-1)/(-2)=(y-4)/(-3)=(z+1)/3$ параллельна плоскости $3x-5y-3z-4=0$.

55. Проверьте, что прямая $(x-1)/2=(y+3)/(-1)=(z-4)/5$ лежит в плоскости $3x-4y-2z-7=0$.

56. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x-4y+5z+5=0, \\ 2x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

и точку $M(3; 2; 1)$.

§ 4. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

57. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2; 2; -3)$ параллельно вектору $\vec{q}=(2; -4; 5)$.

58. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$, если направляющий вектор $\vec{q}$ прямой образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы $\alpha=2\pi/3$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=\pi/4$.

59. Вычислите угол между прямыми $(x-3)/1=(y+2)/(-1)=z/\sqrt{2}$ и $(x+2)/1=(y-3)/1=(z+5)/\sqrt{2}$.

60. Составьте уравнения плоскости, проходящей через ось Oz и точку $A(1; -2; 1)$.

61. Составьте уравнение плоскости, если точка $M(2; -1; 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат.

62. Найдите проекцию точки $M(5; 2; -1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

63. Вычислите угол между прямой $(x-1)/4=y/12=(z-1)/(-3)$ и плоскостью $6x-3y-2z=0$.

64. Найдите точку пересечения прямой $(x-12)/4=(y-9)/3=(z-1)/1$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2; -3; 4)$ параллельно вектору $q=(-1; 4; -2)$.

2) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 1)$ и $B(0; 3; 4)$ и перпендикулярной плоскости $x+2y-z=0$.

3) Вычислите угол между прямой $(x-5)/2=(y+1)/(-2)=z/(-1)$ и плоскостью $2x+y-2z+5=0$.

II вариант

1) Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1; 3; -5)$ и $B(4; -1; 2)$.

2) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 1; 2)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

3) Найдите точку пересечения прямой $(x-1)/3=(y+2)/4=(z-3)/(-2)$ и плоскости $2x-y+3z-1=0$.

Глава 23

МНОГОГРАННИКИ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. ПРИЗМА

1. Какое число граней, вершин, ребер и боковых ребер имеют треугольная, четырехугольная и шестиугольная призмы?

2. Сколько плоских, двугранных и трехгранных углов имеют треугольная, четырехугольная, шестиугольная и n-угольная призмы?

3. Сколько диагоналей имеют треугольная, четырехугольная, шестиугольная и n-угольная призмы?

4. 1) Сколько диагональных сечений можно провести через одно боковое ребро в треугольной, четырехугольной, шестиугольной и n-угольной призме?

2) Сколько диагональных сечений можно провести через все боковые ребра в четырехугольной, шестиугольной и n-угольной призме?

5. Чему равна сумма всех плоских углов треугольной, четырехугольной, шестиугольной и n-угольной призмы?

6. Докажите, что сечение, перпендикулярное боковому ребру призмы, перпендикулярно каждой ее боковой грани.

7. Докажите, что число ребер призмы кратно трем.

8. Чему равна сумма всех двугранных углов, образованных боковыми гранями прямых призм: треугольной, четырехугольной, шестиугольной, n-угольной?

9. Докажите, что углы наклона всех боковых ребер призмы к плоскости ее основания равны.

10. Докажите, что в наклонной треугольной призме расстояние от бокового ребра до противоположной грани равно высоте треугольника, который служит перпендикулярным сечением призмы.

11. В правильной шестиугольной призме сторона основания равна m, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади диагональных сечений.

12. В правильной треугольной призме каждое ребро равно a. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Вычислите площадь сечения.

13. В правильной четырехугольной призме диагональ основания равна m, а диагональ боковой грани равна n. Вычислите диагональ призмы.

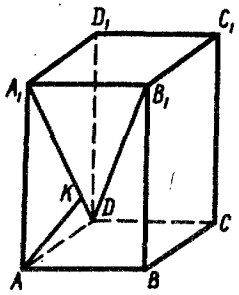


Рис. 166

14. Дана правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна a и высота h. Вычислить кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей ее диагонали призмы.

○ Прямые AB и DB_1 — скрещивающиеся. Ортогональная проекция двух скрещивающихся прямых на плоскость, перпендикулярную одной из них, изображается прямой и точкой. Расстояние между этой прямой и точкой равно расстоянию между скрещивающимися прямыми (рис. 166).

Спроецировав прямые AB и DB_1 на грань AA_1D_1D, получим точку $A=\text{пр}_{AA_1D_1D}AB$ и $A_1D=\text{пр}_{AA_1D_1D}DB_1$. Расстояние между AB и DB_1 равно расстоянию от точки A до A_1D, т. е. высоте AK прямоугольного треугольника AA_1D:

$$AK=\frac{AD\cdot AA_1}{A_1D}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}\ \bullet$$

15. В правильной четырехугольной призме диагональ наклонена к боковой грани под углом 30°. Вычислите угол наклона ее к основанию.

16. В правильной треугольной призме сторона основания равна 12 см, а боковое ребро равно $10\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противоположной грани.

17. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 13, 20 и 21 см, а высота призмы равна 25 см. Вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

18. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы и высота соответственно равны 8, 5 и 2 см. Вычислите сторону основания призмы.

19. Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с измерениями: 1) 12, 16, 21; 2) 2, 4, 6.

20. Вычислите диагонали прямого параллелепипеда, каждое ребро которого равно a, а угол в основании равен 60°.

21. В прямом параллелепипеде все диагонали равны. Докажите, что данный параллелепипед является прямоугольным.

22. Найдите зависимость между ребром куба a и его диагональю d.

23. Найдите зависимость между диагональю куба d и диагональю его грани d_1.

24. Вычислите угол между диагональю куба и его основанием.

25. Вычислите острый угол между диагоналями куба.

26. Какой длины нужно взять проволоку для изготовления каркаса куба со всеми его диагоналями, если ребро куба равно 10 см?

27. Ребро куба равно a. Найдите кратчайшее расстояние от диагонали до не пересекающего ее ребра.

28. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали.

29. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если диагонали его граней соответственно равны 11, 19 и 20.

30. В прямом параллелепипеде диагонали образуют с плоскостью основания углы 45 и 60°. Стороны основания равны 17 и 31 см. Вычислите диагонали этого параллелепипеда.

31. Вычислите площади диагональных сечений прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h.

32. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и углом 60°. Вычислите площади его диагональных сечений.

33. Можно ли куб пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник: 1) разносторонний; 2) равнобедренный; 3) равносторонний; 4) прямоугольный?

34. Ребро куба равно a. Вычислите площадь диагонального сечения.

35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середины трех его ребер A_1B_1, A_1D_1 и CD проведена плоскость. Докажите, что в сечении получится правильный шестиугольник. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a.

36. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проведенной через середины трех ребер, выходящих из одной вершины.

37. Вычислите периметр и площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из вершины куба. Ребро куба равно a.

38. В треугольной наклонной призме расстояния между боковыми ребрами равны 20, 34 и 42 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противоположным ей боковым ребром.

39. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$, в котором $\hat{BAD}=60°$; боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° и плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что площади сечений BB_1D_1D и AA_1C_1C относятся, как 2:3.

40. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной a, одна из вершин другого основания проецируется в центр этого квадрата; высота параллелепипеда равна H. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

41. В основании наклонного параллелепипеда лежит ромб. Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания равные углы. Докажите, что вершина параллелепипеда, лежащая на этом ребре, проецируется на плоскость основания в точку, которая лежит на диагонали основания.

§ 2. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикуляриого сечения призмы на длину ее бокового ребра:

$$S_{\text{бок. пр}}=Pl. \qquad (23.1)$$

42. Поверхность куба равна S. Найдите его ребро.

43. Вычислите площадь поверхности куба: 1) по его диагонали l; 2) по площади Q его диагонального сечения.

44. Площади полных поверхностей двух кубов равны S и Q. В каком отношении находятся ребра этих кубов?

45. Вычислите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна h, площадь основания S и площадь диагонального сечения Q.

46. В прямоугольном параллелепипеде измерения относятся, как 3 : 6 : 22, а его диагональ равна 23 см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

47. Докажите, что прямоугольный параллелепипед, у которого площадь боковой поверхности составляет 2/3 площади его полной поверхности, есть куб.

48. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8 см, а площадь диагонального сечения 180 см^2. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

49. В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 12 см, площадь диагонального сечения 312 см^2 и площадь основания 240 см^2. Вычислите стороны основания.

50. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 8 см и образуют угол 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 49 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

51. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями 12 и 16 см; диагональ боковой грани равна 26 см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

52. Диагонали прямого параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы 30 и 45°, а стороны оснований равны 6 и 8 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

53. По стороне основания a и боковому ребру l вычислите площадь полной поверхности правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

54. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 13 см, площадь боковой поверхности равна 180 см^2. Вычислите площадь основания призмы.

55. В правильной четырехугольной призме диагональ равна l и составляет с боковой гранью угол α. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

56. В правильной шестиугольной призме диагонали равны 17 и 15 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

57. Площадь наибольшего сечения правильной шестиугольной призмы равна S. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

58. Основанием прямой призмы служит трапеция $ABCD$, у которой параллельные стороны BC и AD равны 26 и 40 см, а непараллельные стороны AB и CD равны 15 и 13 см. Площадь сечения AA_1C_1C равна 370 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

59. Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы равны 10 и $6\sqrt{2}$ см, а высота равна 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

60. В прямой треугольной призме стороны основания относятся, как 17 : 15 : 8, а боковое ребро равно 20 см. Площадь полной поверхности этой призмы равна 2080 см^2. Найдите площадь ее боковой поверхности.

61. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 26 см, а основания равны 22 и 42 см; площадь ее диагонального сечения составляет 400 см^2. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

62. В прямой треугольной призме стороны основания равны 34, 50 и 52 см. Площадь сечения, проведенного через боковое ребро и бóльшую высоту основания, равна 480 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

63. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a; боковое ребро равно b; одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы в 45°. Вычислите площадь боковой поверхности этой призмы.

64. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 10, 10 и 12 см, а боковое ребро равно 15 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

65. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро равно c и образует со сторонами основания углы в 60°. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

§ 3. ПИРАМИДА. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

66. По стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

67. По стороне основания a и высоте h найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

68. По стороне основания a и высоте h найдите боковое ребро правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

69. Докажите, что непересекающиеся ребра правильной треугольной пирамиды (тетраэдра) взаимно перпендикулярны.

70. В правильной шестиугольной пирамиде двугранный угол при стороне основания равен 60°, сторона основания равна a. Найдите высоту и апофему пирамиды.

71. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно m и образует с плоскостью основания угол α. Вычислите сторону основания пирамиды.

72. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h; боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

73. В правильной четырехугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром равен α; сторона основания пирамиды равна a. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

74. В правильной треугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром равен α; сторона основания пирамиды равна a. Вычислите высоту пирамиды.

75. По стороне основания a и боковому ребру m правильной треугольной пирамиды вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

76. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно m и наклонено к плоскости основания под углом α. Через середины ребер AB и BC проведена плоскость параллельно ребру SB. Вычислите площадь полученного сечения.

77. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α.

78. Найдите площадь сечения, проведенного в правильной четырехугольной пирамиде через диагональ основания параллельно боковому ребру. Сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

79. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен φ. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

80. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 9 см, боковое ребро равно 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных боковых ребер перпендикулярно основанию пирамиды.

81. Докажите, что если у пирамиды боковые ребра (или углы наклона боковых ребер к плоскости основания) равны, то вершина пирамиды проецируется в центр круга, описанного около основания.

82. Докажите, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна плоскости боковой грани.

83. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 60°.

84. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 12 и 16 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 26 см. Найдите высоту пирамиды.

85. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 20, 21 и 29 см. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найдите высоту пирамиды.

86. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Две боковые грани, проходящие через один из катетов и гипотенузу треугольника, перпендикулярны плоскости основания. Докажите, что все боковые грани этой пирамиды являются прямоугольными треугольниками.

87. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 3 и 7 см, а одна из диагоналей равна 6 см. Высота пирамиды равна 4 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

88. Основание пирамиды — ромб, у которого сторона и одна из диагоналей равны 4 см. Высота пирамиды равна большей диагонали основания и проходит через вершину острого угла ромба. Вычислите площадь сечения, проходящего через меньшую диагональ основания перпендикулярно большему боковому ребру пирамиды.

89. Три последовательных угла основания четырехугольной пирамиды относятся, как 2 : 3 : 4; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите плоские углы в основании.

90. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона равна 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Вычислите высоту этой пирамиды.

91. Через середину высоты пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Найдите площадь сечения, если площадь основания равна S.

92. В каком отношении сечение, параллельное основанию, делит высоту пирамиды, если площадь сечения равна: 1) 1/2 площади основания; 2) 1/4 площади основания; 3) m/n площади основания?

93. Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Вычислите площади полученных сечений.

94. Высота пирамиды 36 см; площадь основания 400 см^2. На каком расстоянии от основания находится сечение с площадью 100 см^2, параллельное основанию?

95. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 2 : 5 (считая от вершины пирамиды); площадь сечения меньше площади основания пирамиды на 189 см^2. Найдите площадь сечения.

96. Вычислите высоту правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b, а боковое ребро равно c.

97. Сколько диагоналей можно провести в усеченной n-угольной пирамиде?

98. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны большего и меньшего оснований равны a и b, а боковое ребро образует с основанием угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

99. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 10 и 2 дм, а высота ее 2 дм. Найдите боковое ребро пирамиды.

100. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 36 см, апофема равна 45 см, а стороны оснований относятся, как 1 : 4. Найдите эти стороны.

101. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 7 см, а стороны оснований равны 3 и 5 см. Найдите диагональ этой усеченной пирамиды.

102. Докажите, что если B_1 и B_2 — площади оснований усеченной пирамиды и M — площадь ее среднего сечения, то $\sqrt{M}=0{,}5\times$ $\times(\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2})$.

103. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b $(a>b)$, а боковое ребро образует с основанием угол 45°. Вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту основания.

§ 4. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ И УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания пирамиды на ее апофему:

$$S_{\text{бок. пир}}=\frac{1}{2}Ph_{\text{бок}}. \qquad (23.2)$$

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна полусумме периметров ее оснований, умноженной на апофему:

$$S_{\text{бок. ус. пир}}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)h_{\text{бок}}. \qquad (23.3)$$

104. По стороне основания a и высоте h вычислите площадь полной поверхности правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

105. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 9 см, а апофема равна 18 см.

106. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна 240 $см^2$, а площадь полной поверхности равна 384 $см^2$. Вычислите сторону основания и высоту пирамиды.

107. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 30°. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

108. По стороне основания a вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь диагонального сечения равновелика площади основания.

109. Вычислите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды по ее высоте h и площади боковой поверхности M.

110. В правильной треугольной пирамиде апофема, равная 6 см, составляет с плоскостью основания угол 60°. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

111. Площади основания и диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равны S кв. ед. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

112. Центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания служит вершинами вписанной в этот куб пирамиды. Вычислите площадь ее боковой поверхности, если ребро куба равно a.

113. В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна 15 см, а высота равна 12 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

114. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды по ребру b и высоте h.

115. В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна k, а апофема основания равна r. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

116. Основание пирамиды — квадрат со стороной 16 см, а две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна 12 см.

117. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4 см. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

118. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 и 8 м. Высота пирамиды равна 1 м. Вычислите площадь полной поверхности этой пирамиды, если все двугранные углы при основании равны.

119. Основание пирамиды — треугольник со сторонами, равными 6, 10 и 14 см. Плоскости боковых граней наклонены к основанию под углом 60°. Вычислите полную поверхность пирамиды.

120. По сторонам оснований a и b $(a>b)$ и высоте h найдите площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной; 4) n-угольной.

121. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 24 и 8 см, а высота равна 15 см. Найдите площадь полной поверхности.

§ 5. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

122. В прямоугольном параллелепипеде стороны оснований относятся, как 7 : 24, а площадь диагонального сечения равна 50 $см^2$. Вычислите площадь боковой поверхности.

123. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21 см. Площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания, равна 72 $см^2$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

124. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 17 и 28 см; одна из диагоналей основания равна 25 см; сумма площадей диагональных сечений относится к площади основания, как 16 : 15. Вычислите площади диагональных сечений.

125. В прямой треугольной призме стороны основания относятся, как 9 : 10 : 17, а боковое ребро равно 16 см. Площадь полной поверхности этой призмы равна 1440 $см^2$. Найдите площадь ее боковой поверхности.

126. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной a и углом 60°. Сечение, проведенное через большую диагональ одного основания и вершину тупого угла другого основания, представляет собой прямоугольный треугольник. Найдите площадь полной поверхности призмы.

127. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а площадь ее полной поверхности 144 см^2. Найдите площадь ее боковой поверхности.

128. Стороны основания прямой треугольной призмы относятся, как 3:4:5. Боковое ребро равно 10 см, а площадь полной поверхности равна 672 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

129. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция. Площадь диагонального сечения и площади боковых параллельных граней соответственно равны 320, 176 и 336 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

130. В прямой треугольной призме стороны основания относятся, как 17:15:8, а боковое ребро равно 16 см. Площадь полной поверхности этой призмы равна 1760 см^2. Вычислите стороны основания.

131. Основанием призмы служит правильный треугольник, описанный около окружности радиуса r, а боковые грани — квадраты. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

132. Основание призмы — правильный треугольник со стороной, равной 6 см; боковое ребро призмы равно 5 см, одна из вершин верхнего основания проецируется в центр нижнего основания. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

133. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной a. Высота параллелепипеда также равна a. Проекция одного из боковых ребер на плоскость нижнего основания совпадает с половиной его диагонали. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

134. Докажите, что четырехугольная призма, диагональные сечения которой перпендикулярны плоскости основания, является прямой.

135. Докажите, что если все ребра четырехугольной пирамиды равны, то такая пирамида — правильная.

136. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник; боковые ребра равны между собой. Докажите, что боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания.

137. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию. Докажите, что боковая сторона трапеции равна ее средней линии.

138. Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Две боковые грани, имеющие ребро, перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углом 60°. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм со сторонами 3 и 5 см, а угол между ними равен 60°; площадь большего диагонального сечения равна 63 см^2. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2) В правильной усеченной четырехугольной пирамиде площади оснований равны 25 и 9 см^2, а боковое ребро образует с плоскостью нижнего основания угол 45°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

II вариант

1) Основание прямой призмы — равнобедренная трапеция, основания которой 11 и 21 см, а боковая сторона 13 см; площадь диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

2) Основание пирамиды — треугольник со сторонами, равными 6, 10 и 14 см. Каждый двугранный угол при основании равен 30°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

Глава 24
ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. ЦИЛИНДР

1. Радиус основания цилиндра 3 см, высота 8 см. Найдите длину диагонали осевого сечения и острый угол ее наклона к плоскости основания.

2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 см, высота цилиндра равна 24 см. Найдите площадь основания цилиндра.

3. Радиус основания цилиндра 13 см, его высота 20 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 см от нее.

4. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Высота цилиндра равна 15 см, расстояние секущей плоскости от оси цилиндра равно 3 см. Вычислите площадь сечения.

5. Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра (в осевом сечении — квадрат) равна a. Найдите площадь полной поверхности вписанной в этот цилиндр шестиугольной призмы.

6. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как $\pi:2$. Найдите острый угол между диагоналями осевого сечения.

7. Все вершины равнобедренного треугольника, основание которого равно 12 см, а высота равна 4 см, лежат на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна основанию треугольника и образует с его плоскостью угол 30°. Найдите радиус цилиндрической поверхности.

8. Все вершины квадрата со стороной 1 лежат на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна стороне квадрата и образует с его плоскостью угол α. Вычислите радиус цилиндрической поверхности.

9. Около цилиндра радиуса r, осевое сечение которого квадрат, описана правильная треугольная призма. Вычислите площадь ее боковой поверхности.

10. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см, боковое ребро 10 см. Вычислите площади осевых сечений вписанного в призму и описанного около призмы цилиндров.

11. В правильной треугольной призме боковое ребро равно a; отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с плоскостью основания угол α. Вычислите площадь осевого сечения, вписанного в призму цилиндра.

§ 2. КОНУС. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

12. Радиус основания конуса 5 см, его высота 12 см. Найдите площадь осевого сечения, длину образующей и угол ее наклона к плоскости основания.

13. Площадь осевого сечения конуса равна 48 см^2, его образующая составляет с плоскостью основания угол α. Найдите площадь основания конуса.

14. Радиус основания конуса 6 см, его высота 12 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси конуса на расстоянии 2 см от нее.

15. В конусе проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Высота конуса равна 12 см, расстояние секущей плоскости от оси конуса равно 3 см. Вычислите площадь сечения.

16. Радиус основания конуса равен R. Вычислите площадь параллельного сечения, делящего высоту конуса в отношении $m:n$ (от вершины к основанию).

17. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания равен R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.

18. Высота конуса равна H. Угол между высотой и образующей равен 30°. Вычислите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.

19. Радиус основания конуса равен R, высота его равна H. Вычислите площадь сечения, проведенного через две образующие, если на окружности основания оно отсекает дугу в 90°.

20. Через вершину конуса под углом 60° к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая дугу в 90°. Высота конуса равна H. Вычислите площадь сечения.

21. В конусе даны радиус основания R и высота H. Вычислите ребро вписанного в него куба.

22. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Вычислите ребро этой призмы.

23. Докажите, что угол при вершине осевого сечения конуса является прямым, острым или тупым в зависимости от того, будет ли высота конуса равна, больше или меньше радиуса основания.

24. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания a, двугранный угол при основании α. Найдите площадь осевого сечения вписанного конуса.

25. Боковая поверхность конуса, имеющего высоту H и радиус основания R, развернута на плоскость. Вычислите угол полученного сектора.

26. Образующая конуса равна L, радиус основания равен R. Вычислите угол α в развертке боковой поверхности конуса (рассмотрите особо случай равностороннего конуса).

27. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и высотой конуса.

28. Сектор, радиус которого равен L, а угол равен α, свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.

29. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, а высота равна H. Найдите образующую.

30. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r; образующая наклонена к основанию под углом α. Найдите высоту.

31. Радиусы оснований усеченного конуса равны 18 и 30 см; образующая равна 20 см. Найдите расстояние от центра меньшего основания до окружности большего.

32. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r; образующая равна l. Найдите площадь осевого сечения.

33. Площади оснований усеченного конуса составляют M_1 и M_2. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

34. Площади оснований усеченного конуса равны 32 и 2 см^2. Высота разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.

35. Радиусы оснований усеченного конуса равны 10 и 6 см. Высота разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.

§ 3. СФЕРА, ШАР

Уравнение сферы с центром в точке $O(a; b; c)$ и радиусом R имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

36. Дана сфера $x^2+y^2+z^2=450$. Найти координаты точек пересечения сферы с прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4; 5; 3)$.

○ Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4; 5; 3)$, имеет вид

$$(x-4)/4=(y-5)/5=(z-3)/3.$$

Запишем эти уравнения в параметрическом виде:

$$(x-4)/4=t;\ (y-5)/5=t;\ (z-3)/3=t,$$

откуда

$$x=4+4t;\ y=5+5t;\ z=3+3t. \qquad (*)$$

Подставив значения x, y и z в уравнение сферы, получим

$$((4+4t)^2+(5+5t)^2+(3+3t)^2=450)\Leftrightarrow(t^2+2t-8=0)\Leftrightarrow(t_1=-4;\ t_2=2).$$

Подставляя теперь найденные значения t в соотношения (*), получим две точки пересечения сферы и прямой: $(-12;\ -15;\ -9)$ и $(12;\ 15;\ 9)$. ●

37. Найти расстояние от точки $A(6;\ -3;\ -2)$ до сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

○ Находим расстояние от начала координат до точки $A(6;\ -3;\ -2)$; имеем $OA=\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2}=7$. Так как радиус сферы равен 3, то расстояние от точки A до сферы равно $7-3=4$. ●

38. Найдите координаты точек пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ с осями координат.

39. Составьте уравнение сферы с центром S и радиусом R, если: 1) $S(2;\ 3;\ 4)$, $R=5$; 2) $S(-3;\ 0;\ 4)$, $R=\sqrt{2}$.

40. Даны точки $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(2;\ -2;\ 0)$, $D(-4;\ 2;\ 2)$. Какие из этих точек принадлежат сфере с центром $S(-2;\ 1;\ 0)$ и радиусом 3?

41. Найдите центр и радиус сферы: 1) $x^2+y^2+z^2=16$; 2) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=36$; 3) $x^2-6x+y^2+8y+z^2-4z+4=0$; 4) $x^2+10x+y^2+2y+z^2+6z-1=0$.

42. Сфера проходит через точку $A(-3;\ 4;\ -2)$, а ее центр находится в начале координат. Составьте уравнение сферы.

43. Сфера имеет центр в точке $C(2;\ -1;\ 3)$ и проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы.

44. Точка $A(4;\ -2;\ 3)$ лежит на сфере с центром $C(2;\ -3;\ -1)$. Составьте уравнение сферы.

45. Дана сфера $x^2+y^2+z^2=200$. Найдите координаты точек пересечения сферы с прямой, проходящей через начало координат и точку $A(5;\ -3;\ 4)$.

46. Найдите расстояние: 1) от точки $A(1;\ -2;\ 2)$ до сферы $x^2+y^2+z^2=16$; 2) от точки $A(2;\ 4;\ 3)$ до сферы $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.

47. Радиус сферы равен 70 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 24 см от точки касания. Найдите ее кратчайшее расстояние от поверхности сферы.

48. Сфера $x^2+y^2+z^2=9$ пересечена плоскостью. Найдите координаты центра O и радиус r сечения, если известно уравнение этой плоскости: 1) $z=1$; 2) $y=2$.

49. Какая фигура является пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскости: 1) $x=2$; 2) $x-y=1$?

50. Сфера, радиус которой равен R, пересечена плоскостью на расстоянии a от центра. Вычислите площадь сечения.

51. Вычислите отношение площади сечения, проведенного на расстоянии m от центра сферы, к площади большого круга. Радиус сферы равен R.

52. Радиус сферы равен R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом α к нему. Вычислите площадь сечения.

53. Радиус сферы равен R. На ее поверхности даны точка и окружность. Точка удалена (по прямой) от всех точек окружности на расстояние a. Найдите радиус этой окружности.

§ 4. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ СФЕРЫ

Многогранник называется *вписанным в сферу* (в шар), если все вершины многогранника принадлежат сфере.

Сфера называется *вписанной в многогранник*, если все грани многогранника касаются сферы.

Сфера называется *описанной около цилиндра*, если основаниями цилиндра служат сечения сферы. В этом случае цилиндр называется *вписанным в сферу*.

Сфера называется *вписанной в цилиндр*, если основания цилиндра и все его образующие касаются сферы. В этом случае цилиндр называется *описанным около сферы*.

В цилиндр можно вписать сферу только в том случае, если цилиндр равносторонний (осевое сечение цилиндра — квадрат).

Сфера называется *описанной около конуса*, если основанием конуса служит сечение сферы, а вершина конуса лежит на сфере. В этом случае конус называется *вписанным в сферу*.

Сфера называется *вписанной в конус*, если основание конуса и все его образующие касаются сферы. В этом случае конус называется *описанным около сферы*. В любой конус можно вписать сферу.

В усеченный конус можно вписать сферу только в том случае, если длина образующей равна сумме длин радиусов оснований.

54. Ребро куба равно a. Найдите радиусы вписанного в куб и описанного около него шаров.

55. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4, 6 и 12 см. Вычислите длину радиуса описанной сферы.

56. Высота правильной шестиугольной призмы равна 8 см, а диагональ боковой грани равна 13 см. Вычислите длину радиуса описанного шара.

57. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Вычислите площадь ее полной поверхности.

58. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, а боковое ребро равно b. Вычислите длину радиуса описанной сферы.

59. Ребро правильного тетраэдра равно a. Вычислите длины радиусов описанного и вписанного шаров.

60. В правильной пирамиде боковое ребро, равное b, составляет с основанием угол α. Вычислите длину радиуса описанного шара.

61. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с основанием угол α. Вычислите длину бокового ребра.

62. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой равна h и двугранный угол при основании равен α.

63. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а боковые ребра взаимно перпендикулярны. Вычислите радиус описанной сферы.

64. В правильной треугольной усеченной пирамиде высота равна 17 см, а радиусы окружностей, описанных около оснований, равны 5 и 12 см. Вычислите длину радиуса описанного шара.

65. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 3 и 4 см, высота равна 7 см. Вычислите длину радиуса описанного шара.

66. Около цилиндра с радиусом 2 см и образующей 3 см описана сфера. Вычислите ее радиус.

67. В равносторонний цилиндр с радиусом 5 см вписана сфера. Вычислите площадь сечения, перпендикулярного оси цилиндра и проведенного на расстоянии 3 см от центра сферы.

68. Высота конуса равна h, а его образующая равна l. Найдите радиус описанной сферы.

69. В конус, у которого радиус основания r, а образующая l, вписана сфера. Вычислите длину линии, по которой сфера касается боковой поверхности конуса.

70. Высота конуса равна 20 см, образующая равна 25 см. Вычислите радиус вписанного полушара, основание которого лежит на основании конуса.

71. В конусе образующая, длина которой равна l, составляет с основанием угол α. Вычислите длину радиуса: 1) описанного шара; 2) вписанного шара.

72. В сферу радиуса R вписан конус с высотой h. Вычислите площадь осевого сечения конуса.

73. Площадь осевого сечения конуса равна S, образующая составляет с основанием конуса угол α. Найдите радиус вписанной в конус сферы.

74. Около сферы радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет с основанием угол α. Вычислите площадь осевого сечения конуса.

75. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 4 см; высота равна 7 см. Вычислите радиус описанной сферы.

76. Вокруг сферы описан усеченный конус, радиусы оснований которого R и r. Найдите радиус сферы.

77. Радиус сферического сектора равен R, а дуга в осевом сечении равна 60°. Вычислите радиус вписанной в него сферы и длину окружности, по которой они касаются.

78. Вычислите радиус шара, вписанного в шаровой сектор, если центральный угол сектора равен α, а радиус этого сектора R.

79. Радиус сферического сегмента равен r, а дуга в осевом сечении равна α. Вычислите радиус вписанной в сегмент сферы.

80. В сферический сектор вписаны два взаимно касающихся шара, радиусы которых равны 10 и 30 см. Вычислите радиус данного сектора.

§ 5. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

81. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Вычислите площадь сечения, если длина оси равна 10 см, а ее расстояние от секущей плоскости равно 2 см.

82. Ребро куба равно a; диагональ куба служит осью цилиндрической поверхности, касающейся: 1) ребра куба; 2) диагонали грани куба. Найдите радиус цилиндрической поверхности.

83. Высота цилиндра равна 15 см, а радиус его основания равен 10 см. Концы данного отрезка, имеющего длину $3\sqrt{41}$ см, лежат на окружностях обоих оснований. Найдите кратчайшее расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

84. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе через его вершину под углом φ к высоте проведена плоскость. Вычислите площадь полученного сечения.

85. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α. В призму вписан конус так, что его основание вписано в основание призмы, а вершина конуса находится на плоскости другого основания. Найдите площадь полной поверхности призмы, зная, что диаметр основания конуса равен d, а угол наклона образующей конуса к плоскости его основания равен φ.

86. В конусе проведено сечение через его вершину под углом 30° к высоте конуса. Вычислите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания равен 5 см.

87. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 80 и 60 см. В эту пирамиду вписан конус. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса, если высота конуса равна 10 см.

88. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны; высота равна H. Найдите площадь сечения усеченного конуса, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.

89. Диагонали ромба равны 30 и 40 см. Сфера касается всех сторон ромба. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба, если радиус сферы равен 13 см.

90. Радиус шара равен 6 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 30° к нему. Вычислите площадь сечения шара плоскостью.

91. На сферу, радиус которой 10 см, наложен ромб так, что каждая сторона его, равная 12,5 см, касается сферы. Плоскость ромба удалена от центра сферы на 8 см. Вычислите площадь ромба.

92. Радиусы двух шаров равны 16 и 20 см, а расстояние между их центрами равно 25 см. Найдите длину окружности, по которой пересекаются их поверхности.

93. Радиус сферического сегмента равен r, дуга в осевом сечении α. Вычислите: 1) длину его основания; 2) высоту.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) В конус вписан равносторонний цилиндр. Найдите высоту цилиндра, если высота конуса равна H и угол при вершине осевого сечения равен α.

2) Вокруг шара описана прямая призма, основание которой — ромб с диагоналями 6 и 8 см. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

II вариант

1) Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его высоте,— квадрат. Секущая плоскость отстоит от оси цилиндра на расстояние d и отсекает от окружности основания дугу α. Вычислите площадь сечения.

2) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен α. Вычислите радиус вписанного в нее шара.

Глава 25
ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ И ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

§ 1. ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА И ПРИЗМЫ

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V_{\text{пар}} = abc. \qquad (25.1)$$

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту:

$$V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} H. \qquad (25.2)$$

1. Вычислите объем куба: 1) по его диагонали l; 2) по его площади поверхности S.

2. Вычислите объем куба, если площадь его диагонального сечения равна M.

3. Найдите ребро куба, объем которого равен сумме объемов кубов с ребрами m и n.

4. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6, 16 и 18 см. Найдите ребро равновеликого ему куба.

5. Площади граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2 и S_3. Найдите его объем.

6. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся, как 2:7:26; диагональ параллелепипеда равна 81 см. Найдите объем параллелепипеда.

7. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 7, 8 и 9 см. Найдите объем параллелепипеда.

8. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол α, а с другой — угол β. Вычислите объем параллелепипеда.

9. Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм со сторонами 8 и 32 см и острым углом $\alpha = 60°$. Большая диагональ параллелепипеда равна 40 см. Вычислите объем параллелепипеда.

10. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 25 и 39 см, а площади его диагональных сечений равны 204 и 336 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

11. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 17 и 25 см, одна из диагоналей основания равна 26 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°. Вычислите объем параллелепипеда.

12. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого относятся, как 5:16. Диагонали параллелепипеда равны 26 и 40 см. Вычислите объем параллелепипеда.

13. Вычислите объем прямого параллелепипеда, основание которого — ромб со стороной a и углом α, а диагональ боковой грани составляет с боковым ребром угол β.

14. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом α. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол β. Вычислите объем параллелепипеда.

15. Сторона основания правильной призмы равна a, боковое ребро равно b. Найдите объем призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

16. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a; площадь боковой поверхности равновелика сумме площадей оснований. Вычислите объем этой призмы.

17. В основании прямой призмы лежит трапеция, площадь которой 306 см^2. Площади параллельных боковых граней равны 40 и 30 см^2, а площади двух других боковых граней равны 75 и 205 см^2. Вычислите объем призмы.

18. В прямой четырехугольной призме площадь основания равна M, площади диагональных сечений составляют P и Q, а двугранный угол между ними равен α. Вычислите объем призмы.

19. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами 4 и 6 см, боковое ребро равно 2 см и образует с каждой из смежных сторон основания угол 60°. Вычислите объем параллелепипеда.

20. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно a, одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол α. Вычислите объем призмы.

21. Постройте сечение наклонного параллелепипеда плоскостью, которая проходит через данную точку стороны основания и делит параллелепипед на две призмы, имеющие равные объемы.

22. Основание наклонной треугольной призмы — равнобедренный треугольник, высота которого h, а угол при основании φ. Боковое ребро, равное a, наклонено к плоскости основания под углом β. Найдите объем призмы.

23. Основанием наклонного параллелепипеда является параллелограмм со сторонами a и b и углом φ между ними. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем параллелепипеда.

§ 2. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H. \qquad (25.3)$$

24. По стороне основания a и боковому ребру b вычислите объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

25. Апофема правильной треугольной пирамиды равна k, а высота равна h. Найдите объем пирамиды.

26. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды и площадь ее боковой поверхности равны соответственно S и Q. Вычислите объем пирамиды.

27. Вычислите объем правильного тетраэдра с ребром a.

28. Центры граней правильного тетраэдра являются вершинами нового правильного тетраэдра. Найдите отношение их объемов.

29. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь боковой грани S, а плоский угол при вершине α.

30. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковая грань образует с плоскостью основания угол α.

31. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковой гранью угол α. Вычислите объем пирамиды, если площадь боковой поверхности равна S.

32. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом 30°. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Вычислите объем пирамиды.

33. Основание пирамиды — ромб со стороной 15 см, каждая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 45°. Вычислите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 300 см^2.

34. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны равны 3 и 5 см, а боковая сторона равна 7 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а большее боковое ребро равно 10 см. Вычислите объем пирамиды.

35. Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна 1 м^2. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углами 30 и 60°. Вычислите объем пирамиды.

36. Основание пирамиды — прямоугольник. Каждое боковое ребро равно a и образует со смежными сторонами углы α и β. Вычислите объем пирамиды.

37. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Вычислите объем пирамиды.

§ 3. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V_{\text{ус. пир}}=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)H, \qquad (25.4)$$

где S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, а H — ее высота.

38. По боковому ребру l и сторонам основания a и b вычислите объем правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 6) шестиугольной.

39. Стороны оснований правильной пирамиды 4 и 8 см, а диагональ равна 11 см. Вычислите объем пирамиды.

40. Апофема правильной шестиугольной усеченной пирамиды равна 10 см, а высота равна 8 см. Сумма длин двух сторон верхнего и нижнего ее оснований равна $8\sqrt{3}$ см. Вычислите объем пирамиды.

41. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости большего основания под углом α, стороны оснований равны a и b $(a>b)$. Вычислите объем пирамиды.

42. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды наклонено к стороне большего основания под углом φ. Стороны оснований равны a и b $(a>b)$. Вычислите объем пирамиды.

43. Стороны одного основания усеченной пирамиды равны 27, 29 и 52 см; периметр другого основания равен 72 см; высота пирамиды равна 10 см. Вычислите объем пирамиды.

44. Большее основание усеченной пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами a и b. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости этого основания под углом α. Периметр меньшего основания в n раз меньше периметра большего основания. Вычислите объем пирамиды.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЯ НА ЭКСТРЕМУМ В ЗАДАЧАХ НА ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

45. Из всех прямых параллелепипедов с данной площадью полной поверхности S и квадратным основанием найти тот, который имеет наибольший объем.

○ Пусть x — сторона основания параллелепипеда, а y — его высота. Тогда площадь полной поверхности равна $S=2x^2+4xy$, откуда $y=(S-2x^2)/(4x)$. Следовательно, объем параллелепипеда

$$V=x^2y=x^2\frac{S-2x^2}{4x}=\frac{1}{4}Sx-\frac{1}{2}x^3\left(0<2x^2<S,\ 0<x<\sqrt{S/2}\right).$$

Исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной:

$$V'=\frac{1}{4}S-\frac{3}{2}x^2;\ \frac{1}{4}S-\frac{3}{2}x^2=0,\ x=\sqrt{S/6}=\sqrt{6S}/6;\ V''=-3x;$$

$$V''\left(\sqrt{6S}/6\right)<0.$$

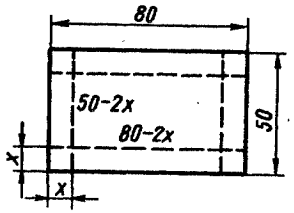


Рис. 167

Вторая производная при $x=\sqrt{6S}/6$ отрицательна; значит, при этом значении аргумента функция имеет максимум.

Найдем $y=\dfrac{S-2\left(\sqrt{6S}/6\right)^2}{4\left(\sqrt{6S}/6\right)}=\sqrt{6S}/6$, т. е. высота параллелепипеда и сторона его основания равны. Таким образом, из всех параллелепипедов, удовлетворяющих условиям задачи, наибольший объем имеет куб. ●

46. Из прямоугольного листа жести со сторонами 80 и 50 см требуется сделать открытый сверху ящик наибольшего объема, отрезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать боковые стенки. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов (рис. 167)?

47. Из всех прямых параллелепипедов с данным объемом V и квадратным основанием найдите тот, который имеет наименьшую площадь полной поверхности.

48. Найдите размеры открытого (без крышки) ящика с квадратным дном, имеющего наименьшую площадь полной поверхности при заданном объеме V.

49. Вычислите размеры открытого ящика с квадратным дном, имеющего наибольший объем, если общая площадь поверхности боковых стенок и дна равна S.

§ 5. ОБЪЕМЫ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V_{\text{цил}}=\pi R^2 H. \tag{25.5}$$

Объем конуса равен 1/3 произведения площади его основания на высоту:

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi R^2 H. \tag{25.6}$$

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V_{\text{ус. кон}}=\frac{1}{3}\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)H, \tag{25.7}$$

где R_1 и R_2 — радиусы кругов, лежащих в его основаниях, а H — высота.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3. \tag{25.8}$$

Объем шарового сектора вычисляется по формуле

$$V_{\text{шар. сект}}=\frac{2}{3}\pi R^2 H, \tag{25.9}$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сектора.

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V_{\text{шар. сегм}}=\frac{1}{3}\pi H^2(3R-H), \tag{25.10}$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сегмента.

50. Диагональ прямоугольника составляет с одной из сторон угол α. Вычислите отношение объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольника около каждой из смежных сторон.

51. Диагональ d осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислите объем цилиндра.

52. Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна S. Вычислите объем цилиндра.

53. Из куба выточен цилиндр наибольшего объема. Сколько процентов материала при этом сточено?

54. Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем фигуры вращения.

55. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с радиусом R и центральным углом, равным α радиан. Найдите объем конуса.

56. В прямоугольной трапеции основания равны a и $b\,(b>a)$. Найдите отношение объемов фигур, образованных вращением трапеции вокруг оснований.

57. Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно стороне ромба. Вычислите объем фигуры вращения.

58. В конус вписан шар радиуса r. Радиус, проведенный в точку касания, образует с высотой конуса угол α. Найдите объем конуса.

59. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, образующая наклонена к основанию под углом α. Найдите объем усеченного конуса.

60. В усеченном конусе радиусы оснований равны 27 и 11 см; образующая относится к высоте, как 17:15. Найдите объем усеченного конуса.

61. Усеченный конус с радиусами оснований 6 и 9 см и высотой 12 см пересечен двумя плоскостями, параллельными основаниям, которые делят высоту на три равные части. Найдите объем средней части конуса.

62. Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 21 см, а боковая сторона равна 13 см. Вычислите объем фигуры, образуемой при вращении этой трапеции вокруг ее оси.

63. Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно стороне ромба. Найдите объем фигуры вращения.

64. В усеченном конусе отношение площадей оснований равно 4, образующая имеет длину l и наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислите объем усеченного конуса.

65. Диаметры трех шаров равны 6, 8 и 10 см. Найдите диаметр шара, объем которого равен сумме объемов этих шаров.

66. Из куба выточен шар наибольшего объема. Сколько процентов материала при этом сточено?

67. Найдите отношение объемов вписанного в куб и описанного около этого куба шаров.

68. Найдите отношение объемов цилиндра, шара и конуса, если диаметры оснований цилиндра и конуса и их высоты равны диаметру шара.

69. Внешний радиус полого шара 9 см, толщина стенок 3 см. Найдите объем, заключенный между стенками.

70. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на две части, равные 3 и 9 см. Найдите объемы соответствующих частей шара.

71. Два равных шара размещены так, что центр одного находится на поверхности другого. Как относится объем их общей части к объему шара?

72. Радиус основания шарового сегмента равен 8 см, дуга осевого сечения содержит 60°. Вычислите объем сегмента.

73. Радиус основания шарового сегмента 8 см, его высота 4 см. Вычислите объем сегмента.

74. Радиус шара равен R, угол в осевом сечении шарового сектора 120°. Вычислите объем шарового сектора.

75. Радиус окружности основания шарового сектора 60 см, радиус шара 75 см. Вычислите объем шарового сектора.

76. Радиус шара равен R, дуга в осевом сечении шарового сектора α. Найти объем шарового сектора.

77. Дуга в осевом сечении шарового сектора равна α, высота сектора равна h. Найдите объем шарового сектора.

78. Радиусы параллельных сечений шара 20 и 24 см, а радиус шара 25 см. Вычислите объем части шара, заключенной между этими сечениями (рассмотрите два случая).

79. В шаре, радиус которого равен 65 см, проведены по одну сторону центра две параллельные плоскости, отстоящие от центра на 19 и 25 см. Вычислите объем части шара, заключенной между ними.

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЯ НА ЭКСТРЕМУМ В ЗАДАЧАХ НА ОБЪЕМЫ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

80. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус с радиусом основания R и высотой H, найти тот, у которого объем наибольший.

○ Пусть r — радиус основания искомого цилиндра, а h — его высота (рис. 168). Из подобия треугольников ABO_1 и ACC_1 имеем $R/H=(R-r)/h$, откуда $h=H(R-r)/R$. Подставив значение h в формулу объема цилиндра $V=\pi r^2 h$, получим

$$V=\pi r^2\frac{H(R-r)}{R}=\frac{\pi H}{R}(Rr^2-r^3);\quad 0<r<R.$$

Исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной:

$$V'=\frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2);\quad \frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2)=0;\quad 2Rr-3r^2=0;\quad r(2R-3r)=0;$$

$$r_1=0,\quad r_2=\frac{2}{3}R;\quad V''=\frac{\pi H}{R}(2R-6r);\quad V''(2R/3)=-2\pi H.$$

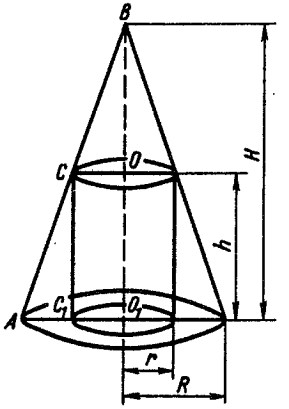


Рис. 168

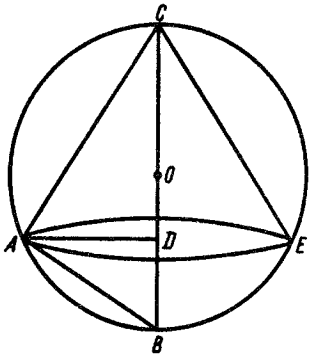


Рис. 169

Вторая производная при $r=2R/3$ отрицательна, следовательно, функция при $r=2R/3$ имеет максимум.

Найдем высоту искомого цилиндра:

$$h=\frac{H(R-2R/3)}{R}=\frac{1}{3}H.$$

Итак, наибольший объем имеет конус с радиусом основания $r=2R/3$ и высотой $h=H/3$. ●

81. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найти тот, у которого объем наибольший.

○ Пусть $AD=r$ — радиус основания искомого конуса и $DC=h$ — его высота (рис. 169). Из $\triangle BAC$ по теореме о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике имеем $AD^2=BD\cdot DC$, или $r^2=(2R-h)h$. Подставив значение r^2 в формулу объема конуса $V=\pi r^2 h/3$, получим

$$V=\frac{1}{3}\pi(2R-h)\cdot h\cdot h=\frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3);\quad 0<h<2R.$$

Исследуем эту функцию на экстремум с помощью второй производной:

$$V'=\frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2);\quad \frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2)=0;\quad 4Rh-3h^2=0;\quad h(4R-3h)=0;$$

$$h_1=0;\quad 4R-3h=0;\quad h_2=\frac{4}{3}R;\quad V''=\frac{1}{3}\pi(4R-6h)=\frac{2}{3}\pi(2R-3h);$$

$$V''(4R/3)=\frac{2}{3}\pi\left(2R-3\cdot\frac{4}{3}R\right)=\frac{2}{3}\pi(-2\pi R)=-\frac{4\pi R}{3}.$$

Вторая производная отрицательна при $h=4R/3$; следовательно, функция при этом значении аргумента имеет максимум.

Найдем значение r при $h=4R/3$:

$$r^2=\left(2R-\frac{4}{3}R\right)\cdot\frac{4}{3}R=\frac{2R}{3}\cdot\frac{4}{3}R=\frac{8}{9}R^2,\ \text{т. е. } r=\frac{2\sqrt{2}R}{3}.$$

Таким образом, наибольший объем имеет конус с радиусом основания $2R\sqrt{2}/3$ и высотой $4R/3$. ●

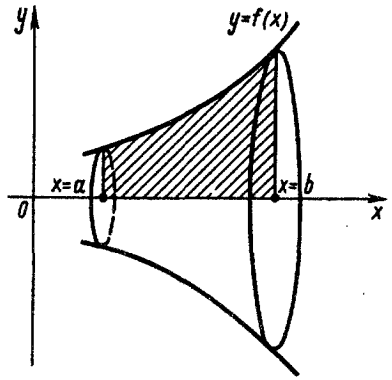


Рис. 170

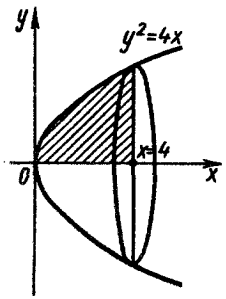


Рис. 171

82. Из всех цилиндров, вписанных в шар радиуса S, найдите тот, у которого объем наибольший.

83. Открытый круговой цилиндрический желоб изготовляется из полосы жести шириной a см. При каком центральном угле α объем желоба будет наибольшим?

84. Из всех конусов с данной образующей l найдите тот, у которого объем наибольший.

85. Из бумажного круга радиуса R вырезан сектор и из оставшейся части круга склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим? Найдите радиус основания и высоту воронки.

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Объем фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 170), вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx. \qquad (25.11)$$

Аналогично, объем фигуры, образованной вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x=\varphi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$, осью Oy и прямыми $y=c$ и $y=d$, находится по формуле

$$V=\pi\int_c^d x^2\,dy. \qquad (25.12)$$

Вычислить объемы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями.

86. $y^2=4x$, $y=0$ и $x=4$ вокруг оси Ox.

○ Выполним построение (рис. 171). Фигура вращения представляет собой параболоид; пределы интегрирования $a=0$ и $b=4$. По формуле (25.11) получим

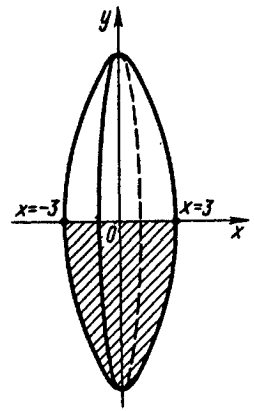


Рис. 172

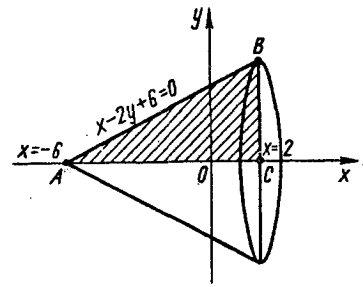


Рис. 173

$$V=\pi\int_0^4 4x\,dx=2\pi x^2\Big|_0^4=32\pi\,(\text{куб. ед.}).\ \bullet$$

87. $y=x^2-9$ и $y=0$ вокруг оси Ox.

○ Выполним построение (рис. 172). В силу симметрии фигуры относительно оси Oy возьмем пределы интегрирования от 0 до 3, а затем полученный результат удвоим. По формуле (25.11) находим

$$V/2=\pi\int_0^3 (x^2-9)^2\,dx=\pi\int_0^3 (x^4-18x^2+81)\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}-6x^3+81x\right]_0^3=129{,}6\pi;$$

$$V=2\cdot 129{,}6\pi=259{,}2\pi\,(\text{куб. ед.}).\ \bullet$$

88. $x-2y+6=0$, $y=0$ и $x=2$ вокруг оси Ox.

○ Выполнним построение (рис. 173). Прямая $x-2y+6=0$ пересекает ось Ox в точке $A(-6;\,0)$; пределы интегрирования $a=-6$ и $b=2$. Вычислим объем конуса, образованного вращением треугольника ABC, в котором сторона AB выражается уравнением $y=(1/2)x+3$:

$$V=\pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 dx=\pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+3x+9\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{12}+\frac{3x^2}{2}+9x\right]_{-6}^{2}=42\frac{2}{3}\pi\,(\text{куб. ед.}).\ \bullet$$

89. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, $y=0$, $x=a$, $x=2a$ вокруг оси Ox.

○ Фигура вращения — гиперболоид. Из уравнения гиперболы имеем $y^2=(b^2/a^2)(x^2-a^2)$ (рис. 174). Следовательно,

$$V=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2\right)dx=\pi\left[\frac{b^2x^3}{3a^2}-b^2x\right]_a^{2a}=\pi\left[\left(\frac{8ab^2}{3}-2ab^2\right)-\left(\frac{ab^2}{3}-ab^2\right)\right]=$$

$$=\pi\frac{8ab^2-6ab^2-ab^2+3ab^2}{3}=\frac{4\pi ab^2}{3}\,(\text{куб. ед.}).\ \bullet$$

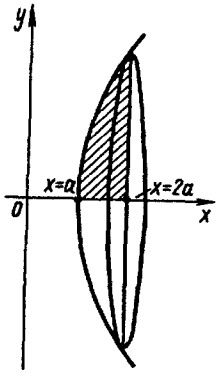


Рис. 174

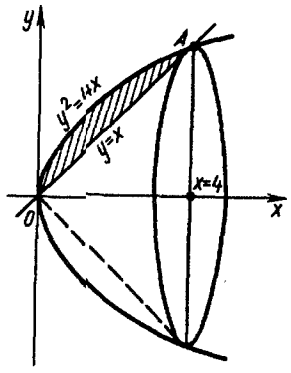


Рис. 175

90. $y^2=4x$ и $y=x$ вокруг оси Ox.

○ Выполним построение фигуры (рис. 175). Решив систему $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x, \end{cases}$ найдем точки пересечения параболы и прямой: $O(0;\,0)$ и $A(4;\,4)$; следовательно, пределы интегрирования $a=0$, $b=4$. Искомый объем представляет собой разность объема V_1 параболоида, образованного вращением кривой $y^2=4x$, и объема V_2 конуса, образованного вращением прямой $y=x$:

$$V_1=\pi\int_0^4 4x\,dx=\pi 2x^2\Big|_0^4=32\pi;$$

$$V_2=\pi\int_0^4 x^2\,dx=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{64\pi}{3}=21\frac{1}{3}\pi;$$

$$V=V_1-V_2=32\pi-21\frac{1}{3}\pi=10\frac{2}{3}\pi\ (\text{куб. ед.}).\ \bullet$$

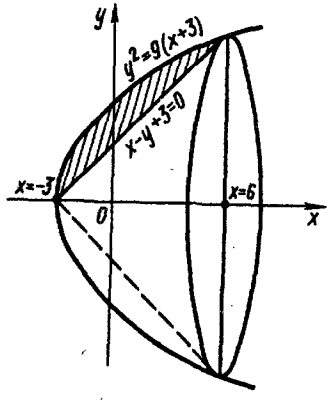


Рис. 176

91. $y^2=9(x+3)$ и $x-y+3=0$ вокруг оси Ox.

○ Выполним построение фигуры (рис. 176). Решив систему $\begin{cases} y^2=9(x+3), \\ x-y+3=0, \end{cases}$ найдем точки пересечения параболы и прямой: $A(-3;\,0)$ и $B(6;\,9)$; пределы интегрирования $a=-3$ и $b=6$. Искомый объем равен разности объема V_1 параболоида, образованного вращением кривой $y^2=9(x+3)$, и объема V_2 конуса, образованного вращением прямой $y=x+3$:

$$V_1=\pi\int_{-3}^{6} 9(x+3)\,dx=9\pi\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{6}=364{,}5\pi;$$

$$V_2=\pi\int_{-3}^{6}(x+3)^2\,dx=\frac{\pi}{3}(x+3)^3\Big|_{-3}^{6}=243\pi;$$

$$V=V_1-V_2=364{,}5\pi-243\pi=121{,}5\pi\ (\text{куб. ед.}).\ \bullet$$

Вычислите объемы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных заданными линиями:

92. 1) $y^2=x$, $y=0$, $x=1$ и $x=2$; 2) $y^2=2x$, $y=0$, $x=2$ и $x=4$; 3) $y^2=6x$, $y=0$, $x=1$ и $x=3$; 4) $y^2=2(x+2)$, $y=0$ и $x=0$ (во всех случаях вокруг оси Ox).

93. 1) $y=x^2-1$ и $y=0$; 2) $y=3x-x^2$ и $y=0$; 3) $y=-x^2-x$ и $y=0$ (во всех случаях вокруг оси Ox).

94. $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=0$ вокруг оси Ox.

95. $x^2+y^2=r^2$, $y=0$ вокруг оси Ox.

96. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $x=0$ вокруг оси Oy.

97. 1) $x^2-y^2=4$, $y=0$, $x=2$, $x=4$; 2) $x^2/9-y^2/4=1$, $y=0$, $x=3$, $x=6$ (в обоих случаях вокруг оси Ox).

98. 1) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$ и $y=0$; 2) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$ (в обоих случаях вокруг оси Ox).

99. $y^2=9x$ и $y=3x$ вокруг оси Ox.

100. 1) $y^2=4(x+2)$ и $x-y+2=0$; 2) $y^2=4(x-2)$, $y=0$, $x=3$ и $x=6$; 3) $y=-x^2+5x$, $y=0$, $x=0$ и $x=3$; 4) $y^2=4(x+2)$ и $x-y+2=0$ (во всех случаях вокруг оси Ox).

§ 8. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

101. В прямой треугольной призме стороны основания равны 25, 24 и 36 см, а площадь ее полной поверхности составляет 1620 см^2. Вычислите объем призмы.

102. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 17 и 28 см, а большая диагональ основания равна 39 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°. Вычислите объем параллелепипеда.

103. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей боковой гранью угол φ. Через большие стороны оснований проведено сечение параллелепипеда. Периметр этого сечения равен m, а его плоскость образует с плоскостью основания угол α. Вычислите объем параллелепипеда.

104. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны.

105. По ребру a правильного октаэдра (правильного восьмигранника) вычислите площадь его поверхности и объем.

106. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 45°. Вычислите объем пирамиды.

107. Найдите объем пирамиды, основанием которой служит треугольник с углами α и β, если высота пирамиды равна h и образует с каждым боковым ребром угол φ.

108. Основанием пирамиды служит параллелограмм, диагонали которого пересекаются под углом α. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна H. Неравные боковые ребра образуют с основанием углы β и γ. Вычислите объем пирамиды.

109. В правильной треугольной усеченной пирамиде радиусы вписанных в основания окружностей равны 4 и 2,5 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°. Вычислите объем этой пирамиды.

110. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна l и составляет с основанием угол φ. Вычислите объем цилиндра.

111. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, образует в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Вычислите объем конуса.

112. Осевым сечением конуса является треугольник, угол при вершине которого равен α. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Вычислите объем конуса.

113. Усеченный конус, высота которого 12 см, а радиусы оснований 6 и 9 см, пересечен двумя плоскостями, параллельными основаниям и делящими высоту на три равные части. Вычислите объем средней части конуса.

114. Вокруг шара радиуса R описан усеченный конус, одно из оснований которого вдвое больше другого. Найдите объем усеченного конуса.

115. В конус вписан шар. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60°, а радиус шара равен R. Вычислите объем конуса.

116. В шар радиуса R вписан конус. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найдите объем конуса.

117. В шар радиуса R вписан цилиндр. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к основанию под углом 30°. Найдите объем цилиндра.

118. В шар вписан цилиндр. Радиус шара равен R, радиус основания цилиндра равен r. Найдите объем цилиндра.

119. В конус вписан цилиндр. Диагонали осевого сечения цилиндра параллельны двум образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания конуса угол α. Найдите объем фигуры, ограниченной основанием конуса и боковыми поверхностями цилиндра и конуса.

120. Прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $2a$, и острым углом 30° вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Вычислите объем полученной фигуры.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 6 см, противолежащий ему угол равен 60°, а каждое боковое ребро равно 4 см. Вычислите объем пирамиды.

2) Равнобедренный треугольник, основание которого a, а угол при основании α, вращается вокруг боковой стороны. Вычислите объем фигуры вращения.

3) Вычислите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси Ox площади, границами которой служат линии $y^2-x+1=0$, $x-2=0$, $y=0$.

II вариант

1) Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, одна из диагоналей которого равна 17 см, а стороны равны 9 и 10 см. Площадь полной поверхности параллелепипеда составляет 334 см^2. Вычислите его объем.

2) Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг прямой, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно его стороне. Вычислите объем фигуры вращения.

3) Вычислите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси Ox площади, границами которой служат линии $y=-x^2+2x$ и $y=0$.

Глава 26
ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

§ 1. ПЛОЩАДИ БОКОВОЙ И ПОЛНОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЦИЛИНДРА

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра:

$$S_{\text{бок. цил}}=2\pi RH. \tag{26.1}$$

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{\text{полн. цил}}=2\pi RH+2\pi R^2. \tag{26.2}$$

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Образующая равностороннего цилиндра равна l. Вычислите площадь боковой поверхности этого цилиндра.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра составляет половину площади его полной поверхности. Диагональ осевого сечения равна 5 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

4. В основании цилиндра хорда длиной a стягивает дугу φ. Высота цилиндра равна H. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

5. В цилиндре через середину радиуса основания перпендикулярно ему проведено сечение. В сечении образовался квадрат площадью 16 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

6. Площадь полной поверхности цилиндра 1170π см^2, а радиус его основания 15 см. На каком расстоянии от оси цилиндра проходит сечение, имеющее форму квадрата?

7. Квадрат со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна его стороне. Ось удалена от квадрата на

расстояние, равное стороне квадрата. Вычислите площадь полной поверхности полученной фигуры вращения.

§ 2. ПЛОЩАДИ БОКОВОЙ И ПОЛНОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНУСА

Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на длину образующей:

$$S_{\text{бок. кон}} = \pi RL. \qquad (26.3)$$

Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{полн. кон}} = \pi RL + \pi R^2. \qquad (26.4)$$

8. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если площадь его основания равна M, а площадь осевого сечения равна N.

9. Площадь осевого сечения равностороннего конуса равна Q. Вычислите площадь его полной поверхности.

10. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α. Хорда, вписанная в основание конуса и равная a, видна из центра основания под углом φ. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

11. Радиус основания конуса равен R. Через две образующие конуса, составляющие угол β, проведена плоскость, пересекающая основание конуса по хорде, стягиваемой дугой $\alpha(\alpha < 180°)$. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

12. Прямоугольный треугольник, катеты которого 3 и 4 см, вращается около оси, параллельной гипотенузе и проходящей через вершину прямого угла. Вычислите площадь поверхности фигуры вращения.

13. В равносторонний конус вписан равносторонний цилиндр. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь боковой поверхности цилиндра равна S.

14. В конус вписана правильная n-угольная пирамида, у которой каждый из плоских углов при вершине равен α. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен r.

15. Треугольник со сторонами 8 и 5 см и углом между ними 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно меньшей стороне. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

16. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна a, двугранный угол при ней равен α. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

17. В правильной пирамиде боковое ребро равно m и составляет с плоскостью основания угол α. Вычислите площадь полной поверхности конуса, описанного около пирамиды.

§ 3. ПЛОЩАДИ БОКОВОЙ И ПОЛНОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин его оснований на длину образующей:

$$S_{\text{боков. кон}} = \pi(R_1 + R_2)L. \qquad (26.5)$$

Площадь полной поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{полн. ус. кон}} = \pi(R_1 + R_2)L + \pi(R_1^2 + R_2^2). \qquad (26.6)$$

18. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

19. Около шара радиуса r описан усеченный конус, в котором образующая составляет с основанием угол α. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса.

20. Вычислите высоту усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равновелика сумме площадей оснований, а радиусы оснований равны R и r.

21. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Вычислите площадь полной поверхности усеченного конуса.

22. Площади нижнего и верхнего оснований и боковой поверхности усеченного конуса относятся, как $m:n:p$. Вычислите угол между образующей и плоскостью нижнего основания.

23. Образующая усеченного конуса равна l и наклонена к основанию под углом α. Радиусы оснований относятся, как $m:n$ $(m > n)$. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

24. Вокруг сферы радиуса 6 см описан усеченный конус, радиусы оснований которого относятся, как 4:9. Вычислите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

25. В усеченный конус вписана сфера радиуса r. Из центра сферы диаметр большего основания виден под углом α. Вычислите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

§ 4. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

Площадь поверхности сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2. \qquad (26.7)$$

Площадь поверхности шарового пояса, а также шарового сегмента равна произведению их высоты на длину большой окружности шара:

$$S_{\text{шар. пояса}} = 2\pi RH, \quad S_{\text{шар. сегм}} = 2\pi RH. \qquad (26.8)$$

26. Вычислите площадь поверхности сферы, вписанной: 1) в куб, площадь поверхности которого равна S; 2) в правильный тетраэдр, площадь поверхности которого равна S; 3) в равносторонний цилиндр, диагональ осевого сечения которого равна m; 4) в равносторонний конус, площадь поверхности которого равна S.

27. Вычислите отношение площадей поверхностей двух сфер, из которых одна вписана, а вторая описана относительно: 1) куба; 2) правильного тетраэдра; 3) равностороннего цилиндра; 4) равностороннего конуса.

28. Объем шара равен V. Вычислите площадь его поверхности.

29. Радиусы оснований усеченного конуса равны 24 и 15 см, высота равна 27 см. Найдите площадь поверхности описанной сферы.

30. Радиусы оснований сферического пояса равны 10 и 12 см, его высота 11 см. Вычислите площадь поверхности сферического пояса.

31. Круговой сектор, радиус которого R, а угол при вершине α, вращается около диаметра круга, не пересекающего дуги сектора и составляющего угол β с ближайшими его радиусами. Вычислите площадь поверхности шарового пояса, соответствующего дуге сектора.

32. Найдите площадь полной поверхности шарового сектора, если дуга осевого сечения сектора содержит 120°, а радиус шара равен R.

33. Площадь поверхности шарового сегмента вместе с площадью его основания равна S. Вычислите высоту сегмента, если радиус шара равен R.

34. Круговой сегмент с дугой 120° и площадью Q вращается вокруг своей высоты. Вычислите площадь полной поверхности полученной фигуры.

§ 5. ИССЛЕДОВАНИЯ НА ЭКСТРЕМУМ В ЗАДАЧАХ НА ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

35. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус с радиусом основания R и высотой H, найти тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

○ Пусть r — радиус основания искомого цилиндра, а h — его высота (см. рис. 168). Из подобия треугольников ABO_1 и CBO имеем $R/r=H/(H-h)$, откуда $r=R(H-h)/H$. Подставив значение r в формулу площади боковой поверхности цилиндра $S=2\pi rh$, получим

$$S=2\pi h\frac{R(H-h)}{H},\ \text{или}\ S=\frac{2\pi R}{H}(Hh-h^2)\ \ (0<h<H).$$

Исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной:

$$S'=\frac{2\pi R}{H}\left(H-2h\right);\ \frac{2\pi R}{H}(H-2h)=0,\ H-2h=0;\ h=\frac{H}{2};\ S''=-\frac{4\pi R}{H}.$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, функция при $h=H/2$ имеет максимум.

Найдем радиус основания искомого цилиндра: $r=\dfrac{R(H-H/2)}{H}=\dfrac{R}{2}$. ●

36. Из всех пилиндров, вписанных в данный конус (R и H даны), найдите тот, у которого площадь полной поверхности наибольшая.

37. Из всех цилиндров данного объема V найдите тот, у которого площадь полной поверхности наименьшая.

38. Найдите радиус основания и высоту цилиндрического бака с наименьшей площадью поверхности (без крышки) при заданном объеме V.

39. Из всех конусов с данной площадью боковой поверхности S найти тот, у которого объем наибольший.

40. Из всех цилиндров, вписанных в шар радиуса R, иайдите тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

41. Найдите радиус основания и высоту цилиндрического бака (без крышки) наибольшего объема при заданной площади поверхности S.

42. Из всех цилиндров с данной площадью полиой поверхности S найдите тот, у которого объем наибольший.

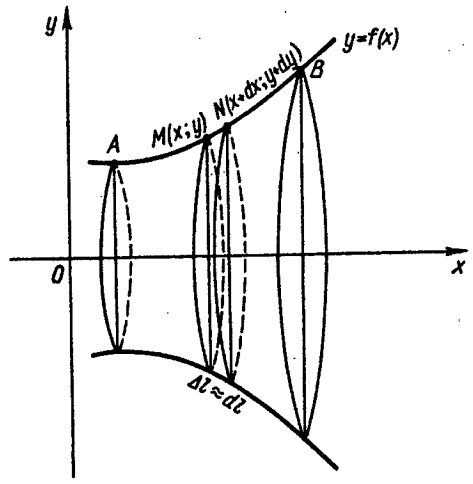


Рис. 177

43. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найдите тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

При вращении дуги $\overset{\smile}{AB}$ плоской кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox образуется поверхность вращения (рис. 177).

Дифференциал площади dS этой поверхности равен площади боковой поверхности кругового усеченного конуса с радиусами оснований y и $y+dy$ и образующей dl:

$$dS=\frac{2\pi y+2\pi(y+dy)}{2}dl=\pi(2y+dy)\,dl\approx 2\pi y\,dl$$

(слагаемым dy можно пренебречь ввиду его малости по сравнению с $2y$).

Площадь поверхности, образоваиной вращением дуги $\overset{\smile}{AB}$ вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b dS=2\pi\int_a^b y\,dl=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \qquad (26.9)$$

где a и b — значения независимой переменной x в точках A и B.

Аналогичным образом, при вращении дуги $\overset{\smile}{AB}$ вокруг оси Oy имеем $dS\approx 2\pi x\,dl$, откуда

$$S=2\pi\int_c^d x\,dl=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy, \qquad (26.10)$$

где c и d — значения независимой переменной y в точках A и B.

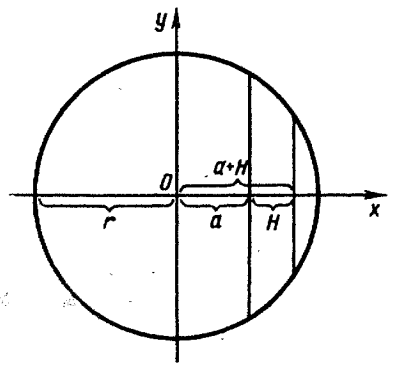


Рис. 178

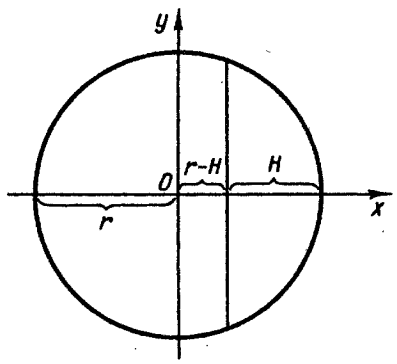


Рис. 179

44. Найти площадь поверхности шара, образованного вращением окружности $x^2+y^2=r^2$ вокруг оси Ox.

○ Дифференцируя уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$, получим $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. Найдем дифференциал дуги:

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx=\frac{r\,dx}{y}.$$

Подставив значение дифференциала dl в формулу (26.9) и взяв пределы интегрирования от $-r$ до r, получим

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}y\cdot\frac{r\,dx}{y}=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=2\pi rx\Big|_{-r}^{r}=4\pi r^2.\ \bullet$$

45. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги окружности $(x-4)^2+y^2=36$, заключенной между точками $A(2;\,4\sqrt{2})$ и $B(4;\,6)$.

○ Дифференцируя уравнение окружности по x, получим

$$2(x-4)+2y\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x-4}{y},\quad y\frac{dy}{dx}=-(x-4).$$

Следовательно,

$$S=2\pi\int_{2}^{4}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{2}^{4}\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{2}^{4}\sqrt{36-(x-4)^2+(x-4)^2}\,dx=12\pi\int_{2}^{4}dx=12\pi x\Big|_{2}^{4}=24\pi\ \text{(кв. ед.)}.\ \bullet$$

46. Найдите площадь поверхности шарового пояса с высотой H, образованного вращением дуги окружности $x^2+y^2=r^2$ вокруг оси Ox (рис. 178).

47. Найдите площадь поверхности шарового сегмента с высотой H, образованного вращением дуги окружности $x^2+y^2=r^2$ вокруг оси Ox (рис. 179).

48. Найдите площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2+y^2=16$, заключенной между точками $A(2;\,2\sqrt{3})$ и $B(3;\,\sqrt{7})$.

49. Найдите площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Oy дуги окружности $x^2+y^2=25$, заключенной между точками $A(4;\,-3)$ и $B(3;\,4)$.

50. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги окружности $x^2+(y-2)^2=25$, заключенной между точками $A(2\sqrt{6};\,1)$ и $B(4;\,5)$.

51. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2=4x$, ограниченной точками $O(0;\,0)$ и $A(3;\,2\sqrt{3})$.

52. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2=9x$, ограниченной точками $(0;\,0)$ и $(4;\,6)$.

§ 7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

53. В шар вписан цилиндр. Радиус шара равен 29 см, площадь боковой поверхности цилиндра равна 1680π см^2. Найдите объем цилиндра.

54. В шар вписан цилиндр. Радиус основания цилиндра относится к его высоте, как 2:3. Площадь поверхности шара равна 225π. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

55. Около равностороннего цилиндра описан шар. Найдите отношение их объемов и площадей поверхностей.

56. Вокруг шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов.

57. Высота цилиндра равна 5 см. При увеличении его высоты на 4 см объем увеличится на 36π см^3. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

58. Конус и цилиндр имеют общее основание, площадь которого равна 4π см^2, и общую высоту. Отношение площади боковой поверхности конуса к площади боковой поверхности цилиндра равно 5:6. Вычислите образующие данных фигур.

59. Равнобедренный треугольник, у которого основание равно a, а угол при основании равен α, вращается вокруг боковой стороны. Вычислите площадь поверхности и объем фигуры вращения.

60. Стороны параллелограмма равны m и n; угол между ними равен α. Найдите площадь поверхности фигуры, образованной вращением параллелограмма около стороны n.

61. Конус катится по плоскости, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса равна h, образующая равна l. Найдите площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

62. Ромб со стороной a и острым углом 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно стороне. Найдите площадь поверхности полученной фигуры.

63. Высота усеченного конуса равна h, угол между диагоналями осевого сечения (обращенный к основанию) равен α, а образующая составляет с основанием острый угол β. Вычислите площадь боковой поверхности.

64. Радиус сферы равен 25 см. Сфера делится сечением площадью 49π см^2. Вычислите площади сферических частей.

65. Площадь боковой поверхности сферического сегмента составляет 0,05 площади поверхности сферы. Вычислите высоту сегмента, если радиус сферы равен 100 см.

66. Докажите, что площадь поверхности фигуры, образованной вращением квадрата около стороны, равна площади поверхности шара, радиус которого равен стороне квадрата.

67. Двояковыпуклое стекло состоит из двух равных сферических сегментов; площадь их общего основания равна S, а дуга в осевом сечении каждого сегмента равна α. Вычислите площадь поверхности этого стекла.

68. Вычислите площадь поверхности сферы, если площадь полной поверхности описанного около нее цилиндра равна S.

69. Вычислите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности вписанной в него сферы, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Прямоугольник, площадь которого равна S, вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Вычислите площадь поверхности фигуры вращеиия, если угол между диагоналями равен α.

2) В конусе образующая равна l и составляет с высотой конуса угол α. Вычислите площадь поверхности описанной сферы.

II вариант

1) Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг прямой, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно его стороне. Вычислите площадь поверхности фигуры вращения.

2) В конусе образующая равна l и составляет с высотой конуса угол α. Вычислите площадь поверхности вписанной сферы.

РАЗДЕЛ IV
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Глава 27
РЯДЫ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные понятия. *Числовым рядом* называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots , \qquad (27.1)$$

где числа u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ..., называемые *членами* ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется *общим членом* ряда.

Суммы

$$\begin{aligned} S_1 &= u_n, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \end{aligned}$$

составленные из первых членов ряда (27.1), называются *частичными суммами* этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм S_1, S_2, S_3, ..., S_n ... . Если при бескоиечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется *сходящимся*, а число S — *суммой* сходящегося ряда, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = S.$$

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

Если частичная сумма S_n ряда (27.1) при иеограниченном возрастании n ие имеет конечиого предела (в частности, стремится к $+\infty$ или к $-\infty$), то такой ряд называется *расходящимся*.

Если ряд сходится, то значение S_n при достаточно большом n является приближенным выражением суммы ряда S.

Разность $r_n = S - S_n$ иазывается *остатком* ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к иулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

2. Геометрический ряд. Рассмотрим несколько случаев нахождения частичной суммы первых n членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, образованного из членов геометрической прогрессии.

1) $|q|<1$. Для нахождения частичной суммы S_n воспользуемся формулой суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q},$$

где a_1 — первый член, $a_n=a_1q^{n-1}$ — n-й член, q — знаменатель прогрессии. Следовательно,

$$S_n=\frac{a_1-a_1q^{n-1}\cdot q}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}.$$

Находим сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}\right)=\frac{a_1}{1-q},$$

поскольку первое слагаемое под знаком предела является постоянным, а второе — бесконечно малой величиной ($q^n\to0$ при $n\to\infty$). Таким образом, в данном случае ряд сходится, а его сумма есть $S=\frac{a_1}{1-q}$.

2) $|q|>1$. Частичную сумму S_n найдем по формуле суммы членов возрастающей геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=\frac{a_1q^{n-1}q-a_1}{q-1}=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}=\frac{a_1q^n}{q-1}-\frac{a_1}{q-1}.$$

Тогда сумма ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1q^n}{q-1}-\frac{a_1}{q-1}\right)=\infty,$$

так как первое слагаемое под знаком предела есть бесконечно большая величина ($q^n\to\infty$ при $n\to\infty$). В этом случае ряд расходится.

3) $q=1$. Находим

$$S_n=a_1+a_1+a_1+\ldots+a_1=a_1n.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1n)=\infty$. Значит, в данном случае ряд расходится.

4) $q=-1$. Имеем

$$S_1=a,$$
$$S_2=a-a=0,$$
$$S_3=a-a+a=a,$$
$$S_4=a-a+a-a=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

т. е. $S_n=0$ при n четном и $S_n=a$ при n нечетном. Отсюда следует, что последовательность частичных сумм не имеет предела и, значит, ряд расходится.

Итак, данный ряд сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geqslant1$. Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ будем называть *геометрическим рядом*.

3. Гармонический ряд. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

называется *гармоническим*.

Запишем частичную сумму этого ряда:

$$S_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots.$$

Сумма S_n больше суммы, представленной следующим образом:

$$S_n>\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

или

$$S_n>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots.$$

Если $n\to\infty$, то

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\to\infty, \text{ или } S_n=1+\frac{1}{2}(n-1)\to\infty.$$

Следовательно, если $n\to\infty$, то $S_n\to\infty$, т. е. гармонический ряд расходится.

1. Записать ряд по его заданному общему члену: 1) $u_n=\frac{n+1}{2^n}$; 2) $u_n=\frac{n+2}{2n-1}$; 3) $u_n=\frac{x^n}{n!}$.

○ 1) Полагая $n=1$, $n=2$, $n=3$, ..., имеем бесконечную последовательность чисел: $u_1=\frac{2}{3}$, $u_2=\frac{3}{4}$, $u_3=\frac{4}{8}$, ... Сложив ее члены, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}+\ldots.$$

2) Поступая так же, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n-1}=\frac{3}{1}+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+\ldots+\frac{n+2}{2n-1}+\ldots.$$

3) Придавая n значения 1, 2, 3, ... и учитывая, что $1!=1$, $2!=1\cdot2$, $3!=1\cdot2\cdot3$, ..., получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots. ●$$

2. Найти n-й член ряда по его данным первым членам:

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$; 2) $-1+\frac{\sqrt{2}}{1\cdot2}-\frac{\sqrt{3}}{1\cdot2\cdot3}+\ldots$; 3) $\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{3}{5}-\ldots$.

○ 1) Знаменатели членов ряда, начиная с третьего, являются нечетными числами; следовательно, n-й член ряда имеет вид $\frac{1}{2n+1}$.

2) Числители членов ряда представляют собой квадратные корни из натуральных чисел, а их соответствующие знаменатели равны $n!$. Знаки чередуются по закону $(-1)^n$. Общий член ряда имеет вид $(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}}{n!}$.

3) Числители членов ряда образуют натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели — натуральный ряд чисел, начиная с 3. Знаки чередуются по закону $(-1)^{n+1}$ или по закону $(-1)^{n-1}$. Значит, n-й член ряда имеет вид $(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}$ или $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}$.

3. Найти сумму членов ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$.

○ 1) Находим частичные суммы членов ряда:

$$S_1=u_1=\frac{1}{3};\ S_2=u_1+u_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5};$$

$$S_3=u_1+u_2+u_3=\frac{2}{5}+\frac{1}{35}=\frac{3}{7};\ S_4=u_1+u_2+u_3+u_4=\frac{3}{7}+\frac{1}{63}=\frac{4}{9},\ldots.$$

Запишем последовательность частичных сумм: $\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \ldots,\ \frac{n}{2n+1},\ \ldots$.

Общий член этой последовательности есть $\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$. Следовательно,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Последовательность частичных сумм имеет предел, равный 1/2. Итак, ряд сходится и его сумма равна 1/12.

2) Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, в которой $a_1=1/2$, $q=1/2$. Используя формулу $S=\frac{a_1}{1-q}$, получим $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$. Значит, ряд сходится и его сумма равна 1. ●

4. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:

1) $u_n=\frac{n}{n+1}$; 2) $u_n=\frac{2n}{2n-1}$; 3) $u_n=\frac{2^n+3}{2^{n+1}}$;

4) $u_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$; 5) $u_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

5. Найдите первые четыре члена ряда по его заданному общему члену:

1) $u_n=\frac{(n+1)!}{2n}$; 2) $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 3) $u_n=\frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$;

4) $u_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2n}$; 5) $u_n=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$.

6. Найдите n-й член ряда по его данным первым членам:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$; 2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots$;

3) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\sqrt[3]{3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{\sqrt[3]{4}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots$; 4) $\frac{2}{4}-\frac{4}{9}+\frac{6}{16}-\frac{8}{25}+\ldots$.

7. Найдите формулу общего члена ряда по его данным первым членам:

1) $\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{8}{9}+\frac{16}{16}+\ldots$; 2) $\frac{1}{9}+\frac{1\cdot2}{25}+\frac{1\cdot2\cdot3}{49}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{81}+\ldots$;

3) $\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{7\cdot10}+\frac{1}{9\cdot12}+\ldots$; 4) $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{11}-\frac{5}{14}+\ldots$.

8. Вычислите сумму членов ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$;

4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}+\ldots$.

§ 2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Необходимый признак сходимости ряда. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *может сходиться только при условии, что его общий член* u_n *при неограниченном увеличении номера* n *стремится к нулю:* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится — это достаточный признак расходимости ряда.

2. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. а) **Признак сравнения рядов с положительными членами.** *Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого,*

заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \quad (a>0),$$

который сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geqslant 1$ (см. § 1, п. 2), и гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots ,$$

являющийся расходящимся (см. § 1, п. 3).

При исследовании рядов используется также *обобщенный гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots .$$

Если $p=1$, то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если $p<1$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При $p>1$ имеем геометрический ряд, в котором $|q|<1$; он является сходящимся. Итак, *обобщенный гармонический ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.*

б) **Признак Даламбера.** *Если для ряда с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \quad (u_n>0)$$

выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *то ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.*

Признак Даламбера не дает ответа, если $l=1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

9. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^2} + \dfrac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} + \ldots ;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{n}{n+1} + \ldots ;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots ;$

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} + \ldots + \dfrac{1}{\ln n} + \ldots .$

○ 1) Находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = 0$. Необходимый признак сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости нужно

применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots ,$$

который сходится, так как $q=1/2<1$.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2} < \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{5\cdot 2^3} < \frac{1}{2^3};\ \ldots;\ \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n};\ \ldots ,$$

т. е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

2) Имеем

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда; следовательно, ряд расходится. При сравнении данного ряда с гармоническим также убеждаемся, что ряд расходится.

3) Находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 0$. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \ldots + \frac{1}{n^{3/2}} + \ldots ,$$

который сходится, поскольку $p=3/2>1$ (см. п. 2). Следовательно, сходится и данный ряд.

4) Находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$. Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Для всех $n\geqslant 2$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$; следовательно, ряд расходится, так как его члены превосходят соответствующие члены гармонического (расходящегося) ряда.

10. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{5^n} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{25} + \dfrac{6}{125} + \ldots + \dfrac{2n}{5^n} + \ldots ;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2} = \dfrac{3}{1^2} + \dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{3^3}{3^2} + \ldots + \dfrac{3^n}{n^2} + \ldots ;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1\cdot 2}{3^2} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3} + \ldots + \dfrac{n!}{3^n} + \ldots .$

○ 1) Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число $n+1$, получим $\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$. Найдем предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му члену при $n\to\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

2) Имеем $u_n=\frac{3^n}{n^2}$; $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}=\frac{3n^2}{(n+1)^2}=3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=3\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=3>1.$$

Значит, данный ряд расходится.

3) Имеем $u_n=\frac{n!}{3^n}$; $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}=\frac{(n+1)\cdot n!}{3^{n+1}}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)n!}{3^{n+1}}:\frac{n!}{3^n}=\frac{n+1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty>1,$$

т. е. ряд расходится. ●

11. Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак и один из признаков сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$.

12. Исследуйте сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot2^n}=\frac{1}{3\cdot2}+\frac{2}{3\cdot2^2}+\frac{3}{3\cdot2^3}+\ldots+\frac{n}{3\cdot2^n}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}=\frac{1\cdot2}{3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{3^2}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{3^3}+\ldots+\frac{(n+1)!}{3^n}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}=\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3^2}{2\cdot3}+\frac{3^3}{3\cdot4}+\ldots+\frac{3^n}{n(n+1)}+\ldots$.

13. Исследуйте сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n}=1+\frac{5}{4}+\frac{8}{6}+\ldots+\frac{3n-1}{2n}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot3}+\frac{1}{9\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n^2(n+1)}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot3^n}=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot3^2}+\frac{1}{4\cdot3^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot3^n}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{10\cdot n^{10}}=\frac{3}{10\cdot1^{10}}+\frac{3^2}{10\cdot2^{10}}+\frac{3^3}{10\cdot3^{10}}+\ldots+\frac{3^n}{10\cdot n^{10}}+\ldots$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Найдите первые четыре члена ряда по заданному общему члену:

а) $a_n=\frac{1}{(2n+1)\cdot2^{n-1}}$;

б) $a_n=\frac{n+1}{(2n-1)\cdot3^{n-1}}$.

2) Найдите формулу общего члена ряда:

а) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\ldots$;

б) $\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{8}{9}+\ldots$.

3) Вычислите сумму членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

II вариант

1) Найдите первые четыре члена ряда по заданному общему члену:

а) $a_n=\frac{3n+2}{(3n-1)\cdot2^{n-1}}$;

б) $a_n=\frac{3n+1}{(n^2+1)\cdot3^{n-1}}$.

2) Найдите формулу общего члена ряда:

а) $\frac{5}{1}+\frac{9}{2}+\frac{13}{3}+\ldots$;

б) $\frac{4}{2}+\frac{7}{4}+\frac{10}{12}+\ldots$.

3) Вычислите сумму членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

4) Используя признак сравнения, исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}.$$

5) Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}.$$

4) Используя признак сравнения, исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

5) Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}.$$

§ 3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ. ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ЛЕЙБНИЦА ДЛЯ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ РЯДОВ

Числовой ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (27.2)$$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд (27.2) называется *знакочередующимся*, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов. *Если члены знакочередующегося ряда* (27.2) *монотонно убывают по абсолютной величине и общий член* u_n *стремится к нулю при* $n\to\infty$, *то ряд* (27.2) *сходится.*

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд (27.2) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots, \qquad (27.3)$$

составленный из абсолютных величин его членов, т. е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд (27.2) сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд (27.3) расходится, то данный ряд (27.2) называется *условно (неабсолютно) сходящимся*. Заметим, что из расходимости ряда (27.3) в общем случае не следует расходимость ряда (27.2).

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

Для решения вопроса об абсолютной или условной сходимости знакочередующегося ряда необходимо рассмотреть ряд, составленный из абсолютных велнчин членоа знакочередующегося ряда.

Если при исследовании этого ряда с помощью одного из признаков сходимости (признака Даламбера, признака сравнения рядов) ряд окажется сходящимся, то данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно; если же ряд окажется расходящимся, то знакочередующийся ряд сходится условно.

14. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$.

○ 1) Члены даиного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является гармоническим рядом, который, как известно, расходится. Поэтому данный ряд сходится условио.

2) Члеиы данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1>\frac{2}{3}>\frac{3}{5}>\frac{4}{7}>\ldots$, но

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Ряд расходится, так как признак Лейбница не выполняется.

3) Используя признак Лейбница, получим

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\ldots;\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0;$$

т. е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

Это геометрический ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ ($q=1/2$), который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

4) Используя признак Лейбница, имеем

$$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\ldots;\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

т. е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\frac{1}{4^{1/2}}+\ldots+\frac{1}{n^{1/2}}+\ldots.$$

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $p=1/2<1$. Следовательно, данный ряд сходится условно. ●

15. Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}=-\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots.$$

○ Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots.$$

Для исследования этого ряда применим признак Даламбера. Имеем

$$u_n=\frac{n}{2^n};\ u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд, составленный из абсолютных величин, сходится; следовательно, данный знакопеременный ряд сходится абсолютно. ●

16. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующиеся ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(3n-1)^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots;$

2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{2n+1}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{7}-\frac{3}{9}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{2n+1}+\ldots;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)!}+\ldots;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}=-1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\ldots.$

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{4n-1}.$

2) Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{1/4}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot 3^n}.$

II вариант

1) Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{6n-1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}.$

2) Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(4n-1)^2}.$

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ ЧЛЕНОВ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩЕГОСЯ РЯДА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ И ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА

Согласно признаку Лейбница, знакочередующийся ряд

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot u_n+\ldots$$

сходится, если члены его монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Сумма этого ряда по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена ряда, т. е. $0<|S|<|u_1|$, а остаток r_n по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда u_{n+1}, т. е. $|r_n|<|u_{n+1}|$.

Сумму членов сходящегося ряда можно записать в виде $S=S_n+r_n$, где S_n — частичная сумма ряда.

Остаток r_n знакочередующегося сходящегося ряда также является знакочередующимся рядом. Если первый член остатка отрицателен, то и остаток отрицателен; тогда $S_n>S$, т. е. частичная сумма ряда вычисляется с избытком. Если же первый член остатка положителен, то $S_n<S$, т. е. частичная сумма ряда вычисляется с недостатком.

Признак Лейбница позволяет оценить погрешность при приближенных вычислениях с помощью знакочередующихся рядов. Погрешность, допускаемая при замене суммы сходящегося ряда суммой нескольких первых его членов, меньше абсолютной величины первого из отброшенных членов.

17. Используя признак Лейбница, установить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$ и оценить погрешность, допускаемую при замене суммы членов этого ряда: 1) суммой первых четырех его членов; 2) суммой первых пяти его членов.

○ Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

знакочередующийся. Согласно признаку Лейбница, он сходится.

1) Имеем $S=S_4+r_4$, или $S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+r_4$, откуда

$$S_4=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{115}{144}\approx 0{,}7986;\quad S=0{,}7986+r_4.$$

Так как $|r_4|<|u_5|$, то $|r_4|<1/5^2=0{,}04$ $(r_4>0)$; следовательно, $0<r_4<0{,}04$.

Сумма ряда $S\approx 0{,}7986$ (с недостатком) вычислена с погрешностью, не превышающей 0,04.

2) Имеем $S=S_5+r_5$, или

$$S=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+r_5,\ \text{т. е. } S=0{,}8386+r_5.$$

Так как $|r_5|<|u_6|$, то $|r_5|<1/36\approx 0{,}0278$. Из данного ряда видно, что $r_5<0$; следовательно, $-0{,}0278<r_5<0$.

Сумма ряда $S\approx 0{,}8386$ (с избытком) вычислена с погрешностью, не превышающей 0,0278. ●

18. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

○ Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}=1-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{n^2}+\ldots$$

знакочередующийся; так как его члены убывают по абсолютной величине и

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0,$$

то, согласно признаку Лейбница, он сходится.

Имеем $|r_n|<|u_{n+1}|$. Найдем такое n, чтобы $|u_{n+1}|\leqslant 0{,}01$, т. е. чтобы

$$|u_{n+1}|=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{(n+1)^2}\leqslant 0{,}01.$$

Решим уравнение $\frac{2n+1}{(n+1)^2}=0{,}01$; имеем

$$\frac{(2n+1)\cdot 100}{(n+1)^2}=1;\quad 200n+100=n^2+2n+1;$$

$$\begin{cases}n^2-198n-99=0,\\ n>0;\end{cases}\qquad n\approx 200.$$

Итак, чтобы вычислить сумму данного ряда с точностью до 0,01, необходимо взять 200 членов этого ряда. ●

19. 1) Дан сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$.

Оцените погрешность, допускаемую при замене суммы членов этого ряда суммой первых четырех его членов.

2) Дан сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Оцените погрешность, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой первых пяти его членов.

20. 1) Дан сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+1)^2}$.

Сколько членов этого ряда нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

2) Дан сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(2n)^2}$.

Сколько членов этого ряда нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

§ 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,\qquad(27.4)$$

где числа a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... называются *коэффициентами* ряда, а член a_nx^n – *общим членом* ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Число R называется *радиусом сходимости* ряда (27.4), если при $|x|<R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится.

Радиус сходимости R можно найти, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

(x не зависит от n), откуда

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\qquad(27.5)$$

т. е. если ряд (27.4) сходится при любых x, удовлетворяющих условию (27.5), и расходится при

$$|x|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.\qquad(27.6)$$

Отсюда следует, что если существует предел

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\quad(a_n\neq 0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots),\qquad(27.7)$$

то радиус сходимости ряда R равен этому пределу и ряд (27.4) сходится при $|x|<R$, т. е. в промежутке $-R<x<R$, который называется *промежутком (интервалом) сходимости*.

Если предел (27.7) равен нулю ($R=0$), то ряд (27.4) сходится в единственной точке $x=0$.

На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться. Сходимость ряда (27.4) при $x=-R$ и $x=R$ исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

21. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3^2}x^2+\frac{3}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n}{3^n}x^n+\ldots\ .$$

Исследовать его сходимость в точках $x=1$, $x=3$, $x=-2$.

○ При $x=1$ данный ряд превращается в числовой ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots\ .$$

Исследуем сходимость этого ряда по признаку Даламбера. Имеем

$$u_n=\frac{n}{3^n};\ u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}};\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1,$$ т. е. ряд сходится.

При $x=3$ получим ряд

$$\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3^2}\cdot 3^2+\frac{3}{3^3}\cdot 3^3+\ldots+\frac{n}{3^n}\cdot 3^n+\ldots$$

или

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots\ ,$$

который расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда $\left(\lim_{n\to\infty} n\neq 0\right)$.

При $x=-2$ получим

$$\frac{1}{3}(-2)+\frac{2}{3^2}(-2)^2+\frac{3}{3^3}(-2)^3+\ldots+\frac{n}{3^n}(-2)^n+\ldots$$

или

$$-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3^2}\cdot 2^2-\frac{3}{3^3}\cdot 2^3+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{n}{3^n}\cdot 2^n+\ldots\ .$$

Это знакочередующийся ряд, который, согласно признаку Лейбница, сходится.

Итак, в точках $x=1$ и $x=-2$ ряд сходится, а в точке $x=3$ расходится. ●

22. Найти промежуток сходимости степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n=1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\ldots+n!\,x^n+\ldots\ ;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}=x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots\ ;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n^2}=x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n^2}+\ldots\ ;$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^n=1+2(x-1)+2^2(x-1)^2+\ldots+2^n(x-1)^n+\ldots\ .$

○ 1) Используя формулу (27.7) получим

$$a_n=\frac{1}{n!};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)\cdot n!};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}=n+1;\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, промежуток сходимости есть $-\infty<x<\infty$, т. е. данный ряд сходится на всей числовой оси.

2) Согласно формуле (27.7), находим

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)\cdot n!};\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0.$$

Ряд сходится только в одной точке $x=0$.

3) Используя формулу (27.7), получим

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}};\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\sqrt{1+\frac{1}{n}};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right|=1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно при $-1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x=-1$ и $x=1$. При $x=-1$ имеем ряд

$$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots\ .$$

Это знакочередующийся ряд, который в силу признака Лейбница сходится.

При $x=1$ имеем ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

или

$$1+\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\ldots+\frac{1}{n^{1/2}}+\ldots\ .$$

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $p=1/2<1$. Отсюда следует, что данный ряд сходится при $-1\leqslant x<1$.

4) Согласно формуле (27.7), получим

$$a_n=\frac{1}{n^2};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2;$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right|=1.$$

Ряд сходится в промежутке $-1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x=-1$ и $x=1$. При $x=-1$ имеем знакочередующийся ряд

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots .$$

В силу признака Лейбница он сходится. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots ,$$

составленный из абсолютных величин его членов, есть обобщенный гармонический ряд, который сходится, так как $p=2>1$.

При $x=1$ имеем тот же сходящийся обобщенный гармонический ряд. Следовательно, данный ряд сходится в промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1$.

5) Полагая $x-1=y$, получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n y^n$ (*). Используя формулу (27.7), имеем

$$a_n=2^n;\ a_{n+1}=2^{n+1};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Получили промежуток $-1/2<y<1/2$. Исследуем сходимость ряда в точках $y=-1/2$ и $y=1/2$. При $y=-1/2$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n=$ $=1-1+1-\ldots$, который расходится. При $y=1/2$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$, который также расходится. Следовательно, ряд (*) сходится в промежутке $-1/2<y<1/2$.

Выразив y через x, получим $-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2}+1<x<\frac{1}{2}+1$, или $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$. Это искомая область сходимости данного ряда. ●

23. Исследуйте сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot x^n$ в точках $x=-1$ и $x=2$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$ в точках $x=-2$ и $x=2$.

24. Найдите промежуток сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n}\cdot x^n$.

25. Найдите промежуток сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{(n+1)\cdot 4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots . \qquad (27.8)$$

Если $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots , \qquad (27.9)$$

который называется *рядом Маклорена*.

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и исходный ряд.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилам сложения и умножения многочленов. При этом промежуток сходимости полученного нового ряда совпадает с общей частью промежутков сходимости исходных рядов.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=0$, т. е. $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$;

2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу (27.9);

3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле (27.7).

Для разложения функции в ряд Тейлора необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=a$, т. е. $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$;

2) составить ряд Тейлора, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу (27.8);

3) найти промежуток сходимости по формуле (27.7).

26. Разложить в ряд Маклорена функцию:

1) $f(x)=e^x$; 2) $f(x)=\sin x$; 3) $f(x)=\cos x$; 4) $f(x)=\frac{1}{1+x}$;

5) $f(x)=\ln(1+x)$; 6) $f(x)=(1+x)^m$; 7) $f(x)=\frac{1}{1-x}$; 8) $f(x)=\cos^2 x$;

9) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; 10) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

○ 1) Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ..., $f^{(n)}(x)=e^x$; $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, ..., $f^{(n)}(0)=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$.

Подставив эти значения в формулу (27.9), получим разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Этот ряд называется *экспоненциальным рядом*.

Промежуток сходимости найдем по формуле (27.7):

$$a_n=\frac{1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n!};\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{n!}=n+1;$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|n+1|=\infty,\ \text{т. е.}\ -\infty<x<\infty.$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)=e^x$ при любых значениях x, так как в любом промежутке функция $f(x)=e^x$ и ее производные по абсолютной величине ограннчены одним и тем же числом.

2) Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$; $f(0)=0$, $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$.Заметим, что производные четного порядка $f^{(2n)}(0)=0$, а производные нечетного порядка $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4, ...)$.

Подставив эти значения в формулу (27.9), получим разложение синуса в ряд Маклорена:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ ...\ +(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ ...\ .$$

Промежуток сходимости полученного ряда найдем по формуле (27.7):

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{[2(n+1)-1]!}=\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 2n(2n-1)!}.$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(2n+1)\cdot 2n(2n-1)!}{(2n-1)!}=(2n+1)\cdot 2n;\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|(2n+1)\cdot 2n|=\infty,$$

т. е. ряд сходится в промежутке $-\infty<x<\infty$.

3) Рассуждая так же, как и в п. 2, аналогично получаем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ ...\ +(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ ...\ ,$$

причем этот ряд сходится в промежутке $-\infty<x<\infty$.

4) Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$, ..., $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)...}{(1+x)^{n+1}}$; $f(0)=1$; $f'(0)=-1$; $f''(0)=2$; $f'''(0)=-2\cdot 3$; ..., $f^{(n)}(0)=(-1)^n n(n-1)(n-2)...$.

Подставив эти значения в формулу (27.9), получим разложение фуикции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ в ряд Маклореиа:

$$\frac{1}{1+x}=1-\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2-\frac{2\cdot 3}{3!}x^3+\ ...\ +(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n+\ ...$$

или

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ ...\ +(-1)^n x^n+\ ...\ .$$

Промежуток сходимости найдем по формуле (27.7): $a_n=1$, $a_{n+1}=1$; $a_n/a_{n+1}=1$; $R=1$. Следовательно, $-1<x<1$.

При $x=-1$ и $x=1$ ряд расходится, поэтому область сходимости ряда — промежуток $-1<x<1$.

5) I способ. Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}$, $f^{IV}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^4}$; $f(0)=\ln 1=0$, $f'(0)=1$; $f''(0)=-1$, $f'''(0)=2!$, $f^{IV}(0)=-3!$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4, ...).$$

Подставив эти значения в формулу (27.9), получим разложение данной функции в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ ...\ +(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ ...\ .$$

Этот ряд называется *логарифмическим рядом*.

Промежуток сходимости найдем по формуле (27.7): $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$; $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$; $R=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right|=1$, т. е. $-1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда в точках $x=-1$ и $x=1$. При $x=-1$ ряд расходится как гармонический. При $x=1$ имеем знакочередующнйся ряд

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ ...\ +(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ ...\ ,$$

который сходится по признаку Лейбница. Итак, данный ряд сходится в промежутке $-1<x\leqslant 1$.

II способ. Известно, что $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}$; поэтому разложение в ряд найдем почленным интегрированием ряда для дроби $\frac{1}{1+x}$ (см. п. 4 данного примера):

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ ...\ .$$

Отсюда

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\int_0^x(1-x+x^2-x^3+...)\,dx=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ ...\ \ (-1<x\leqslant 1).$$

6) Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=(1+x)^m$, $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$, $f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$, $f'''(x)=m(m-1)\times$ $\times(m-2)(1+x)^{m-3}$, ..., $f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](1+x)^{m-n}$; $f(0)=1$; $f'(0)=m$; $f''(0)=m(m-1)$; $f''(0)=m(m-1)(m-2)$; ...; $f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots\times$ $\times[m-(n-1)]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Подставив эти значения в формулу (27.9), получим разложение функции $f(x)=(1+x)^m$ в ряд Маклорена:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Этот ряд иазывается *биномиальным рядом*. Если m — целое положительное число, то ряд превращается в конечиую сумму и получается формула бинома Ньютона.

Используя формулу (27.7), найдем промежуток сходимости ряда:

$$a_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)n!};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\cdot(n+1)\cdot n!}{n!\,m(m-1)\ldots(m-n)}=\frac{n+1}{m-n}=\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{m}{n}-1};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{m}{n}-1}\right|=1.$$

Следовательно, ряд сходится к функции $(1+x)^m$ в промежутке $-1<x<1$. При $|x|>1$ ряд расходится. В точках $x=-1$ и $x=1$ ряд может сходиться и расходиться в зависимости от показателя степеии m. Так, при $m>0$ и $x=\pm1$ ряд сходится абсолютно; при $-1<m<0$ и $x=1$ сходится условно; при $m\leqslant-1$ и $x=1$, а также при $m<0$ и $x=-1$ ряд расходится.

7) Воспользуемся биномиальным рядом (см. п. 6 данного примера):

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Заменяя в этой формуле x на $-x$ и полагая $m=-1$, получим

$$\frac{1}{1-x}=[1+(-x)]^{-1}=1+\frac{(-1)}{1!}(-x)+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}(-x)^2+$$

$$+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(-x)^3+\ldots+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\ldots(-n)}{n!}(-x)^n+\ldots=$$

$$=1+x+x^2+x^3+\ldots x^n+\ldots(-1<x<1).$$

8) Воспользуемся разложением в ряд Маклорена $\cos x$ (см. п. 3 данного примера):

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty).\qquad(*)$$

Замеиив в этом разложении x иа $2x$, получим

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

или

$$\cos 2x=1-\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots.$$

Разложение (*) справедливо при любом x; поэтому ряд Маклорена для $\cos 2x$ сходится к порождающей его функции также на всей числовой оси.

Составим разложение в ряд Маклорена для функции $f(x)=\cos^2 x$. Из тригонометрии известно, что $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; следовательно,

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right]=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots.$$

9) Запишем выражение данной функции в виде иитеграла: $\operatorname{arctg}x=$

$$=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}.$$

Разложим подынтегральную функцию $\dfrac{1}{1+x^2}$ в ряд Маклорена. Для этого в разложении

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\quad(-1<x<1)$$

(см. п. 7 даиного примера) заменим x на $-x^2$; тогда получим

$$\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^nx^{2n}+\ldots.$$

Интегрируя этот ряд внутри промежутка его сходимости $-1<x<1$, находим

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^nx^{2n}+\ldots)\,dx,$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Этот ряд сходится в промежутке $-1\leqslant x\leqslant1$.

10) Воспользуемся разложением

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$$

(см. п. 2 данного примера). Разделив обе части этого равенства на x, получим

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty.\ \bullet$$

27. Разложить в ряд Тейлора функцию:
1) $f(x)=e^{2x}$ по степеням $x-1$; 2) $f(x)=\ln x$ по степеням $x-1$; 3) $f(x)=\cos x$ по степеням $x-\frac{\pi}{6}$.

○ 1) I способ. Вычислим значения данной функции и ее производных при $x=1$; имеем: $f(x)=e^{2x}$, $f'(x)=2e^{2x}$, $f''(x)=4e^{2x}$, $f'''(x)=8e^{2x}$, ..., $f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}$; $f(1)=e^2$, $f'(1)=2e^2$, $f''(1)=4e^2$, $f'''(1)=8e^2$, ..., $f^{(n)}(1)=2^ne^2$.

Подставив эти значения в формулу (27.8), получим разложение функции $f(x)=e^{2x}$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$:

$$e^{2x}=e^2\left[1+\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+\ldots\right].$$

Промежуток сходимости ряда найдем по формуле (27.7):

$$a_n=\frac{2^n}{n!},\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)n!};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^n(n+1)n!}{n!\,2^{n+1}}=$$

$$=\frac{n+1}{2};\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right|=\infty,$$

т. е. промежуток сходимости — вся числовая ось.

II способ. Если в разложении

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<\infty)$$

(см. п. 1 примера 26) заменим x на $2x$, то получим ряд Маклорена для функции e^{2x}:

$$e^{2x}=1+\frac{2}{1!}x+\frac{2^2}{2!}x^2+\ldots+\frac{2^n}{n!}x^n+\ldots.\qquad(*)$$

Функцию e^{2x} представим в виде $e^{2(x-1)}e^2$ и подставим это выражение в формулу (*), заменив x на $x-1$. Получим

$$e^{2x}=e^{2(x-1)}e^2=e^2\left[1+\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{2^2}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+\ldots\right].$$

2) Вычислим значения функции и ее производных в точке $x=1$; имеем $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$, $f^{IV}(x)=-\frac{2\cdot3}{x^4}$, ..., $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; $f(1)=\ln1=0$; $f'(1)=1$; $f''(1)=-1$; $f'''(1)=2$; $f^{IV}(1)=-2\cdot3$, ..., $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

Подставив эти значения в формулу (27.8), получим разложение функции $f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$:

$$\ln x=0+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{-1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\ldots$$

или

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\ldots.$$

Используя формулу (27.7), найдем промежуток сходимости:

$$a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right|=1,\ \text{т. е. } -1<x<1.$$

Исследуем ряд на сходимость при $x=-1$ и $x=1$. При $x=-1$ получим расходящийся ряд $-2-2-\frac{8}{3}-4-\ldots$, а при $x=1$ — расходящийся ряд $0-0+0-\ldots$. Следовательно, ряд сходится в промежутке $-1<x<1$.

3) Вычислим значения функции и ее производных в точке $x=\pi/6$; имеем $f(x)=\cos x$, $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{IV}(x)=\cos x$; $f(\pi/6)=\sqrt{3}/2$; $f'(\pi/6)=-1/2$; $f''(\pi/6)=-\sqrt{3}/2$, $f'''(\pi/6)=1/2$, $f^{IV}(\pi/6)=\sqrt{3}/2$.

Подставив эти значения в формулу (27.8), получим разложение функции $f(x)=\cos x$ в ряд Тейлора по степеням $x-\pi/6$:

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{2\cdot3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\ldots$$

или

$$\cos x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\ldots\right].\ \bullet$$

28. Разложите в ряд Маклорена функцию:
1) $f(x)=e^{4x}$; 2) $f(x)=e^{-x^2}$;
3) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$; 4) $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$.

29. Разложите в ряд Маклорена функцию:
1) $f(x)=\sin3x$; 2) $f(x)=\sin x^2$; 3) $f(x)=\cos2x$;
4) $f(x)=\sin^2x$; 5) $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$.

30. Найдите три первых отличных от нуля члена разложения в ряд Маклорена функции: 1) $f(x)=xe^x$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=e^x\cos x$; 4) $f(x)=e^{-x}\sin x$; 5) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

31. С помощью биномиального ряда найдите пять первых членов разложения в ряд Маклорена функции: 1) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$; 2) $f(x)=\sqrt{1-x}$; 3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; 4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

32. Разложите в ряд Тейлора функцию: 1) $f(x)=x^3$ по степеням $x-1$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням $x+3$; 3) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ по степеням $x+2$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ по степеням $x-1$.

33. Разложите в ряд Тейлора функцию: 1) $f(x)=\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{4}$; 2) $f(x)=\cos x$ по степеням $x+\frac{\pi}{3}$; 3) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ по степеням $x+\frac{\pi}{2}$; 4) $f(x)=\sin^2 x$ по степеням $x-\frac{\pi}{6}$.

34. Разложите в ряд Тейлора функцию: 1) $f(x)=e^{-3x}$ по степеням $x+1$; 2) $f(x)=xe^x$ по степеням $x-2$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант	II вариант
1) Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$.	1) Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.
2) Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos\frac{x}{3}$.	2) Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln(1+5x)$.
3) Разложите в ряд Тейлора по степеням $x+3$ функцию $f(x)=e^{-2x}$.	3) Разложите в ряд Тейлора по степеням $x-\frac{\pi}{3}$ функцию $f(x)=\cos x$.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

С помощью формул Тейлора и Маклорена находят числовые значения различных функций. На основании этих формул составлены различные таблицы числовых значений тригонометрических, логарифмических, показательных функций, таблицы квадратных и кубических корней и т. д.

В настоящее время для вычисления значений различных функций используются также микрокалькуляторы и ЭВМ, которые гарантируют достаточную точность и быстроту вычислений. Вместе с тем рассмотренные в этом параграфе примеры вычисления значений функций с помощью рядов полезны не только для выработки некоторых практических навыков, но и для ознакомления с приемами составления алгоритмов вычисления различных функций.

35. Вычислить $\sin 16^\circ$ с точностью до 0,0001.

○ При вычислении приближенного значения функции с заданной точностью удобно пользоваться знакочередующимися рядами, так как погрешность приближенного значения суммы меньше абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Рассмотрим ряд

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots.$$

Переведем градусную меру угла в радианную: $x=16^\circ\approx 0{,}27925$ рад. Подставив это значение в разложение $\sin x$, получим

$$\sin x=0{,}27925-\frac{0{,}27925^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0{,}27925^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\dots=0{,}27925-0{,}00363+0{,}000014-\dots$$

(вычисления произведены на микрокалькуляторе). Абсолютная величина третьего члена этого ряда меньше 0,0001 ($0{,}000014<0{,}0001$); тогда согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда, для вычисления приближенного значения достаточно взять сумму двух первых членов ряда, т. е. $\sin 16^\circ\approx 0{,}27925-0{,}00363=0{,}2756$. ●

36. Вычислить $\ln 1{,}2$ с точностью до 0,0001.

○ Рассмотрим ряд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

Полагая $x=0{,}2$, получим

$$\ln 1{,}2=0{,}2-\frac{(0{,}2)^2}{2}+\frac{(0{,}2)^3}{3}-\frac{(0{,}2)^4}{4}+\frac{(0{,}2)^5}{5}-\dots=$$

$$=0{,}2-0{,}02+0{,}00267-0{,}0004+0{,}00006-\dots.$$

Поскольку $0{,}00006<0{,}0001$, для приближенного значения $\ln 1{,}2$ с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму первых четырех членов ряда. Окончательно находим $\ln 1{,}2=0{,}2-0{,}02+0{,}00267-0{,}0004=0{,}18227\approx 0{,}1823$. ●

37. Извлечь $\sqrt[3]{1{,}025}$ с точностью до 0,00001.

○ Имеем $\sqrt[3]{1{,}025}=(1+0{,}025)^{1/3}$. Рассмотрим биномиальный ряд

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\dots.$$

Полагая $x=0{,}025$ и $m=1/3$, получим

$$(1+0{,}025)^{1/3}=1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}025+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}(0{,}025)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(0{,}025)^3+\dots=$$

$$=1+0{,}008333-0{,}000069+0{,}000001.$$

Это знакочередующийся ряд, в котором четвертый член $0{,}000001<0{,}00001$; следовательно, для приближенного вычисления $\sqrt[3]{1{,}025}$ с точностью до 0,00001 достаточно взять три первых члена суммы ряда. Итак, $(1+0{,}025)^{1/3}=1+0{,}00833-0{,}000069=1{,}00826$. ●

Используя соответствующие ряды, выполните вычисления с заданной точностью. Ответ проверьте на микрокалькуляторе.

38. С точностью до 0,0001: 1) $\sin 26^\circ$; 2) $\sin 38^\circ$; 3) $\cos 16^\circ$; 4) $\cos 47^\circ$.

39. С точностью до 0,0001: 1) $\ln 1{,}02$; 2) $\ln 1{,}1$.

40. С точностью до 0,001: 1) $\sqrt{1{,}003}$; 2) $\sqrt[3]{1{,}012}$; 3) $\sqrt[5]{1{,}2}$.

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Если функция не интегрируется в конечном виде или ее интегрирование приводит к громоздким вычислениям, то определенный интеграл от такой функции вычисляется с помощью рядов.

В этом случае первообразную функцию сначала выражают в виде ряда, а затем вычисляют определенный интеграл с заданными пределами интегрирования. Число членов полученного ряда определяется заданной точностью вычисления.

41. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,000001.

○ Воспользуемся разложением

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$$

(см. п. 10 примера 26). Проинтегрируем этот ряд почленно:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\ldots\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\frac{x^7}{7!\cdot 7}+\frac{x^9}{9!\cdot 9}-\ldots\Big|_0^1=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}+\frac{1}{9!\cdot 9}-\ldots.$$

Полученный ряд является знакочередующимся, поэтому погрешность вычисления не превосходит первого отброшенного члена.

Вычислим $\frac{1}{9!\cdot 9}$ на микрокалькуляторе с помощью алгоритма

9 [F] [$n!$] [×] 9 [=] [F] [$\frac{1}{x}$]

Так как $\frac{1}{9!\cdot 9}\approx 0{,}0000003<0{,}000001$, то пятый член ряда меньше 0,000001. Поэтому для приближенного вычисления интеграла с точностью до 0,000001 достаточно взять сумму первых четырех членов ряда:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}.$$

Вычисления производим согласно приведенному выше алгоритму с семью десятичными знаками: $1-0{,}0555556+0{,}0016667-0{,}0000283=$ $=0{,}9460828\approx 0{,}946083$. Значит, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\approx 0{,}946083$. ●

42. Вычислить $\int_0^{0,3} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,00001.

○ Заменив в разложении

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$$

x на $(-x^2)$, получим

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно:

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2}dx=\int_0^{0,3}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}-\ldots\Big|_0^{0,3}=0{,}3-\frac{(0{,}3)^3}{3}+\frac{(0{,}3)^5}{2!\cdot 5}-\frac{(0{,}3)^7}{3!\cdot 7}+\ldots=$$

$$=0{,}3-\frac{0{,}027}{3}+\frac{0{,}00243}{10}-\frac{0{,}000219}{42}+\ldots=0{,}3-0{,}009+0{,}000243-0{,}000005+\ldots$$

Так как $0{,}000005<0{,}00001$, то для приближенного вычисления интеграла с точностью до 0,00001 достаточно взять сумму первых трех членов ряда. Значит, $\int_0^{0,3} e^{-x^2}=0{,}3-0{,}009+0{,}000243=0{,}309243\approx 0{,}30924$. ●

Используя соответствующие ряды, выполните вычисления с заданной степенью точности.

43. С точностью до 0,0001: 1) $\int_0^1 \sin x^3\,dx$; 2) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$.

44. С точностью до 0,0001: 1) $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}\,dx$; $\int_0^1 \frac{\sin\frac{x}{4}}{x}dx$.

45. С точностью до 0,001: 1) $\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$; 2) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx$.

46. С точностью до 0,0001: 1) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int_0^{0,25} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

47. С точностью до 0,001: 1) $\int_0^{0,5} xe^{-x}dx$; 2) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Глава 28
РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

1. Гармоники. Простейшей периодической функцией является синусоидальная функция $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, где A, ω и φ — постоянные. Она называется *простой гармоникой*.

Функция $f(x)$ описывает гармонические колебания, которые обусловливаются различными причинами. При этом: A — амплитуда колебания (размах колебания); $\omega x+\varphi$ — фаза колебания; φ — начальная фаза колебания; ω — круговая частота колебания.

Функция $\sin(\omega x+\varphi)$ имеет период $T=2\pi/\omega$. Величина, обратная периоду, т. е. $\nu=1/T=\omega/(2\pi)$, называется *частотой*; она показывает, сколько раз данное периодическое явление повторяется в единицу времени.

Синусоидальную функцию можно преобразовать к виду

$$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin\omega x\cos\varphi+A\cos\omega x\sin\varphi.$$

Полагая $A\sin\varphi=a$, $A\cos\varphi=b$, получим $f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$.

Простые гармоники можно складывать, причем их суммой служит простая или сложная гармоника. Если составляющие гармоники имеют одинаковую частоту, то и их сумма является гармоникой с той же частотой и с тем же периодом, т. е. простой гармоникой. При сложении гармоник разных частот получается новая периодическая функция — сложная гармоника.

Функция $f(x)$, представляющая собой сумму конечного числа гармоник:

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

является периодической функцией с периодом $T=2\pi$.

2. Тригонометрический ряд Фурье. *Тригонометрическим рядом Фурье* для фукции $f(x)$ в промежутке изменения аргумента $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ называется ряд вида

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots$$

$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots, \qquad (28.1)$$

или, короче,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (28.2)$$

где a_0, a_1, $a_2,\ldots$, a_n, $\ldots$, b_1, $b_2,\ldots$, b_n — коэффициенты ряда, называемые *коэффициентами Фурье*.

Фуикция $f(x)$ — периодическая с периодом 2π.

Тригонометрический ряд достаточно рассматрнвать только для значений x в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ (или $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$), так как за пределами указанного промежутка значений аргумента величина каждого члена ряда периодически повторяется.

Разложение функции, представляющей сложное периодическое движение, в тригонометрический ряд имеет важное значение в прикладных науках. Такое разложение в тригонометрический ряд называется *гармоническим анализом*.

Чтобы разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π в тригонометрический ряд, нужно найти коэффициенты этого ряда, которые вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \qquad (28.3)$$

$$a_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=1,\ 2,\ 3.\ldots), \qquad (28.4)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,\ 2,\ 3\ldots). \qquad (28.5)$$

Формула (28.3) получается из формулы (28.4) прн $n=0$.

3. Условия Дирихле для функций. Напомним (см. гл. 6, § 6), что точка x_0 называется точкой разрыва I рода фуикции $f(x)$, если при $x\to x_0$ существует левосторонний конечный предел $f(x_0-0)$ и правосторонний конечный предел $f(x_0+0)$, не равиые между собой, т. е. если $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.

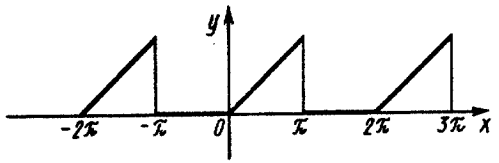


Рис. 180

Функция $f(x)$ с областью определения $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ может быть разложена в ряд Фурье, сходящийся к данной функции $f(x)$ при определенных условиях, иазываемых *условиями Дирихле*:

1) функция должна быть иепрерывной в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ или может иметь в указанном промежутке конечиое число разрывов I рода;

2) функция должна иметь конечное число экстремумов или не иметь их совсем (в технических приложениях очень редко встречаются функцин с бесконечным числом экстремумов).

4. Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$ с областью определения $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ удовлетворяет условиям Дирихле, то:*

1) *ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в указанном промежутке значений x;*

2) *сумма этого ряда равна функции $f(x)$ во всех точках непрерывности данной функции, лежащих внутри промежутка $-\pi<x<\pi$;*

3) *во всех точках разрыва сумма ряда равна $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;*

4) *на концах промежутка, т. е. при $x=-\pi$ и $x=\pi$, сумма ряда имеет одно и то же значение, равное $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.*

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)\ \begin{cases}0 \text{ при } -\pi\leqslant x<0,\\ x \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

○ График функции вместе с периодическим продолжением на всю ось Ox изображен на рис. 180.

По формулам (28.3)—(28.5) иайдем коэффициенты Фурье, учитывая, что $f(x)=0$ в промежутке $-\pi\leqslant x<0$ и $f(x)=x$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Сначала находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right].$$

Первый интеграл равен иулю, поэтому $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

Далее, находим коэффициенты a_n:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx\right].$$

Первый интеграл равен нулю, второй интеграл вычисляем по частям по формуле $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Здесь $u=x$, $dv=\cos nx\,dx$, $du=dx$, $v=\frac{1}{n}\sin nx$, откуда

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\Bigg]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\pi\sin n\pi+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\left(0+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right].$$

Придавая n значения 1, 2, 3, ..., получим $a_1=-\frac{2}{\pi}$, $a_2=0$, $a_3=-\frac{2}{3^2\pi}$, $a_4=0$, $a_5=-\frac{2}{5^2\pi}$, ...

Наконец, находим коэффициенты b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx.$$

Интегрируем по частям; полагая $u=x$, $dv=\sin nx\,dx$, $du=dx$, $v=-\frac{1}{n}\cos nx$, получим

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\Bigg]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin n\pi-(0+0)\right]=-\frac{1}{n}\cos n\pi=$$

$$=-\frac{1}{n}(-1)^n=\frac{1}{n}(-1)(-1)^n=\frac{1}{n}(-1)^{n+1},$$

откуда $b_1=1$, $b_2=-\frac{1}{2}$, $b_3=\frac{1}{3}$, $b_4=-\frac{1}{4}$, $b_5=\frac{1}{5}$, ...

Согласно формуле (28.1), имеем

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)+\left(0-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\left(-\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)+$$

$$+\left(0-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+\left(-\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)+\ldots$$

или

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$$

2. Разложите в ряд Фурье следующие периодические функции:

1) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi<x<0,\\ 0 & \text{при } 0<x<\pi\end{cases}$ в промежутке $-\pi\leqslant x<\pi$.

2) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 3 & \text{при } 0<x<\pi\end{cases}$ в промежутке $-\pi<x<\pi$.

3. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=2x+3$ в промежутке $-\pi<x<\pi$.

§ 2. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ НЕЧЕТНОЙ ФУНКЦИИ

Если в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ функция $f(x)$ является нечетной, т. е. $f(-x)=-f(x)$, то $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ldots).\tag{28.6}$$

Следовательно, нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$f(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots+b_n\sin nx+\ldots.\tag{28.7}$$

В случае, когда функция $f(x)$ определена в промежутке $0\leqslant x\leqslant\pi$, ее также можно разложить в ряд Фурье только по синусам. Для этого функцию нужно доопределить в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ так, чтобы в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ она оказалась нечетной.

Например, если функцию $f(x)=x$, где $0\leqslant x\leqslant\pi$ (рис. 181, *а*), дополнить ее нечетным продолжением в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ (рис. 181, *б*), то получим нечетную функцию, рассматриваемую в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, которую можно разложить в ряд Фурье только по синусам. Вне промежутка $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ функция является периодической с периодом 2π.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x$, если $-\pi<x<\pi$.

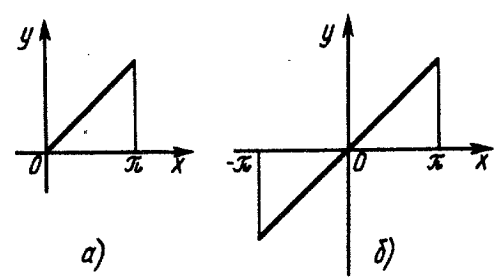


Рис. 181

○ График функции вместе с периодическим продолжением на всю ось Ox изображен на рис. 182. Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье. В промежутке $-\pi<x<\pi$ функция $f(x)=x$ — нечетная, поэтому ее можно разложить

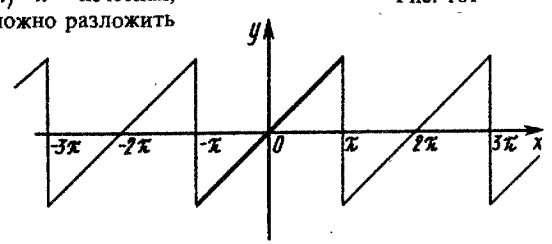


Рис. 182

в ряд Фурье только по синусам (коэффициенты при косинусах равны нулю).

Коэффициенты b_n находим по формуле (28.6):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx.$$

Интегрируем по частям; полагая $u=x$, $dv=\sin nx\,dx$, $du=dx$, $v=-\frac{1}{n}\cos nx$, имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin n\pi-(0+0)\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi\right]=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

откуда $b_1=2$, $b_2=-1$, $b_3=\frac{2}{3}$, $b_4=-\frac{1}{2}$, ...

Подставив эти значения в формулу (28.7), получим

$$x=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 4x+\dots,$$

или

$$x=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\dots\right].$$

Это равеиство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$, т. е. во всех внутренних точках промежутка $-\pi<x<\pi$. Вне этого промежутка этот ряд изображает периодическое продолжение данной функции.

В точках разрыва $\pm\pi$; $\pm3\pi$, ... сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках. Предел в точке $x=-\pi$ есть $\lim\limits_{x\to-\pi+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi+0}x=-\pi$; предел в точке $x=\pi$ есть $\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi-0}x=\pi$. Найдем среднее арифметическое этих пределов:

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

Во всех точках разрыва получим то же значение, т. е. сумма ряда равна нулю.

Полученное разложение можно записать и в таком виде:

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right]=\begin{cases}x \text{ при } -\pi<x<\pi,\\ 0 \text{ при } x=(2n+1)\pi.\end{cases}$$

Этот ряд можно использовать для вычисления значения $\pi/4$. Пусть $x=\pi/2$; тогда

$$\frac{\pi}{2}=2\left[1-0-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right],$$

откуда следует, что

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots. \bullet$$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi<x<0,\\ 1 \text{ при } 0<x<\pi.\end{cases}$$

○ В промежутке $-\pi<x<\pi$ заданная функция — нечетная (рис. 183). Такую функцию называют ступенчатой. Ее ряд Фурье содержит только синусы.

Коэффициенты b_n находим по формуле (28.6):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

откуда $b_1=\frac{4}{\pi}$, $b_2=0$, $b_3=\frac{4}{3\pi}$, $b_4=0$, $b_5=\frac{4}{5\pi}$, ...

Подставив эти значения в формулу (28.7), получим

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+\dots=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right),$$

т. е.

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x<\pi,\\ -1 \text{ при } -\pi<x<0.\end{cases}$$

В точках разрыва $x=\pm\pi$ сумма ряда равна $\pi/2$. ●

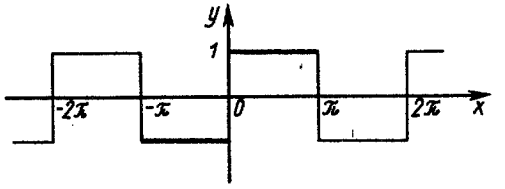


Рис. 183

Точкой разрыва функции является точка $x=0$. На основании теоремы Дирихле в этой точке сумма ряда равна нулю, т. е. среднему арифметическому значений $f(-0)=-1$ и $f(+0)=1$:

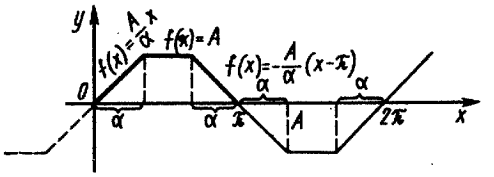


Рис. 184

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0. \bullet$$

6. В промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ разложите в ряд Фурье по синусам функции:

1) $f(x)=1\ (0<x<1)$; 2) $f(x)=x$; 3) $f(x)=\pi/4$; 4) $f(x)=\pi-2x$;

5) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \pi-x & \text{при } \pi/2 \leqslant x < \pi; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\alpha}x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ A & \text{при } \alpha \leqslant x \leqslant \pi-\alpha, \\ -\dfrac{A}{\alpha}(x-\pi) & \text{при } \pi-\alpha \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ (рис. 184).

§ 3. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНОЙ ФУНКЦИИ

Если в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функция $f(x)$ является четной, т. е. $f(-x)=f(x)$, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \tag{28.8}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \tag{28.9}$$

$$b_n=0.$$

Следовательно, четная функция разлагается в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx+\ldots\,. \tag{28.10}$$

В случае, когда функция $f(x)$ определена в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, для ее разложения в ряд Фурье только по косинусам эту функцию нужно доопределить в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ так, чтобы в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ она оказалась четной.

Например, если функцию $f(x)=x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (рис. 185, *а*), дополнить ее четным продолжением в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ (рис. 185, *б*), то полученную в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ четную функцию можно разложить в ряд только по косинусам. Вне промежутка $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функция является периодической с периодом 2π.

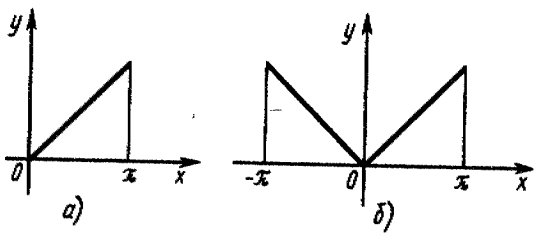


Рис. 185

Итак, если функция $f(x)$ задана в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то в соседнем промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ можно осуществить как ее нечетное, так и ее четное продолжение; следовательно, функцию $f(x)$ можно разложить или только по синусам, или только по косинусам.

7. Разложить в ряд Фурье по косинусам периодическую функцию с периодом 2π, заданную в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \pi/2 & \text{при } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

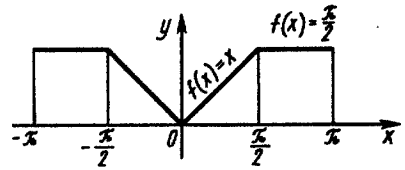


Рис. 186

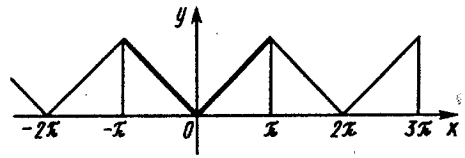


Рис. 187

○ Функция $f(x)$ задана в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но так как ее надо разложить только по косинусам, то в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ функцию $f(x)$ нужно дополнить ее четным продолжением (рис. 186).

Используя формулы (28.8) и (28.9), получим

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\pi}{2}x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3\pi^2}{8}=\frac{3\pi}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nx\,dx\right].$$

Первый интеграл вычислим по частям; полагая $u=x$, $dv=\cos nx\,dx$, $du=dx$, $v=\dfrac{1}{n}\sin nx$, имеем

$$\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx=\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{n}\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\left[x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{\pi}{2}\sin n\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right].$$

Вычислим второй интеграл:

$$\frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{\pi}{2n}\left[\sin n\pi-\sin n\frac{\pi}{2}\right]=-\frac{\pi}{2n}\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Значит,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin n\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^2}-\frac{\pi}{2n}\sin n\frac{\pi}{2}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right]=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[\cos n\frac{\pi}{2}-1\right],$$

откуда $a_1=-\frac{2}{1^2\pi}$, $a_2=-\frac{4}{2^2\pi}$, $a_3=-\frac{2}{3^2\pi}$, $a_4=0$, $a_5=-\frac{2}{5^2\pi}$, $a_6=-\frac{4}{6^2\pi}$, $a_7=-\frac{2}{7^2\pi}$, $a_8=0$, $a_9=-\frac{2}{9^2\pi}$, $a_{10}=-\frac{4}{10^2\pi}$, ...

Подставив значения a_n в формулу (28.10), получим

$$f(x)=\frac{3\pi}{8}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{6^2}+\frac{\cos 10x}{10^2}+\ldots\right). \bullet$$

8. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=|x|$ при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ (рис. 187).

9. В промежутке $0\leqslant x\leqslant\pi$ разложите в ряд Фурье по косинусам функции:

1) $f(x)=\frac{x^2}{4}$; 2) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$; 3) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ 1/2 \text{ при } \pi/2\leqslant x<\pi;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\pi/3 \text{ при } 0<x<\pi/3,\\ 0 \quad \text{при } \pi/3<x<2\pi/3,\\ -\pi/3 \text{ при } 2\pi/3<x<\pi.\end{cases}$

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ В ПРОМЕЖУТКЕ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, то для вычисления коэффициентов Фурье справедливы следующие формулы:

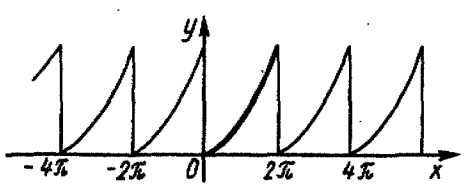


Рис. 188

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx, \qquad (28.11)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad (28.12)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx. \qquad (28.13)$$

10. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ равенством $f(x)=x^2$ (рис. 188).

○ Функция $f(x)=x^2$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ не является ни четной, ни нечетной.

Коэффициенты Фурье вычислим по формулам (28.11)—(28.13). Имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx.$$

Интегрируем по частям; полагая $u=x^2$, $dv=\cos nx\,dx$, $du=2x\,dx$, $v=\frac{1}{n}\sin nx$, получим

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx\right].$$

Снова интегрируем по частям: $u=x$, $dv=\sin nx\,dx$, $du=dx$, $v=-\frac{1}{n}\cos nx$; тогда

$$\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{1}{n}2\pi\cos 2\pi n+\frac{1}{n^2}\sin 2\pi n-(0+0)=-\frac{1}{n}2\pi+0=-\frac{2\pi}{n}.$$

Подставив это значение в a_n, получим

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin x\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}4\pi^2\sin 2\pi+\frac{4\pi}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{4\pi}{n^2}\right)=\frac{4}{n^2},$$

откуда $a_1=4$, $a_2=1$, $a_3=\frac{4}{9}$, $a_4=\frac{1}{4}$, $a_5=\frac{4}{25}$, ...

Далее, находим

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx.$$

Интегрируем по частям: $u=x^2$, $dv=\sin nx\,dx$, $du=2x\,dx$, $v=-\frac{1}{n}\cos nx$, откуда

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx\right].$$

Снова интегрируя по частям, имеем $u=x$, $dv=\cos nx\,dx$, $du=dx$, $v=\frac{1}{n}\sin nx$, т. е.

$$\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=\left[\frac{1}{n}x\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{n}2\pi\sin 2\pi n+\frac{1}{n^2}\cos 2\pi n-\left(0+\frac{1}{n^2}\cos 0\right)=0+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}=0.$$

Подставив это значение в b_n, получим

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{-n}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\cdot 0\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{-n}4\pi^2\cos 2\pi n-0\right]=-\frac{4\pi}{n},$$

откуда $b_1=-4\pi$, $b_2=-\frac{4\pi}{2}$, $b_3=-\frac{4\pi}{3}$, $b_4=-\frac{4\pi}{4}$, ...

Подставляя значения коэффициентов a_n и b_n в формулу (28.1), находим

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\left(4\cos x-4\pi\sin x\right)+\left(\cos 2x-\frac{4\pi}{2}\sin 2x\right)+\left(\frac{4}{9}\cos 3x-\frac{4\pi}{3}\sin 3x\right)+\ldots=$$

$$=\frac{4\pi^2}{3}+4\left(\cos x-\pi\sin x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\pi\sin 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\pi\sin 3x}{3}+\ldots\right).$$

В точке разрыва $x=2\pi$ сумма ряда равна $\frac{f(2\pi-0)+f(2\pi+0)}{2}$; так как $f(2\pi-0)=4\pi^2$, $f(2\pi+0)=0$, то сумма ряда при $x=2\pi$ (а также во всех точках вида $2\pi n$, где $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$) равна $\frac{4\pi^2+0}{2}=2\pi^2$. ●

11. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию, заданную в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$:

1) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ x & \text{при } \pi\leqslant x\leqslant 2\pi;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ \pi/2 & \text{при } \pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2,\\ 2\pi-x & \text{при } 3\pi/2\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$

(данная функция четная, поэтому рассмотрите ее в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, а промежуток интегрирования разбейте на промежутки $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ и $\pi/2\leqslant x\leqslant\pi$);

3) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<x<\pi/2,\\ -1 & \text{при } \pi/2<x<3\pi/2,\\ 1 & \text{при } 3\pi/2<x<2\pi;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0<x<\pi/2,\\ \pi-x & \text{при } \pi/2<x<3\pi/2,\\ x-2\pi & \text{при } 3\pi/2<x<2\pi.\end{cases}$

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Если функция $f(x)$ в промежутке $-l<x<l$, где l — произвольное число ($l>0$), удовлетворяет условиям Дирихле, то ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (28.14)$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx, \qquad (28.15)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad (28.16)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (28.17)$$

Ряд (28.14) представляет собой функцию с периодом $2l$, т. е. $f(x+2l)=f(x)$.

Если $f(x)$ — нечетная функция, то ее ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (28.18)$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (28.19)$$

Если же $f(x)$ — четная функция, то ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (28.20)$$

где,

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,dx, \qquad (28.21)$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (28.22)$$

12. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1$ уравнением $f(x)=x^2$.

○ Данная функция является четной. Графиком функции служит дуга параболы, заключенная между точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$ (рис. 189). Здесь $l=1$. Поэтому, используя формулы (28.21) и (28.22), имеем

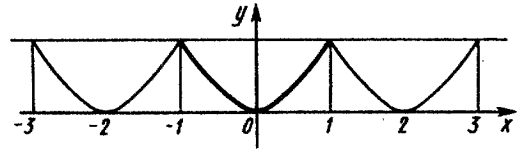


Рис. 189

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx.$$

Интегрируем по частям: $u=x^2$, $dv=\cos n\pi x\,dx$, $du=2x\,dx$, $v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$; тогда

$$a_n=\frac{2}{n\pi}x^2\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx.$$

Снова интегрируем по частям: $u=x$, $dv=\sin n\pi x$, $du=dx$, $v=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$, откуда

$$\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi}x\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{n\pi}x\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi-(-0+0)=-\frac{1}{n\pi}(-1)^n=\frac{1}{n\pi}(-1)(-1)^n=-\frac{1}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Подставив это значение в a_n, находим $a_n=-\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{1}{n\pi}(-1)^{n+1}=\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$, откуда $a_1=-\frac{4}{\pi^2}$, $a_2=\frac{4}{2^2\pi^2}$, $a_3=-\frac{4}{3^2\pi^2}$, $a_4=\frac{4}{4^2\pi^2}$, ...

Подставляя значения коэффициентов a_n в формулу (28.20), получим

$$x^2=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x+\frac{4}{2^2\pi^2}\cos 2\pi x-\frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x+\ldots$$

или

$$x^2=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\ldots\right).\ \bullet$$

13. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, заданную в промежутке $-2<x<2$.

14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$, заданную в промежутке $-1/2\leqslant x\leqslant 1/2$.

15. Разложите в ряд Фурье только по синусам функцию $f(x)=x^2$, заданную в промежутке $0\leqslant x\leqslant 1/2$.

16. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2/2$, заданную в промежутке $-3\leqslant x\leqslant 3$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ формулами

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -\pi<x<0,\\ -1 \text{ при } 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

2) Разложите в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x$, заданную в промежутке $0\leqslant x\leqslant\pi$.

II вариант

1) Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ формулами

$$f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } -\pi<x\leqslant 0,\\ 0 \text{ при } 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

2) Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=x$, заданную в промежутке $0\leqslant x\leqslant\pi$.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

При изучении различных зависимостей в электрических цепях с несинусоидальными токами применяют ряды Фурье. Переменный синусоидальный ток $i=I\sin\omega t$ имеет период $2\pi/\omega$. Несинусоидальный ток разлагают в ряд Фурье вида

$$i(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t+a_2\cos 2\omega t+b_2\sin 2\omega t+$$

$$+\ldots+a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t+\ldots\ . \qquad (28.23)$$

Формулы для нахождения коэффициентов ряда (28.23) получаются из формул (28.11)—(28.13) с помощью замены переменной $x=\omega t$ и имеют вид:

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(\omega t)\,dt, \qquad (28.24)$$

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(\omega t)\cos n\omega t\,dt, \qquad (28.25)$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(\omega t)\sin n\omega t\,dt. \qquad (28.26)$$

17. Разложить в ряд Фурье функцию двухполупериодного выпрямленного синусоидального тока:

$$i(t)=\begin{cases}A\sin\omega t \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\pi/\omega,\\ -A\sin\omega t \text{ при } \pi/\omega\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega\end{cases}$$ (рис. 190).

○ Данная функция является четной, поэтому $b_n=0$. По формулам (28.24) и (28.25) находим

$$a_0=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\sin\omega t\,dt=-\frac{2A\omega}{\pi\omega}[\cos\omega t]_0^{\pi/\omega}=-\frac{2A}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{4A}{\pi},$$

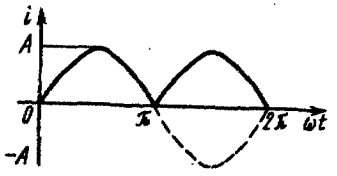


Рис. 190

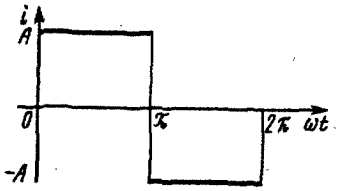


Рис. 191

$$a_n=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\sin\omega t\cos n\omega t\,dt=\frac{2A\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\sin(\omega t-n\omega t)+\sin(\omega t+n\omega t)\right]dt=$$

$$=\frac{A\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t\right]dt=$$

$$=\frac{A\omega}{\pi}\left[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\omega t+\frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\omega t\right]_0^{\pi/\omega}=$$

$$=\frac{\omega A}{\pi}\left[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\pi+\frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\pi+\frac{1}{(n+1)\omega}-\frac{1}{(n-1)\omega}\right]=$$

$$=\frac{A}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi-\frac{2}{n^2-1}\right]=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } n\text{ — нечетное;}\\ -\dfrac{4A}{\pi(n^2-1)}, & \text{если } n\text{ — четное.}\end{cases}$$

Тогда $a_2=-\frac{4A}{3\pi}$, $a_4=-\frac{4A}{15\pi}$, $a_6=-\frac{4A}{35\pi}$, ...

Подставляя эти значения в формулу (28.23), получим

$$i(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{3\pi}\cos 2\omega t-\frac{4A}{15\pi}\cos 4\omega t-\frac{4A}{35\pi}\cos 6\omega t-\ldots,$$

или

$$i(t)=\frac{4A}{3\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2\omega t-\frac{1}{15}\cos 4\omega t-\frac{1}{35}\cos 6\omega t-\ldots\right).\ \bullet$$

18. Разложите в ряд Фурье функцию

$$i(t)=\begin{cases}A \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\pi/\omega,\\ -A \text{ при } \pi/\omega\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega\end{cases}\ \text{(рис. 191).}$$

19. Разложите в ряд Фурье функцию $i=\frac{A\omega}{2\pi}t$ (рис. 192).

20. Разложите в ряд Фурье функцию однополупериодного выпрямленного синусоидального тока (рис. 193).

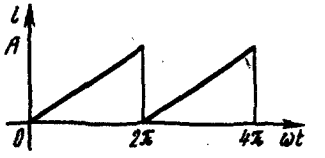


Рис. 192

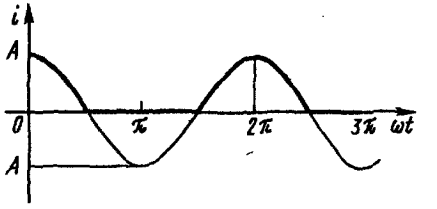


Рис. 193

21. Разложите в ряд Фурье функцию двухполупериодного выпрямленного синусоидального тока (рис. 194).

Глава 29
ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z.

Функции двух переменных обозначают символами $z=f(x, y)$, $z=F(x, y)$, $z=z(x, y)$ и т. п.

Значение функции $z=f(x, y)$ при $x=a$ и $y=b$ обозначают через $f(a, b)$.

Упорядоченная пара значений x и y называется *точкой* $M(x; y)$, а функция двух переменных — *функцией* этой *точки* $z=f(M)$.

Переменная величина u называется *функцией трех переменных* величин x, y, z, если каждой упорядоченной тройке значений x, y, z соответствует единственное значение u.

Аналогично определяется *функция n переменных*.

Множество всех точек, в которых определена функция n переменных, называется *областью определения* (существования) *функции*.

Некоторую замкнутую область D на плоскости, ограниченную данными линиями, можно задать с помощью одной или нескольких систем неравенств вида

$$a\leqslant x\leqslant b,\ f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x). \qquad (29.1)$$

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

○ Данная функция определена, если $9-x^2-y^2\geqslant 0$, т. е. $x^2+y^2\leqslant 9$. Этому соотношению удовлетворяют координаты всех точек, которые находятся внутри круга радиуса $R=3$ с центром в начале координат, а также на его границе. Областью определения данной функции и является указанный круг. ●

2. Найти область определения функции $z=\sqrt{5x-\frac{3}{\sqrt{y}}}$.

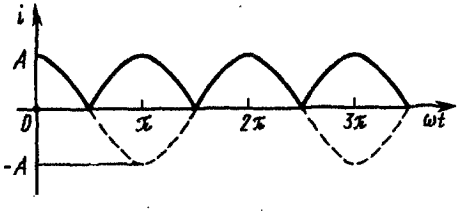


Рис. 194

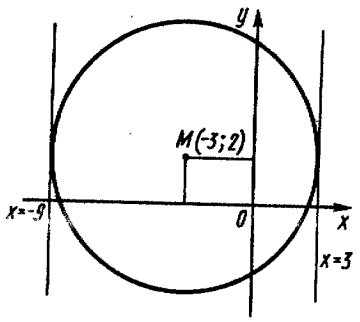


Рис. 195

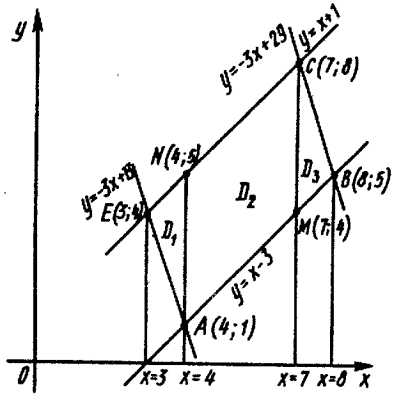


Рис. 196

○ Первое слагаемое определено при $x \geqslant 0$, второе — при $y > 0$. Следовательно, область определения есть I четверть плоскости xOy. ●

3. Дана функция $f(x, y)=\dfrac{2x-y+1}{3x^2+y^2+2}$. Вычислить $f(0, 0)$, $f(1, 1)$, $f(2, 1)$.

○ $f(0, 0)=\dfrac{2\cdot 0-0+1}{3\cdot 0^2+0^2+2}=\dfrac{1}{2}$; $f(1, 1)=\dfrac{2\cdot 1-1+1}{3\cdot 1^2+1^2+2}=\dfrac{1}{3}$;

$$f(2, 1)=\frac{2\cdot 2-1+1}{3\cdot 2^2+1^2+2}=\frac{4}{15}.$$ ●

4. Найти область D, представляющую собой множество точек круга с центром в точке $(-3; 2)$ и радиусом 6.

○ Заданная область изображена на рис. 195. Абсциссы точек круга изменяются в промежутке $-9 \leqslant x \leqslant 3$. Уравнение заданной окружности $(x+3)^2+(y-2)^2=36$ представим в виде $(y-2)^2=36-(x+3)^2$ или $y=2\pm\sqrt{27-6x-x^2}$. Уравнение $y=2-\sqrt{27-6x-x^2}$ задает нижнюю, а уравнение $y=2+\sqrt{27-6x-x^2}$ — верхнюю полуокружность.

При изменении x в промежутке $-9 \leqslant x \leqslant 3$ функция y изменяется от $-2-\sqrt{27-6x-x^2}$ до $2+\sqrt{27-6x-x^2}$. Следовательно, множество точек круга определяется системой неравенств $-9 \leqslant x \leqslant 3$, $2-\sqrt{27-6x-x^2} \leqslant y \leqslant 2+\sqrt{27-6x-x^2}$. ●

5. Область D задана параллелограммом со сторонами $y=x-3$, $y=x+1$, $y=-3x+13$ и $y=-3x+29$. Записать с помощью систем неравенств вида (29.1) множество точек заданной области.

○ Найдем точки пересечения заданных прямых и построим параллелограмм (рис. 196):

$$\begin{cases} y=x-3, \\ y=-3x+13, \end{cases} A(4; 1); \quad \begin{cases} y=x-3, \\ y=-3x+29, \end{cases} B(8; 5);$$

$$\begin{cases} y=-3x+29, \\ y=x+1, \end{cases} C(7; 8); \quad \begin{cases} y=x+1, \\ y=-3x+13, \end{cases} E(3; 4).$$

Через вершины A, E и C проведем прямые, параллельные оси Oy. Область D, ограниченную заданным параллелограммом, разделим этими прямыми на три области D_1, D_2 и D_3. Каждую из этих областей представим системой неравенств вида (29.1).

В области D_1 x изменяется в промежутке $3 \leqslant x \leqslant 4$. Эта область ограничена снизу прямой $y=-3x+13$, а сверху — прямой $y=x+1$, т. е. $-3x+13 \leqslant y \leqslant x+1$. Следовательно, множество точек области D_1 можно записать в виде системы неравенств $3 \leqslant x \leqslant 4$, $-3x+13 \leqslant y \leqslant x+1$.

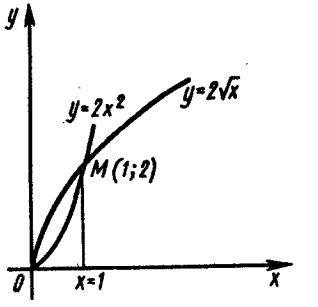


Рис. 197

В области D_2 x изменяется в промежутке $4 \leqslant x \leqslant 7$. Эта область ограничена снизу прямой $y=x-3$, а сверху — прямой $y=x+1$. Поэтому множество точек области D_2 выражается системой неравенств $4 \leqslant x \leqslant 7$, $x-3 \leqslant y \leqslant x+1$.

В области D_3 x изменяется в промежутке $7 \leqslant x \leqslant 8$. Эта область ограничена снизу прямой $y=x-3$, а сверху — прямой $y=-3x+29$. Значит, множество точек области D_3 записывается в виде системы неравенств $7 \leqslant x \leqslant 8$, $x-3 \leqslant y \leqslant -3x+29$. ●

6. Область D заключена между двумя параболами $y^2=4x$ и $x^2=\dfrac{1}{2}y$. Записать с помощью системы неравенств вида (29.1) множество точек этой области.

○ Найдем точки пересечения парабол. Имеем $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=2x^2; \end{cases}$ $O(0; 0)$ и $M(1; 2)$. Из рис. 197 видно, что область D можно записать с помощью системы неравенств $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2x^2 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}$. ●

7. Найдите область определения функции:

1) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\sqrt{16-x^2-y^2}$; 2) $z=\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1}$;

3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

8. Найдите частное значение функции:

1) $f(x, y)=\dfrac{3xy}{2x^2+y^2}$ в точке $(2; -1)$;

2) $f(x, y)=\dfrac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $(3; -4)$.

9. Запишите с помощью систем неравенств вида (29.1) замкнутые области D, заданные следующим образом:

1) $y=x$, $y=x+6$, $y=-0{,}5x+3$ и $y=-0{,}5x+9$;
2) $y=x$, $y=x+4$, $y=-x+4$ и $y=-x+12$;
3) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2+y^2 \leqslant 9$;
4) $y=3x$ и $y=x^2$;

5) $y^2=4x$ и $x=4$;
6) $xy=1$, $x=4$ и $y=x$.

§ 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Частной производной функции $z=f(x,y)$ *по переменной* x называется производная этой функции при постоянном значении переменной y; она обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x.

Частной производной функции $z=f(x, y)$ *по переменной* y называется производная по y при постоянном значении переменной x; она обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y.

Частная производная функции нескольких переменных по одной переменной определяется как производная этой функции по соответствующей переменной при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Полным дифференциалом функции $z=f(x, y)$ в некоторой точке $M(x, y)$ называется выражение

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{29.2}$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются в точке $M(x, y)$, а $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

10. Найти частные производные функции:

1) $z=x^3+2xy^2+3y^3$; 2) $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

○ 1) Находим частную производную по переменной x при постоянном y: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+2y^2$.

Находим частную производную по переменной y при постоянном x: $\frac{\partial z}{\partial y}=4xy+9y^2$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2y-2y^3-2x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$. ●

11. Вычислить значение частной производной функции $z=\frac{x-y}{x+y}$ в точке $M(-2; 3)$.

○ Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=-\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

В полученные выражения подставим значения $x=-2$ и $y=3$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=z'_x(-2; 3)=\frac{2\cdot 3}{(-2+3)^2}=6;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=z'_y(-2; 3)=-\frac{2(-2)}{(-2+3)^2}=4.$$ ●

12. Вычислить полный дифференциал функции $z=x^3-2x^2y^2+y^3$ в точке $M(1; 2)$.

○ Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-4xy^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-4x^2y+3y^2.$$

Вычислим значения частных производных в точке $M(1; 2)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=z'_x(1; 2)=3\cdot 1^2-4\cdot 1\cdot 2^2=-13;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=z'_y(1; 2)=-4\cdot 1^2\cdot 2+3\cdot 2^2=4.$$

Согласно формуле (29.2), получим $dz=-13dx+4dy$. ●

13. Найдите частные производные следующих функций:

1) $z=x^3-3x^2y+4x^3y^2-y^3$; 2) $z=\frac{3x}{y}$; 3) $z=\frac{y-3x}{x+4y}$; 4) $z=e^{-x/y}$;

5) $z=\ln(2x-y)$.

14. Вычислите значения частных производных функций в заданных точках: 1) $z=\frac{x-2y}{x+y}$ в точке $M(2; -1)$; 2) $z=e^{3x/y}$ в точке $M(1; 1)$; 3) $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M(2; -2)$; 4) $z=y/x+x$ в точке $M(1; -2)$.

15. Вычислите полные дифференциалы функций в заданных точках: 1) $z=\frac{y}{x+y}$ в точке $M(2; -1)$; 2) $z=\sin(x^2+2y)$ при $x=1$, $y=2$, $dx=0{,}1$ и $dy=0{,}2$; 3) $z=e^{x/2y}$ при $x=2$, $y=1$, $dx=0{,}2$ и $dy=0{,}1$; 4) $z=\ln(2x+y)$ в точке $M(1; 0)$.

§ 3. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. Определение двойного интеграла. Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости xOy определена непрерывная функция $z=f(x, y)$. Разобьем область D произвольным образом на n частичных областей с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. В каждой i-й элементарной области ΔS_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, умножим значение функции в этой точке $f(x_i, y_i)$ на площадь ΔS_i соответствующей области и составим сумму этих произведений, т. е. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области D.

Двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D называется предел этой суммы:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i=\iint_D f(x, y)\,dS, \tag{29.3}$$

где λ — наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i. Функция $z=f(x, y)$, для которой предел (29.3) существует и конечен, называется *интегрируемой* в этой области.

В прямоугольных координатах дифференциал площади $dS=dx\,dy$, тогда двойной интеграл примет вид

$$I=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{29.4}$$

Если $f(x, y)>0$, то двойной интеграл функции $z=f(x, y)$ по области D равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры D, и снизу плоскостью $z=0$.

2. Осиовные свойства двойного интеграла. 1°. *Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций*:

$$\iint_D [f_1(x, y)\pm f_2(x, y)]\,dx\,dy=\iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy\pm\iint_D f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла*:

$$\iint_D kf(x, y)\,dx\,dy=k\iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. *Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, т. е. если область состоит из двух областей D_1 и D_2, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

3. Основиые случаи вычисления двойиого интеграла в прямоугольных координиатах.

1) Если область D, в которой рассматривается двойной интеграл (29.4), есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и заданными уравнениями $x=a$, $x=b$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, $y=c$, $y=d$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ (рис. 198), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy \tag{29.5}$$

или

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{29.6}$$

Интегралы в правых частях формул (29.5) и (29.6) называются *повторными* (или *двукратными*), а интегралы $\int_c^d f(x, y)\,dy$ и $\int_a^b f(x, y)\,dx$ называются *внутренними*.

Под символом $\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy$ в формуле (29.5) подразумевается дважды произведенное интегрирование. Первое интегрирование (внутреннее) по переменной y совершается в пределах от c до d в предположении, что x остается постоянным; результат интегрируется по переменной x в пределах от a до b.

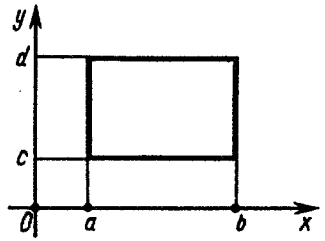


Рис. 198

Если вычисление двойного интеграла выполняется по формуле (29.6), то порядок интегрирования меняется; внутренний интеграл вычисляется по переменной x, причем y сохраняет постоянное значение, а внешнее (повторное) интегрирование производится по переменной y.

2) Если область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области и параллельная оси Oy, пересекает ее границу в двух точках (рис. 199 и 200), то эта область называется *простой относительно оси Ox* и определяется системой неравенств вида

$$a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x).$$

В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{29.7}$$

3) Если граница области D пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области и параллельной оси Ox (рис. 201), то эта область называется *простой относительно оси Oy* и определяется системой неравенств вида

$$c\leqslant y\leqslant d,\ \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y).$$

В этом случае двойной интеграл выражается формулой

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx, \tag{29.8}$$

где интегрирование сначала выполняется по переменной x, а затем по переменной y.

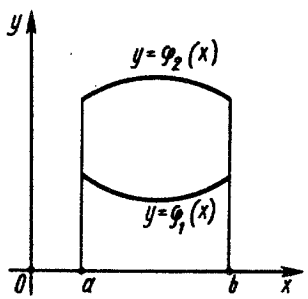


Рис. 199

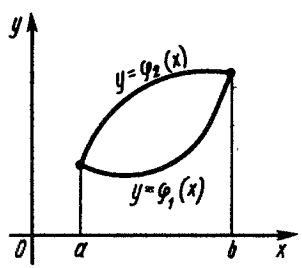


Рис. 200

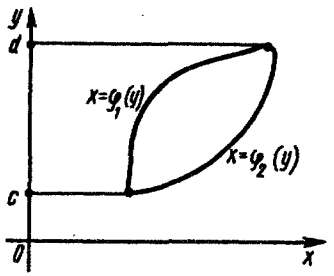


Рис. 201

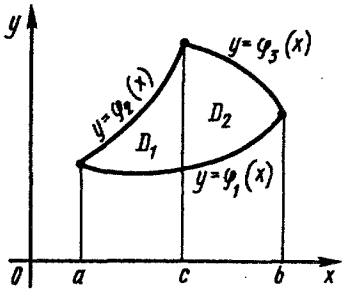


Рис. 202

4) Если нижняя или верхняя линии границы состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D необходимо разбить прямыми, параллельными оси Oy, на такие части, чтобы каждый из участков выражался одним уравнением. В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух (и более) повторных интегралов.

В случае, изображенном на рис. 202, область D_1 определяется системой неравенств $a\leqslant x\leqslant c$, $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$, а область D_2 — системой неравенств $c\leqslant x\leqslant b$, $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_3(x)$, и, значит,

$$\iint\limits_D f\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f\,dx\,dy=\int\limits_a^c dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,dy+\int\limits_c^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f\,dy. \qquad (29.9)$$

16. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^3 dx\int\limits_2^{x^2+4}\frac{1}{x^2}\,dy$.

○ Согласно формуле (29.7), имеем

$$\int\limits_1^3 dx\int\limits_2^{x^2+4}\frac{1}{x^2}\,dy=\int\limits_1^2\left[\int\limits_2^{x^2+4}\frac{1}{x^2}\,dy\right]dx.$$

Вычислим сначала внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянным:

$$\int\limits_2^{x^2+4}\frac{1}{x^2}\,dy=\frac{1}{x^2}\int\limits_2^{x^2+4}dy=\frac{1}{x^2}[y]_2^{x^2+4}=\frac{1}{x^2}(x^2+4-2)=1+2x^{-2}.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по переменной x, подставив в него полученное выражение:

$$\int\limits_1^3(1+2x^{-2})\,dx=\left[x-\frac{2}{x}\right]_1^3=\left(3-\frac{2}{3}\right)-(1-2)=3\frac{1}{3}.\ \bullet$$

17. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной прямыми $x=2$, $x=6$, $y=1$ и $y=4$.

○ Область D является простой относительно осей Ox и Oy (рис. 203), поэтому для вычисления интеграла можно использовать любую из формул (29.5) или (29.6).

Сначала вычислим двойной интеграл по формуле (29.5):

$$\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy=\int\limits_2^6 dx\int\limits_1^4(x+y)\,dy.$$

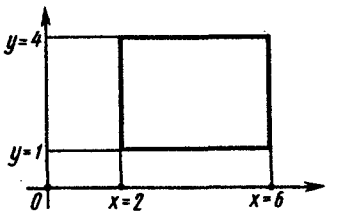


Рис. 203

Вычислив внутренний интеграл по переменной y при постоянном x, находим

$$\int\limits_1^4(x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^4=(4x+8)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=3x+\frac{15}{2}.$$

Подставив это выражение во внешний интеграл, получим

$$\int\limits_2^6\left(3x+\frac{15}{2}\right)dx=\left[\frac{3x^2}{2}+\frac{15}{2}x\right]_2^6=78.$$

Теперь вычислим двойной интеграл по формуле (29.6):

$$\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy=\int\limits_1^4 dy\int\limits_2^6(x+y)\,dx.$$

Найдем внутренний интеграл:

$$\int\limits_2^6(x+y)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_2^6=(18+6y)-(2+2y)=4y+16.$$

Далее найдем внешний интеграл:

$$\int\limits_1^4(4y+16)\,dy=[2y^2+16y]_1^4=78,$$

т. е. получили тот же ответ. ●

18. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D(x^2-y)\,dx\,dy$ по области D, заданной системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 3$; $x^2\leqslant y\leqslant 9$ (рис. 204).

○ Область D является простой как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy; поэтому вычислим этот интеграл двумя способами. Произведем вычисление по формуле (29.7). Пределами внутреннего интеграла являются функции $y=x^2$ и $y=9$, составляющие уравнения нижней и верхней границ области D, а пределами внешнего интеграла являются абсциссы $x=0$ и $x=3$. Значит,

$$\iint\limits_D(x^2-y)\,dx\,dy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{x^2}^9(x^2-y)\,dy$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной y в предположении, что x — постоянная:

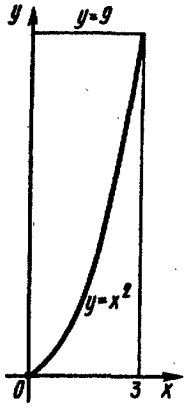


Рис. 204

$$\int_{x^2}^{9}(x^2-y)\,dy=\left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{9}=$$

$$=\left(9x^2-\frac{81}{2}\right)-\left(x^4-\frac{x^4}{2}\right)=9x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{81}{2}.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int_0^3\left(9x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{81}{2}\right)dx=\left[3x^2-\frac{1}{10}x^5-\frac{81}{2}x\right]_0^3=-64{,}8.$$

Произведем теперь вычисление по формуле (29.8). В этом случае область D выражается системой неравенств $0\leqslant y\leqslant 9$, $0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}$, т. е. пределами внутреннего интеграла служат функции $x=0$ и $x=\sqrt{y}$, а пределами внешнего интеграла — ординаты $y=0$ и $y=9$. Поэтому

$$\iint_D(x^2-y)\,dx\,dy=\int_0^9 dy\int_0^{\sqrt{y}}(x^2-y)\,dx=\int_0^9\left[\frac{x^3}{3}-xy\right]_0^{\sqrt{y}}dy=\int_0^9\left(\frac{1}{3}y^{3/2}-y^{3/2}\right)dy=$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^9 y^{3/2}\,dy=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}y^{5/2}\Big|_0^9=-64{,}8.\ \bullet$$

19. Вычислить двойной интеграл $\iint_D\frac{y}{x}dx\,dy$, по области D, заданной линиями $x=1$, $x=4$, $y=x$ и $y=2\sqrt{x}$.

○ Находим точки пересечения этих линий:

$$\begin{cases}x=1;\\ y=2\sqrt{x},\end{cases}\ M(1;2);\qquad \begin{cases}x=4,\\ y=2\sqrt{x},\end{cases}\ N(4;4)\ \text{(рис. 205)}.$$

Область D определяется системой неравенств $1\leqslant x\leqslant 4$, $x\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}$. Вычислим двойной интеграл по области D:

$$\iint_D\frac{y}{x}dx\,dy=\int_1^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}}\frac{y}{x}dy=\int_1^4\left[\frac{y^2}{2x}\right]_x^{2\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(2-\frac{1}{2}x\right)dx=\left[2x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^4=2\frac{1}{4}.\ \bullet$$

20. Вычислить двойной интеграл $\iint_D(x+2y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$, $y=4x$ и $y=\frac{4}{x}$.

○ Находим точки пересечения этих линий:

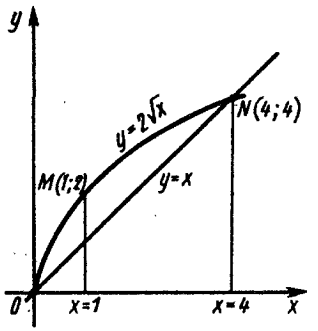


Рис. 205

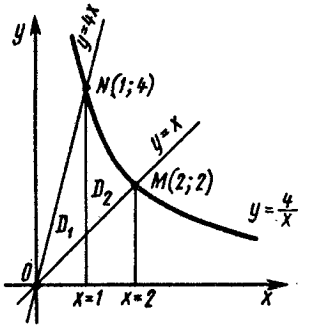


Рис. 206

$$\begin{cases}y=x,\\ y=\frac{4}{x},\end{cases}\ M(2;2);\qquad \begin{cases}y=4x,\\ y=\frac{4}{x},\end{cases}\ N(1;4)\ \text{(рис. 206)}.$$

Область D разобьем на две области D_1 и D_2, которые соответственно определяются системами неравенств $0\leqslant x\leqslant 1$, $x\leqslant y\leqslant 4x$ и $1\leqslant x\leqslant 2$, $x\leqslant y\leqslant 4/x$.

Вычислим двойной интеграл по области D_1:

$$I_1=\iint_{D_1}(x+2y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^{4x}(x+2y)\,dy=\int_0^1\left[xy+y^2\right]_x^{4x}dx=$$

$$=\int_0^1(4x^2+16x^2-x^2-x^2)\,dx=18\int_0^1 x^2\,dx=18\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=6.$$

Вычислим двойной интеграл по области D_2:

$$I_2=\iint_{D_2}(x+2y)\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_x^{4x}(x+2y)\,dy=\int_1^2\left[xy+y^2\right]_x^{4x}dx=$$

$$=\int_1^2\left(4+\frac{16}{x^2}-x^2-x^2\right)dx=\int_1^2(4+16x^{-2}-2x^2)\,dx=\left[4x-\frac{16}{x}-\frac{2}{3}x^3\right]_1^2=7\frac{1}{3}.$$

Значит, $I=I_1+I_2=6+7\frac{1}{3}=13\frac{1}{3}$. ●

21. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dx\int_x^{-x^2+2}f(x,y)\,dy.$$

○ Зная пределы интегрирования, запишем область интегрирования D в виде системы неравенств $0\leqslant x\leqslant 1$, $x\leqslant y\leqslant -x^2+2$.

Построим линии $x=0$, $x=1$, $y=x$ и $y=-x^2+2$ (рис. 207). Найдем точку пересечения линий: $\begin{cases}y=x,\\ y=-x^2+2,\end{cases}$ $M(1;1)$.

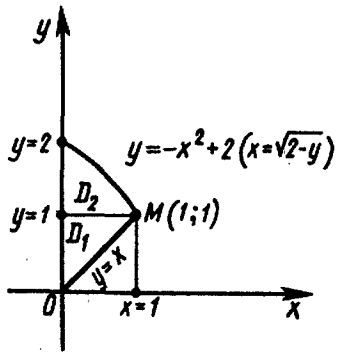


Рис. 207

Область D является простой относительно оси Ox. Рассмотрим область D относительно оси Oy. Через точку $M(1;1)$, в которой стыкуются участки верхней границы области D, проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая делит область D на две области D_1 и D_2, которые запишем в виде систем неравенств $0\leqslant y\leqslant 1$; $0\leqslant x\leqslant y$ и $1\leqslant y\leqslant 2$; $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2-y}$. Тогда, согласно формуле (29.8), получим

$$\int_0^1 dx \int_x^{-x^2+2} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx. \bullet$$

22. Вычислите повторные интегралы:

1) $\int_0^1 dx \int_1^2 (x^2+y^2)\,dy$; 2) $\int_0^2 dx \int_x^{x^2} (x+2y)\,dy$; 3) $\int_1^2 dy \int_0^3 (x^2+y^2)\,dx$;

4) $\int_2^3 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x}\,dy$; 5) $\int_1^2 dy \int_{2y}^{4y} xy\,dx$; 6) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} (3x-2y)\,dx$.

23. Вычислите двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями: 1) $\iint_D x\,dx\,dy$, $xy=4$, $x+y-5=0$; 2) $\iint_D x^2 y\,dx\,dy$, $x^2+y^2=16$, $x+y-4=0$; 3) $\iint_D y\,dx\,dy$, $y=x^2$, $x=-2$, $x=2$, $y=4$;

4) $\iint_D x^2 y\,dx\,dy$, $y=x$, $y=1/x$, $x=2$; 5) $\iint_D xy\,dx\,dy$, $y=0$, $y=4-x^2$;

6) $\iint_D x^3\,dx\,dy$, $x=0$, $y=x$, $y=6-x^2$.

24. Вычислите двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями, предварительно разбив заданную область на две области:

1) $\iint_D x\,dx\,dy$, $y=x^2$, $y=2x$, $y=3x$; 2) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $y=4$;

3) $\iint_D y\,dx\,dy$, $y=\frac{3}{4}x$, $y=\frac{4}{3}x$, $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2=25$.

25. Измените порядок интегрирования в двойных интегралах:

1) $\int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy$; 2) $\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x,y)\,dx$; 3) $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{6-x} f(x,y)\,dy$;

4) $\int_1^4 dy \int_{1/y}^{y} f(x,y)\,dx$; 5) $\int_{-4}^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy$.

I вариант

1) Вычислите повторный интеграл $\int_0^3 dx \int_0^2 (x^2+2xy)\,dy$.

2) Вычислите двойной интеграл $\iint_D xy\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $x=y^2$.

3) Измените порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^4 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

II вариант

1) Вычислите повторный интеграл $\int_{-2}^2 dy \int_0^{y^2} (2x+y)\,dx$.

2) Вычислите двойной интеграл $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная линиями $y=1/x$, $y=x$ и $x=4$.

3) Измените порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_1^4 dy \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}} f(x,y)\,dx$.

§ 4. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x и y к полярным r и φ (см. гл. 14, § 1) выполняется по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi, \qquad (29.10)$$

где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r\,dr\,d\varphi=dS$ — дифференциал площади.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах сводится к вычислению повторного интеграла по r и φ в заданной области D.

Если область D (рис. 208) ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2, и кривыми $r=r_1(\varphi)$ и $r=r_2(\varphi)$ (где $\varphi_1<\varphi_2$, $r_1<r_2$), то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr. \qquad (29.11)$$

Если область D ограничена линией $r=r(\varphi)$ и начало координат лежит внутри области D (рис. 209), то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr. \qquad (29.12)$$

26. Вычислить двойной интеграл $\iint_D r\sin\varphi\,dr\,d\varphi$, если область D — круговой сектор, ограниченный линиями $r=a$, $\varphi=\pi/2$ и $\varphi=\pi$.

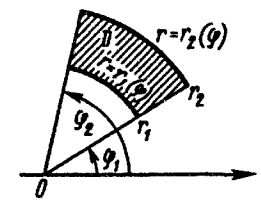


Рис. 208

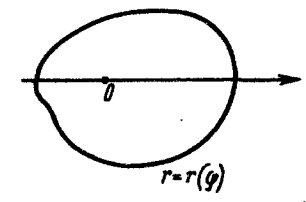


Рис. 209

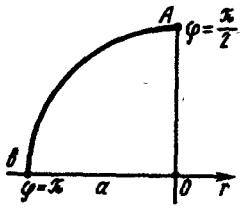


Рис. 210

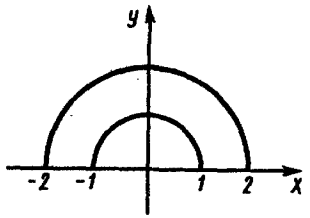


Рис. 211

○ Построим сектор OAB с центром в полюсе O (рис. 210). Имеем повторный интеграл

$$\iint_D r\sin\varphi\,dr\,d\varphi=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^a r\sin\varphi\,dr.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая $\sin\varphi$ постоянным:

$$\int_0^a r\sin\varphi\,dr=\left[\frac{r^2}{2}\sin\varphi\right]_0^a=\frac{a^2}{2}\sin\varphi.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\frac{a^2}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{a^2}{2}[\cos\varphi]_{\pi/2}^{\pi}=-\frac{a^2}{2}(-1-0)=\frac{a^2}{2}.\ \bullet$$

27. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойной интеграл $\iint_D(x+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$.

○ Построим область D (рис. 211). Применив формулы перехода к полярным координатам, получим $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; тогда

$$\iint_D(x+y)\,dx\,dy=\iint_D(r\cos\varphi+z\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Область D в полярной системе координат запишем в виде системы неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $1\leqslant r\leqslant 2$. Поэтому

$$\iint_D(x+y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi}d\varphi\int_1^2 r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,dr.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая $\cos\varphi+\sin\varphi$ постоянным:

$$\int_1^2 r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,dr=\left[\frac{r^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]_1^2=(\cos\varphi+\sin\varphi)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\frac{7}{3}\int_0^{\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{7}{3}[\sin\varphi-\cos\varphi]_0^{\pi}=\frac{14}{3}.\ \bullet$$

28. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойной интеграл $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, если область D ограничена частью окружности $x^2+y^2=16$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

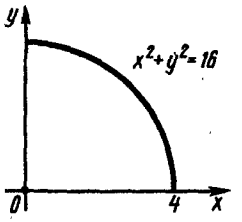


Рис. 212

○ Построим область D (рис. 212). Полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=\sqrt{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=r.$$

Область D в полярных координатах определяется системой неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant\varphi$. Согласно формуле (29.11), находим

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^4 r\cdot r\,dr=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^4 r^2\,dr=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}[r^3]_0^4\,d\varphi=\frac{1}{3}\cdot 64\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{64}{3}[\varphi]_0^{\pi/2}=\frac{32\pi}{3}.\ \bullet$$

29. Вычислите повторные интегралы:

1) $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2a}r^2\,dr$; 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/2}d\varphi\int_3^6 r^2\cos\varphi\,dr$; 3) $\int_0^{\pi}d\varphi\int_1^3 r^2\sin\varphi\,dr$;

4) $\int_0^{\pi/3}d\varphi\int_1^2 r^3\cos\varphi\,dr$; 5) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}d\varphi\int_2^{2\cos\varphi} r\cos\varphi\,dr$.

30. Вычислите двойные интегралы:

1) $\iint_D r^2\,d\varphi\,dr$, D — область, ограниченная окружностями $r=1$ и $r=3$;

2) $\iint_D r^3\,d\varphi\,dr$, область D задана системой неравенств $\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$, $2\leqslant r\leqslant 4$;

3) $\iint_D\sin 2\varphi\,d\varphi\,dr$, область D задана системой неравенств $\pi/6\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $1\leqslant r\leqslant 3$.

31. Вычислите двойные интегралы, предварительно преобразовав их к полярным координатам:

1) $\iint_D\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, D — круговое кольцо между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$;

2) $\iint_D\frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$, D — область, ограниченная окружностью $x^2+y^2\leqslant 1$;

3) $\iint\limits_D \sqrt{25-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D — область, ограниченная окружностью $x^2+y^2\leqslant 16$.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Площадь S плоской области D в прямоугольных координатах вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D dx\,dy, \tag{29.13}$$

а в полярных координатах — по формуле

$$S=\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi. \tag{29.14}$$

32. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=x+6$.

○ Найдем точки пересечения данных линий (рис. 213): $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x+6, \end{cases}$ $M(3;9)$, $N(-2;4)$. Область D запишем в виде системы неравенств $-2\leqslant x\leqslant 3$, $x^2\leqslant y\leqslant x+6$. Согласно формуле (29.13), получим

$$S=\int\limits_{-2}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{x+6} dy=\int\limits_{-2}^{3} [y]_{x^2}^{x+6}\,dx=\int\limits_{-2}^{3}(x+6-x^2)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}=20\frac{5}{6}\text{(кв. ед.)}. \bullet$$

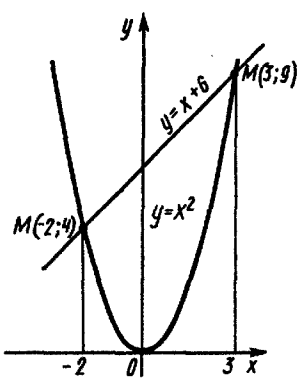


Рис. 213

33. Вычислить площадь области D, заданной неравенствами $\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$, $2\leqslant r\leqslant 4$ (рис. 214).

○ Используя формулу (29.14), находим

$$\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{2}^{4} r\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}[r^2]_2^4\,d\varphi=6\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi=6[\varphi]_{\pi/4}^{\pi/3}=\frac{\pi}{2}\text{(кв. ед.)} \bullet$$

34. Вычислить в полярных координатах площадь области D, ограниченной окружностью $x^2+y^2-4x=0$ и прямыми $y=0$, $y=x$.

○ Найдем точки пересечения окружности и прямой:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0, \\ y=x, \end{cases}$$

$O(0;0)$, $M(2;2)$ (рис. 215).

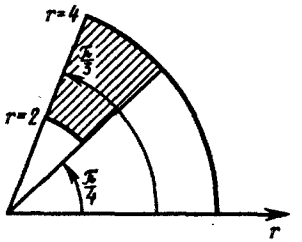


Рис. 214

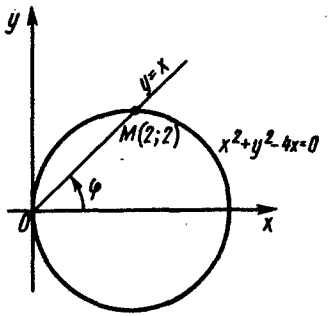


Рис. 215

Для построения окружности преобразуем ее уравнение: $x^2-4x++4+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=4$, откуда следует, что центр окружности есть точка $O_1(2;0)$, а $R=2$.

Для вычисления искомой площади в полярных координатах находим r и φ. Учитывая, что $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, запишем данное уравнение $x^2+y^2-4x=0$ в полярных координатах: $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-4r\cos\varphi=0$. Упростив его, получим $r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-4r\cos\varphi=0$, $r^2-4r\cos\varphi=0$, $r_1=0$, $r_2=4\cos\varphi$. Теперь находим угол φ: $\operatorname{tg}\varphi=y/x=2/2=1$, $\varphi=\pi/4$. Следовательно, область D определяется системой неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$, $0\leqslant r\leqslant 4\cos\varphi$. Согласно формуле (29.14), находим

$$S=\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r\,dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}[r^2]_0^{4\cos\varphi}\,d\varphi=8\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=8\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=4\int\limits_0^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=4\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/4}=\pi+2\text{(кв. ед)}. \bullet$$

35. Вычислите площадь плоской фигуры в прямоугольных координатах, если область D ограничена линиями:

1) $y=8/x$, $y=-x+9$; 2) $y=4/x$, $y=x$, $y=4$;

3) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$; 4) $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=1$;

5) $y^2=4x$, $y=x$; 6) $y=x^2$, $y=-x^2+2$, $x=0$.

36. Вычислите в полярных координатах площади областей, ограниченных заданными линиями: 1) $r=4$, $\varphi=\pi/6$, $\varphi=\pi/3$; 2) $r=1$, $r=2$, $\varphi=\pi/6$, $\varphi=\pi/4$.

37. Вычислите площадь области D, заданной в полярных координатах системой неравенств $0<\varphi<\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant 3\cos\varphi$.

38. Вычислите площадь фигуры, ограниченной окружностями $r=1$ и $r=2\cos\varphi$ (вне окружности $r=1$).

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, снизу плоскостью $z=0$ и сбоку прямой цилиндрической поверх-

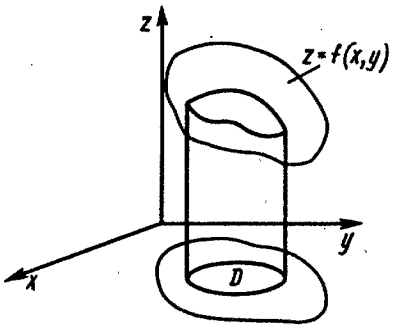


Рис. 216

ностью, вырезающей на плоскости $xOy\,(z=0)$ область D (рис. 216), вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_D z\,dx\,dy. \qquad (29.15)$$

39. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=2x+1$, $x=0$, $y=4$, $y=x^2$.

○ Тело, ограниченное заданными поверхностями, представляет собой вертикальный параболический цилиндр, расположенный в I октанте. Сверху тело ограничеио плоскостью $z=2x+1$, сбоку параболическим цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $x=0$ и $y=4$, снизу параболой $y=x^2$ и прямыми $x=0$ и $y=4$. Найдем точки пересечеиия параболы $y=x^2$ и прямой $y=4$:

$\begin{cases}y=x^2,\\ y=4,\end{cases}$ $M(2;\,4)$. Значение $x=-2$ не рассматриваем, так как цилиндр расположен в I октанте. Область D запишем в виде системы неравенств $0\leqslant x\leqslant 2$, $x^2\leqslant y\leqslant 4$.

Согласио формуле (29.15), получим

$$V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^4(2x+1)\,dy=\int\limits_0^2\left[2xy+y\right]_{x^2}^4 dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(8x+4-2x^3-x^2\right)dx=13\frac{1}{3}\text{(куб. ед.)}\ \bullet$$

40. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=3-x-y$, $x^2+y^2=1$ и $z=0$.

○ Данное тело есть прямой круговой цилиндр, ограниченный сверху плоскостью $z=3-x-y$, а снизу — кругом $x^2+y^2=1$ в плоскости $z=0$. Область D в основании цилиндра запишем в виде системы неравенств $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$.

Согласно формуле (29.15), получим

$$V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(3-x-y)\,dy=\int\limits_{-1}^1\left[3x-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^1\left(6\sqrt{1-x^2}-2x\sqrt{1-x^2}\right)dx.$$

Первый интеграл вычисляется по формуле

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2},$$

см. гл. 11, пример 80(2). Второй интеграл вычисляется подстановкой $1-x^2=z$, $-2x\,dx=dz$; следовательно, $\int z^{1/2}\,dz=\frac{2}{3}z^{3/2}=\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

Окончательно находим

$$V=\left[3\arcsin x+3x\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_{-1}^1=3\pi\text{ (куб. ед.)}.\ \bullet$$

41. Вычислить объем шара радиуса R.

○ Из уравнения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ находим $z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$. В силу симметрии сферы относительно начала координат вычислим 1/8 объема шара, расположенную в I октанте. Проекция части сферы, принадлежащей I октанту, на плоскость xOy есть 1/4 часть круга $x^2+y^2=R^2$, ограниченная осями Ox и Oy.

Для упрощения вычислений интеграла перейдем к полярным координатам. Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то $x^2+y^2=r^2$, $r=R$. Полярный угол изменяется от 0 до $\pi/2$. Область D в полярных координатах запишем в виде системы неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

Согласно формуле (29.15), получим

$$\frac{1}{8}V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\iint\limits_D\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr.$$

Вычислим внутренний интеграл, применяя подстановку $R^2-r^2=u$; отсюда $-2r\,dr=du$, $r\,dr=-\frac{1}{2}du$, $u_н=R^2$, $u_в=0$, т. е.

$$\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr=-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2}^0 u^{1/2}\,du=\frac{1}{3}R^3.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\frac{1}{8}V=\frac{1}{3}R^3\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{1}{6}\pi R^3.$$

Значит, $V=8\cdot\frac{1}{6}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3$. ●

42. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=9-x^2-y^2$, $x^2+y^2-2y=0$, $z=0$.

○ Данное тело есть вертикальный цилиндр, ограниченный сверху параболоидом $z=9-x^2-y^2$, сбоку цилиндром $x^2+y^2-2y=0$, снизу кругом $x^2+y^2-2y=0$. Так как область интегрирования является кругом, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, то перейдем к полярным координатам. Уравнение окружности примет вид $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-2r\sin\varphi=0$ или $r^2-2r\sin\varphi=0$, откуда $r_1=0$, $r_2=2\sin\varphi$. Полярный угол φ изменяется от 0 до π. Область D запишется в виде системы неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant r\leqslant 2\sin\varphi$, а подынтегральная функция примет вид $z=9-(x^2+y^2)=9-r^2$. Используя формулу (29.15), получим

$$V=\iint_D z\,dx\,dy=\iint_D (9-r^2)\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (9r-r^3)\,dr=\int_0^{\pi}\left[\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\varphi} d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[18\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi\right]d\varphi=\int_0^{\pi}\left[18\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}-4\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2\right]d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[9-9\cos 2\varphi-1+2\cos 2\varphi-\cos^2 2\varphi\right]d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[8-7\cos 2\varphi-\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right]d\varphi=7{,}5 \text{ (куб. ед.).} \bullet$$

43. Вычислите объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

1) $z=6,\ y=x^2,\ y=4,\ x=0,\ z=0;$
2) $z=3-x-y,\ x=0,\ y=x^2+1,\ y=2,\ z=0;$
3) $z=4-x^2-y^2,\ x=\pm 2,\ y=\pm 2,\ z=0;$
4) $z=4x+1,\ y=x^2,\ x=0,\ y=4,\ z=0;$
5) $z=4-x^2,\ x+y-4=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$
6) $z=2-x,\ y^2=9x,\ y=3x^2,\ z=0;$
7) $z=x^2+y^2,\ x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$
8) $z=x^2+y^2,\ x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=0.$

44. Вычислите объемы тел, ограниченных заданными поверхностями (для вычисления интегралов используйте полярные координаты):

1) $z=16-(x^2+y^2),\ z=0;$
2) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=9,\ z=0;$
3) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x,\ z=0;$ дуга окружности $x^2+y^2=4$ лежит в I квадранте;
4) $z=6-x^2-y^2,\ x^2+y^2=4,\ z=0;$
5) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2=12,\ z=0;$
6) $z=12-x^2-y^2,\ z=3.$

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Если поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$ и проектируется в область D плоскости xOy $(z=0)$, то площадь S поверхности вычисляется по формуле

$$S=\iint_{D(xOy)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (29.16)$$

Если поверхность проектируется на плоскость yOz $(x=0)$, то уравнение поверхности следует решить относительно переменной x и формула примет вид

$$S=\iint_{D(yOz)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz. \qquad (29.17)$$

Если поверхность проектируется на плоскость xOy $(y=0)$, то уравнение поверхности следует решить относительно переменной y и формула примет вид

$$S=\iint_{D(xOz)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz. \qquad (29.18)$$

45. Вычислить площадь треугольника, образованного при пересечении плоскости $x+3y+2z=6$ с координатными плоскостями.

○ Найдем отрезки, отсекаемые на координатных осях данной плоскостью:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1,$$

$x=6,\ y=2,\ z=3$ (рис. 217).

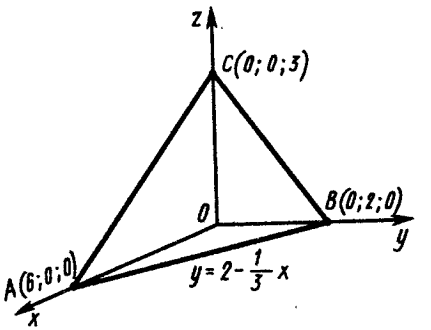


Рис. 217

Чтобы воспользоваться формулой (29.16), решим уравнение данной плоскости относительно переменной z и найдем частные производные: $z=3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y,$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2}.$

При $z=0$ имеем $x+3y=6,$ откуда $y=2-\frac{1}{3}x$; следовательно, в плоскости $z=0$ область D запишется в виде системы неравенств $0\leqslant x\leqslant 6,\ 0\leqslant y\leqslant 2-\frac{1}{3}x.$ Тогда

$$S=\iint_{D(xOy)}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx\,dy=\int_0^6 dx\int_0^{2-\frac{1}{3}x}\frac{\sqrt{14}}{2}\,dy=\frac{\sqrt{14}}{2}\int_0^6\left[y\right]_0^{2-\frac{1}{3}x}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{2}\int_0^6\left(2-\frac{1}{3}x\right)dx=3\sqrt{14} \text{ (кв. ед.).} \bullet$$

46. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=16,$ заключенной между плоскостями $z=0,\ z=4x,\ y=0.$

○ Искомая поверхность лежит в I октанте (рис. 218). Проекция поверхности на плоскость xOz $(y=0)$ есть прямоугольный треугольник, в котором $OA=x=4$ и уравнение гипотенузы OB имеет вид $z=4x$. Следовательно, область D в плоскости xOz определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant z\leqslant 4x.$

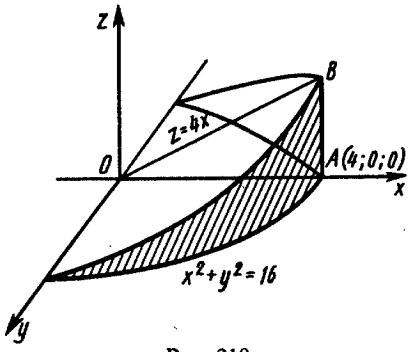


Рис. 218

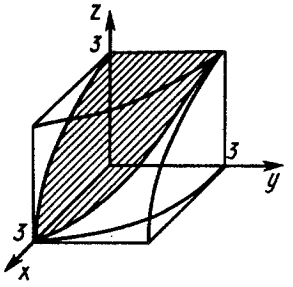


Рис. 219

Поскольку заданная поверхность спроектирована на плоскость xOz, для вычисления площади поверхности применим формулу (29.18). Из уравнения цилиндра получим $y=\sqrt{16-x^2}$ $(y\geqslant 0)$. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2\sqrt{16-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$, $\frac{\partial y}{\partial z}=0$. Тогда

$$S=\iint\limits_{D(xOz)}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}\,dx\,dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4x}\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}dz=$$

$$=4\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4x}\frac{dz}{\sqrt{16-x^2}}=4\int\limits_0^4\left[\frac{z}{\sqrt{16-x^2}}\right]_0^{4x}dx=16\int\limits_0^4\frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

Для вычисления интеграла применим подстановку $16-x^2=t$ и окончательно получим $S=64$ (кв. ед.) ●

47. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+z^2=9$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=9$ (рис. 219).

○ Искомая поверхность образована пересечением двух цилиндров $x^2+y^2=9$ и $x^2+z^2=9$. В эти уравнения поверхностей входят квадраты переменных, поэтому искомая поверхность симметрична относительно каждой из координатных плоскостей и для вычисления рассмотрим 1/8 ее часть, лежащую в I октанте.

Область интегрирования D представляет собой 1/4 часть круга $x^2+y^2=9$, заключенного между положительными полуосями Ox и Oy, и определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant\sqrt{9-x^2}$.

Из уравнения $x^2+z^2=9$ имеем $z=\sqrt{9-x^2}$. Далее, находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, откуда

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Следовательно,

$$S=8\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dy=24\int\limits_0^3\left[\frac{y}{\sqrt{9-x^2}}\right]_0^{\sqrt{9-x^2}}=24\int\limits_0^3 dx=72\ \text{(кв. ед.)}.$$ ●

48. Вычислите площади:

1) треугольника, который образуется в пересечении плоскости $3x+2y+4z=12$ с координатными плоскостями;

2) части поверхности цилиндра $x^2+z^2=16$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=16$;

3) части поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=8$. (Спроектируйте поверхность на плоскость yOz и для вычисления интеграла примените формулу (29.17));

4) части поверхности цилиндра $x^2+y^2=4$, заключенной между плоскостями $z=0$, $z=2x$, $y=0$, $x=0$ (спроектируйте поверхность на плоскость xOz и для вычисления интеграла примените формулу (29.18)).

49. Вычислите площади (при вычислении интеграла используйте полярные координаты):

1) части поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=16$ $(z\geqslant 0)$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=4$;

2) части поверхности параболоида $x^2+z^2=2y$, расположенной в I октанте и ограниченной плоскостью $y=4$ (спроектируйте поверхность на плоскость xOz и для вычисления интеграла примените формулу (29.18));

3) части боковой поверхности, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=6$;

4) части поверхности, вырезаемой на полусфере $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geqslant 0)$ цилиндром $x^2+y^2-2y=0$ и ограниченной плоскостью $x=0$ (плоскостью yOz);

5) части поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$ $(z\geqslant 0)$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2-4x=0$.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $x=0$, $y=1/2$.

2) Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z=2x+2$, $y=x^2$, $x=0$, $y=9$, $z=0$.

3) Вычислите площадь части поверхности цилиндра $y=x^2$, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=6-x-y$, $x=0$, $y=4$.

II вариант

1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y=6/x$ и прямой $x+y-7=0$.

2) Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z=8-x-y$, $x=0$, $y=x^2$, $y=4$, $z=0$.

3) Вычислите площадь части поверхности цилиндра $y=x^2+2$, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=8-x-y$, $x=0$, $y=6$.

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Если D — часть плоскости xOy, которую занимает материальная фигура с переменной плотностью $\delta(x, y)$, то масса m фигуры D вычисляется по формуле

$$m=\iint_D \delta(x, y)\,dx\,dy. \qquad (29.19)$$

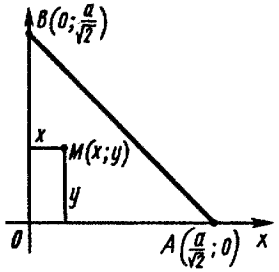


Рис. 220

50. Вычислить массу материальной пластинки, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна a. Поверхностная плотность этой пластинки в каждой ее точке пропорциональна сумме расстояний до катетов. Коэффициент пропорциональности равен k.

○ Совместим вершину прямого угла треугольника с началом координат так, чтобы катеты совпали с положительными направлениями координатных осей. Из треугольника OAB (рис. 220) находим $x^2+x^2=a^2$, т. е. $x=a/\sqrt{2}$; следовательно, вершины треугольника имеют координаты: $A\,(a/\sqrt{2};\,0)$, $B\,(0;\,a/\sqrt{2})$. Уравнение гипотенузы есть $y=-x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Область D запишем в виде системы неравенств $0\leqslant x\leqslant a/\sqrt{2}$, $0\leqslant y\leqslant -x+a/\sqrt{2}$; переменная плотность есть $\delta(x, y)=k(x+y)$.

Согласно формуле (29.19), получим

$$m=\iint_D \delta(x, y)\,dx\,dy=\iint_D k(x+y)\,dx\,dy=k\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dx\int_0^{-x+\frac{a}{\sqrt{2}}}(x+y)\,dy=$$

$$=k\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{-x+\frac{a}{\sqrt{2}}}dx=k\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{ka^3\sqrt{2}}{12}.\ \bullet$$

51. Найти массу круглой пластинки радиуса R, если поверхностная плотность δ материала пластинки в каждой точке $M\,(x; y)$ пропорциональна расстоянию точки M от центра круга.

○ Совместим начало прямоугольной системы координат с центром круга. Координаты любой точки круга удовлетворяют соотношению $x^2+y^2=R^2$. Расстояние точки $M\,(x; y)$ до начала координат вычисляется по формуле $d=\sqrt{x^2+y^2}$, поэтому $\delta(x, y)=k\sqrt{x^2+y^2}$, где k — коэффициент пропорциональности.

Согласно формуле (29.19), имеем $m=\iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где D — круг $x^2+y^2=R^2$. Вычислим интеграл в полярной системе координат. Здесь переменная плотность $\delta=k\sqrt{x^2+y^2}=k\sqrt{r^2}=kr$; область D запишется в виде системы неравенств $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0<r<R$. Тогда

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R kr\cdot r\,dr=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^2\,dr=\frac{2}{3}k\pi R^3.\ \bullet$$

52. Найдите массу треугольной пластинки, ограниченной прямыми $y=-\dfrac{2}{3}x+6$, $y=\dfrac{1}{3}x$ и осью Oy, если плотность $\delta(x, y)$ распределения массы в каждой точке пластинки численно равна ординате этой точки.

53. Найдите массу квадратной пластинки со стороной $a=4$, плотность которой в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до одной из вершин квадрата. Коэффициент пропорциональности равен k.

54. Материальная пластинка имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника, длина гипотенузы которого равна $2\sqrt{2}$. Найдите массу пластинки, если ее плотность в каждой точке численно равна расстоянию этой точки до катета.

55. Найдите массу пластинки, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=9$, если плотность $\delta(x, y)$ распределения массы в каждой точке численно равна ординате этой точки.

56. Найдите массу круглой пластинки, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки. Коэффициент пропорциональности равен k. (Для вычисления интеграла воспользуйтесь полярными координатами.)

57. Найдите массу кругового кольца, радиусы которого $R_1=2$ и $R_2=6$, а поверхностная плотность в каждой точке кольца обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца. Коэффициент пропорциональности равен k. (Для вычисления интеграла воспользуйтесь полярными координатами.)

§ 9. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Статическим моментом материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы точки на расстояние до оси.

Статические моменты S_x и S_y плоской фигуры D с переменной плотностью $\delta(x, y)$ относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$S_x=\iint_D y\delta(x, y)\,dx\,dy,\qquad S_y=\iint_D x\delta(x, y)\,dx\,dy. \qquad (29.20)$$

Если фигура D является однородной (плотность δ постоянна), то

$$S_x=\delta\iint_D y\,dx\,dy,\qquad S_y=\delta\iint_D x\,dx\,dy. \qquad (29.21)$$

58. Найти статические моменты относительно координатных осей фигуры, ограниченной параболой $y^2=x$ $(y\geqslant 0)$ и прямой $x=4$, если плотность δ распределения массы в каждой точке равна абсциссе этой точки.

○ Согласно условию, $\delta=x$. Область D определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$. Используя формулы (29.20), получим

$$S_x=\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\left[y^2\right]_0^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 x\,dx=4\ \text{(куб. ед.)};$$

$$S_y=\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\int\limits_0^4 x^2\,dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} dy=\int\limits_0^4\left[y\right]_0^{\sqrt{x}}x^2\,dx=\int\limits_0^4 x^{5/2}\,dx=36\frac{4}{7}\ \text{(куб. ед)}.\ \bullet$$

59. Найти статический момент пластинки в форме полукруга $x^2+y^2=R^2$ относительно диаметра, если ее плотность $\delta=1$.

○ Согласно формуле (29.20), статический момент относительно оси Ox есть $S_x=\iint\limits_D y\,dx\,dy$. Перейдем к полярным координатам; тогда $R=r$ и $y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-r^2\cos^2\varphi}=r\sin\varphi$.

В силу симметрии области D относительно оси Oy возьмем 1/2 этой области, которая определяется системой неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant R$. Следовательно,

$$S_x=2\iint\limits_D r\sin\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R r^2\,dr=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left[r^3\right]_0^R\cdot\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2R^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{2R^3}{3}\left[\cos\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{2R^3}{3}\ \text{(куб. ед.)}.\ \bullet$$

60. Найдите статические моменты относительно осей Ox и Oy однородных пластинок ($\delta=1$), имеющих формы:

1) прямоугольника $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 6$;
2) треугольника с вершинами O (0; 0), A (6; 0), B (0; 8);
3) полукруга $x^2+y^2=16$, $y\geqslant 0$;
4) эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, ограниченного положительными полуосями Ox и Oy;
5) параболы $y=x^2$, $x\geqslant 0$, $y=4$.

61. Пластинка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами $OA=3$, $OB=4$, причем ее плотность в любой точке пластинки равна расстоянию этой точки от катета OA. Вычислите статические моменты пластинки относительно катетов OA и OB.

62. Найдите статические моменты относительно осей Ox и Oy пластинки, ограниченной прямыми $x-3y=0$, $2x+3y-18=0$ и осью Oy, если плотность в любой точке пластинки равна ординате этой точки.

§ 10. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Координаты центра тяжести $(x_C; y_C)$ плоской фигуры с непрерывной массой и переменной плотностью $\delta=\delta(x, y)$ вычисляются по формулам

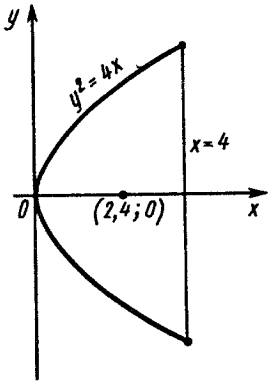


Рис. 221

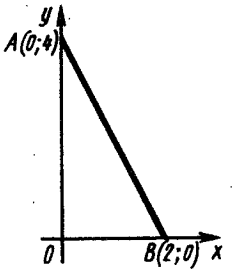


Рис. 222

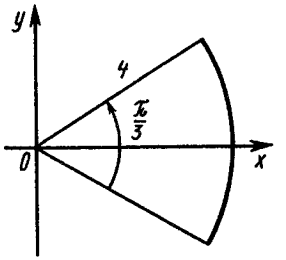


Рис. 223

$$x_C=\frac{\iint\limits_D x\delta(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,dx\,dy},\qquad y_C=\frac{\iint\limits_D y\delta(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,dx\,dy}\qquad (29.22)$$

или в другой форме записи

$$x_C=\frac{S_y}{m},\qquad y_C=\frac{S_x}{m},\qquad (29.23)$$

где m — масса фигуры, S_y, S_x — статические моменты относительно осей координат.

Если фигура D является однородной ($\delta=\text{const}$) и S — площадь этой фигуры, то координаты центра тяжести находятся по формулам

$$x_C=\frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dx\,dy,\qquad y_C=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dx\,dy.\qquad (29.24)$$

В полярной системе координат формулы (29.24) имеют вид

$$x_C=\frac{1}{S}\iint\limits_D r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi,\qquad y_C=\frac{1}{S}\iint\limits_D r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi.\qquad (29.25)$$

Если однородная плоская фигура имеет ось симметрии или точку симметрии, то центр тяжести расположен на этой оси или в этой точке.

63. Вычислить координаты центра тяжести однородной фигуры ($\delta=1$), ограниченной кривой $y^2=4x$ и прямой $x=4$ (рис. 221).

○ Фигура симметрична относительно оси Ox; поэтому центр тяжести лежит на оси Ox и $y_C=0$. Абсциссу центра тяжести найдем по формуле (29.24). Область D определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 4$, $-2\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}$.

Площадь фигуры D найдем по формуле $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$; имеем

$$S=2\int_0^4 2x^{1/2}\,dx=4\cdot\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^4=\frac{64}{3}\text{ (кв. ед.).}$$

Следовательно,

$$x_C=\frac{1}{S}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{3}{64}\int_0^4 x\,dx\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\frac{3}{64}\int_0^4\left[y\right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}x\,dx=\frac{3}{64}\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx=2{,}4.$$

Итак, центр тяжести фигуры — точка $C\,(2{,}4;\,0)$. ●

64. Найти координаты центра тяжести прямоугольного треугольника OAB, катеты которого равны 2 и 4. Плотность в каждой точке треугольника численно равна абсциссе этой точки (рис. 222).

○ Гипотенуза треугольника проходит через точки (2; 0) и (0; 4); следовательно, ее уравнение имеет вид $y=-2x+4$. Область D определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant -2x+4$; переменная плотность $\delta(x,\,y)=x$.

Для вычисления координат центра тяжести последовательно применим формулы (29.19), (29.20) и (29.23). Имеем

$$m=\iint_D \delta(x,\,y)\,dx\,dy=\int_0^2 x\,dx\int_0^{4-2x}dy=\int_0^2\left[y\right]_0^{4-2x}x\,dx=\int_0^2(4-2x)\,x\,dx=\frac{8}{3},$$

$$S_x=\iint_D y\delta(x,\,y)\,dx\,dy=\int_0^2 x\,dx\int_0^{4-2x}y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left[y^2\right]_0^{4-2x}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(16-16x+4x^2)\,x\,dx=\frac{8}{3},$$

$$S_y=\iint_D x\delta(x,\,y)\,dx\,dy=\int_0^2 x^2\,dx\int_0^{4-2x}dy=\int_0^2\left[y\right]_0^{4-2x}x^2\,dx=\int_0^2(4-2x)\,x^2\,dx=\frac{8}{3}.$$

Тогда $x_C=S_y/m=1$, $y_C=S_x/m=1$ и, следовательно, $C\,(1;\,1)$ — центр тяжести треугольника. ●

65. Вычислить координаты центра тяжести сектора однородного круга ($\delta=1$), расположенного симметрично относительно оси Ox (рис. 223). Радиус круга равен 4, а центральный угол равен $\pi/3$.

○ Перейдем к полярным координатам. Площадь кругового сектора вычислим по формуле $S=\frac{1}{2}R^2\varphi$, где φ выражается в радианах, т. е. $S=\frac{1}{2}\times$ $\times 16\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$ (кв. ед.).

Область D в полярных координатах определяется системой неравенств $-\pi/6\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$, $0\leqslant r\leqslant 4$. Так как фигура симметрична относительно оси Ox, то $y_C=0$. Теперь, используя формулу (29.25), находим

$$x_C=\frac{1}{S}\iint_D r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi=\frac{3}{8\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^4 r^2\,dr=\frac{3}{8\pi}\cdot\frac{1}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos\varphi\left[r^3\right]_0^4 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\cdot 64\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{8}{\pi}.$$

Следовательно, $C\,(8/\pi;\,0)$ — центр тяжести фигуры. ●

66. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки ($\delta=1$), ограниченной линиями:

1) прямой $4x+3y-12=0$ и осями координат;
2) параболами $y=x^2$ и $x=y^2$;
3) параболой $y=x^2$ и прямой $x-y+2=0$;
4) параболами $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямыми $x=0$, $x=2$;
5) полуволной синусоиды $y=\sin x$ $(y\geqslant 0)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

67. Найдите координаты центра тяжести треугольной пластинки, ограниченной прямыми $y=x$, $y=4$ и осью Oy, если плотность распределения массы в каждой точке пластинки численно равна абсциссе этой точки.

68. Найдите координаты центра тяжести треугольной пластинки, ограниченной прямыми $y=\frac{1}{3}x$, $y=6-\frac{2}{3}x$ и осью Oy. Плотность в каждой точке этой пластинки численно равна абсциссе этой точки. Найдите координаты центра тяжести при условии, что пластинка является однородной ($\delta=1$).

69. Вычислите координаты центра тяжести пластинки, ограниченной прямыми $y=x$, $x=1$ и осью Ox, если плотность распределения массы в каждой точке пластинки равна квадрату ее расстояния от начала координат.

70. Вычислите координаты центра тяжести сектора однородного круга ($\delta=1$), расположенного симметрично относительно оси Ox. Радиус круга равен 6, а центральный угол равен $\pi/2$.

§ 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Моментом инерции материальной точки относительно оси называется произведение массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси.

Моменты инерции материальной плоской фигуры D, распределение массы которой характеризуется плотностью $\delta=\delta(x,\,y)$, вычисляются по формулам:

$$I_x=\iint_D y^2\,\delta(x,\,y)\,dx\,dy \qquad (29.26)$$

(момент инерции относительно оси Ox);

$$I_y=\iint_D x^2\,\delta(x,\,y)\,dx\,dy \qquad (29.27)$$

(момент инерции относительно оси Oy);

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy \qquad (29.28)$$

(момент инерции относительно начала координат).

Величина I_0 называется *полярным моментом инерции* и может быть выражена равенством

$$I_0=I_x+I_y. \qquad (29.29)$$

Если плоская фигура D является однородной и симметричной относительно оси абсцисс (ординат), то момент инерции $I_x(I_y)$ равен удвоенному моменту инерции относительно оси Ox (оси Oy) половины этой фигуры, расположенной по одну сторону от оси абсцисс (ординат).

71. Найти моменты инерции I_x, I_y и I_0 пластинки, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=x$, если плотность в каждой точке пластинки численно равна ординате этой точки.

○ Парабола и прямая пересекаются в точке $M(1;1)$; значит, область D определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 1$, $x^2\leqslant y\leqslant x$. Используя формулы (29.26), (29.27) и (29.29), получим

$$I_x=\iint_D y^2y\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} y^3\,dy=\frac{1}{4}\int_0^1 \left[y^4\right]_{x^2}^{x}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 (x^4-x^8)\,dx=\frac{1}{45}\ (\text{ед}^4);$$

$$I_y=\iint_D x^2y\,dx\,dy=\int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^{x} y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[y^2\right]_{x^2}^{x}x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4-x^6)\,dx=\frac{1}{35}\ (\text{ед}^4).$$

$$I_0=I_x+I_y=\frac{1}{45}+\frac{1}{35}=\frac{16}{315}\ (\text{ед}^4).\ \bullet$$

72. Найти момент инерции однородного квадрата со стороной, равной 3, относительно одной из его вершин.

○ Совместим одну из вершин квадрата с началом координат, а координатные оси Ox и Oy направим по двум его сторонам, исходящим из этой вершины. Область D определяется системой неравенств $0\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant 3$.

Искомый момент инерции найдем по формуле (29.28) при $\delta=1$:

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^3 dx\int_0^3 (x^2+y^2)\,dy=\int_0^3\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^3 dx=\int_0^3 (3x^2+9)\,dx=$$

$$=54\ (\text{ед.}^4)\ \bullet$$

73. Вычислите моменты инерции I_x, I_y и I_0 однородной пластинки ($\delta=1$), ограниченной заданными линиями: 1) $x=2$, $y=3$, $x=0$, $y=0$; 2) $y=x$, $x=4$, $y=0$; 3) $y=x^2$, $y=1$, $x=0$; 4) $y=\cos x$, $0\leqslant x\leqslant \pi/2$.

74. Вычислите моменты инерции I_x, I_y и I_0 пластинки, ограниченной параболой $y=x^2/4$, осью Ox и прямой $x=2$, если плотность в каждой точке пластинки численно равна ординате этой точки.

75. Вычислите моменты инерции I_x, I_y и I_0 квадратной пластинки, ограниченной осями координат и прямыми $x=1$ и $y=1$, если плотность в каждой точке пластинки численно равна квадрату расстояния от начала координат до этой точки.

76. Вычислите моменты инерции I_x, I_y и I_0 пластинки, ограниченной параболой $y=x^2/2$, осью Oy и прямой $x=2$, если плотность в каждой точке пластинки численно равна абсциссе этой точки.

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

I вариант

1) Найдите массу прямоугольной пластинки со сторонами 4 и 5, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния от одной из вершин прямоугольника до этой точки. Коэффициент пропорциональности равен k.

2) Найдите статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной пластинки ($\delta=1$), имеющей форму треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(4;4)$ и $B(0;6)$.

3) Найдите координаты центра тяжести пластинки, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$, если плотность в каждой точке пластинки численно равна ординате этой точки.

4) Найдите моменты инерции I_x, I_y и I_0 однородной пластинки ($\delta=1$), ограниченной осями координат и прямыми $x=6$, $y=4$.

II вариант

1) Найдите массу прямоугольной пластинки со сторонами 3 н 4, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме абсциссы и ординаты любой точки прямоугольника. Коэффициент пропорциональности равен k.

2) Найдите статические моменты относительно координатных осей пластинки, ограниченной параболой $y^2=x$ ($y\geqslant 0$), прямой $x=9$, если плотность распределения массы в каждой точке равиа ординате этой точки.

3) Найдите координаты центра тяжести пластинки, ограниченной параболой $y=x^2/2$ и прямой $y=2$, если плотность распределения массы в каждой точке пластинки численно равна ординате этой точки.

4) Найдите моменты инерции I_x, I_y и I_0 однородной пластинки ($\delta=1$), ограниченной осями координат и прямой $y=2-0{,}5x$.

2) $x_1=-2$; $x_2=1$; $x_3=3$; $x_4=4$; 3) $x_1=-4$; $x_2=-2$; $x_3=1$; $x_4=3$; 4) $x_1=-1/2$; $x_2=1$; $x_3=3$; 5) $x_1=-3$; $x_2=-1$; $x_3=0$; $x_4=4$; 6) $x_1=-2$; $x_2=1$; $x_3=3$. **74.** 1) $x^3+2x^2-5x-6=0$; 2) $6x^3-x^2-4x-1=0$. **75.** 1) $x_1=-3$; $x_2=3$; 2) $x=-0{,}4$; 3) $x_1=-2{,}5$; $x_2=2{,}5$; 4) $x=0{,}6$. **76.** 23 и 24. **77.** 3/5. **78.** 24. **79.** 9 и 12 см. **80.** 12 и 16 см. **81.** 8 и 12 см. **82.** 18 чел. **83.** 6 и 12 дней. **84.** 2 и 2,5 км в день. **85.** 60 и 48 г. **86.** Переднее 2 м, заднее 3 м. **87.** 30 км/ч и 24 км/ч. **88.** 60 км/ч, 80 км/ч. **89.** 24 км/ч. **92.** 1) $-\infty<x<-3$ или $2/3<x<+\infty$; 2) $-0{,}75\leqslant x\leqslant 4$; 3) $2<x<3$; 4) $-\infty<x\leqslant -2$ или $4\leqslant x<+\infty$; 5) $-\infty<x<+\infty$; 6) нет решения; 7) $-\infty<x<+\infty$; 8) нет решения; 9) $-\infty<x<+\infty$; 10), 11) нет решения; 12) $-\infty<x<+\infty$; 13) $-1/3<x<2$; 14) $-2\leqslant x\leqslant 10$; 15) $-\infty<x<-9$ или $3<x<+\infty$; 16) $-\infty<x<2{,}5$ или $4<x<+\infty$; 17) нет решения; 18) $-\infty<x<+\infty$; 19) $-\infty<x<-1$ или $1<x<+\infty$; 20) $-2<x<2$; 21) $0<x<2{,}5$; 22) $0<x<3$. **93.** 1) $-\infty<x<2/3$ или $3/2<x<+\infty$; 2) $-7/2\leqslant x\leqslant 2/3$; 3) $-\infty<x<2/7$ или $8/3<x<+\infty$; 4) $-8/5<x<7/3$. **96.** 1) -2; 0; 3; 2) 4; 3) 7; 4) 4; 5) 5; 6) 3; 7) -5; 5; 8) -2; 2. **97.** 1) 1; 5; 2) 1; 3) нет решения; 4) -5; 4; 5) нет решения; 6) 17/16; 7) $-1/2$; 1/2; 8) 7. **98.** 1) 5; 6; 2) 2; 3) 1; 4) 2; 5) 4; 6) 3; 7) 7; 8) нет решения. **100.** 1) $4<x<+\infty$; 2) $1<x<+\infty$; 3) $-4{,}5\leqslant x<0$; 4) $-\infty<x\leqslant -1$ или $1\leqslant x<2{,}6$; 5) $0\leqslant x\leqslant 3$; 6) $-\infty<x\leqslant -2$ или $5\leqslant x<74/13$. **101.** 1) $0\leqslant x<+\infty$; 2) $27<x<+\infty$; 3) $-2\leqslant x<2$; 4) $-\infty<x\leqslant -2$ или $14<x<+\infty$; 5) $1/2<x<+\infty$; 6) $0<x<+\infty$; 7) $0{,}25<x\leqslant 2$; 8) $2/3<x\leqslant 3$. **102.** 1) $8\leqslant x<12$ или $24<x<+\infty$; 2) $0<x<3$; 3) $7{,}75<x\leqslant 10$. **106.** 1) (19; -3), (1; 3); 2) (-3; -1), (-12; 3,5), (12; $-3{,}5$), (3; 1); 3) (-3; -5), (8; -5), (-8; 5), (3; 5); 4) (-3; 6), (3; -6), (-6; -3), (6; 3); 5) (8; 4), (4; 8); 6) (-2; -3), (-3; -2), (2; 3), (3; 2); 7) (2; -3), (-2; 3), (-3; -2), (3; 2); 8) $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2}; \sqrt{2})$; 9) (3; 2), (-2; -3); 10) (-3; -2), (3; 2), $(-\sqrt{3}/3; -5\sqrt{3}/3)$, $(\sqrt{3}/3; 5\sqrt{3}/3)$. **107.** 4 и 36. **108.** 12 и 35 см. **109.** 27 и 36 см. **110.** 15, 36 и 39 см. **111.** 25, 45 и 51 см. **112.** 68. **115.** 1) $z_{\max}=17$ при $x_1=2$, $x_2=3$; **2) $z_{\max}=16$ при $x_1=2$, $x_2=4$. 116. $z_{\max}=27$ тыс. руб, 6 изделий I вида и 5 изде-**

4) 0. **30.** 1) 0; $\log_7 5$; 2) 1; 2; 3) 2; $\log_3 2/3$; 4) 0; 1; 5) $\log_{2/3} 0{,}5(\sqrt{5}-1)$; 6) $\log_8 3$; $\log_9 8$. **31.** 1) $\approx -0{,}77$; 2; 4; 2) -2; $\approx 1{,}7$. **33.** 1) (2; 1); 2) (2; 3), $(3\log_2 3; 2\log_3 2)$; 3) (1; 1), $(5/3; (5/3)\sqrt{5/3})$; 4) (3; 2). **34.** 1) $(-2; 0)$; 2) $(-2; 1{,}5)$; 3) (3; 2); 4) (2; 1). **35.** 1) (4; 1); 2) (3; 2). **37.** 1) $3<x<+\infty$; 2) $3<x<+\infty$; 3) $-\infty<x<3$ или $5<x<+\infty$. **38.** 1) $-\infty<x<3$ или $5<x<6$; 2) $2<x<3$ или $4<x<+\infty$. **41.** 1) 15; 2) 216; 3) 13/21; 2; 4) 5. **42.** 1) 100; 1000; 2) 28/9; 12. **43.** 1) 1; 2) 1; 4; 3) 1. **44.** 1) 64; 2) 1/25; $25^{2/3}$. **46.** 1) (1; 10); 2) (0,5; 0,25); 3) (10; 0,1); 4) (16; 10). **47.** 1) (25; 4); (4; 25); 2) (6; 2); 3) (3; 4); $(-7\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$; 4) (16; 4); 5) (3; 27); 6) (2; 6); 7) (9; 25), (25; 9). **49.** 1) $-\infty<x<-1/2$ или $2<x<+\infty$; 2) $-2<x<1$ или $3<x\leqslant 6$; 3) $-6<x<-2$; 4) $-1<x<0$ или $2<x<+\infty$; 5) $4/3<x<3/2$; 6) $0<x<+\infty$; 7) $4<x<+\infty$; 8) $-1<x<3$ или $7<x<11$. **50.** 1) $-\infty<x<1$ или $1<x<+\infty$; 2) $-\infty<x<4$ или $4<x<+\infty$; 3) $-\infty<x\leqslant -\sqrt{3}$ или $\sqrt{3}\leqslant x<+\infty$; 4) $-\infty<x<-5$ или $-5<x<4$ или $4<x<+\infty$; 5) $-\infty<x\leqslant 2$ или $6\leqslant x<+\infty$; 6) $5\leqslant x<+\infty$; 7) $-\infty<x<-3$ или $3<x<+\infty$; 8) $0<x<+\infty$. **51.** 1) -1; 2; 2) 4; 3) -2; 2. **52.** 1) 1; 2) 4; 3) -1; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 1,5; 7) -1; 0; 1. **53.** 1) $0<x<1$; 2) $-\infty<x<-1$ или $5<x<+\infty$; 3) $3<x<4$ или $4<x<5$ или $6<x<+\infty$. **54.** 1) 2; 8; 2) 2; 3) 5; 4) 6; 10; 5) 5; 8; 6) 3; 7; 7) 4; 8) 11; 9) 7; 10) 9. **55.** 1) 8; 2) 4; 36; 3) 0; 6; 4) 10; 100 000; 5) 10/3; 30; 6) 10; 7) 1/5; 25; 8) 8. **56.** 1) $-13/20<x<-1/2$ или $-1/2<x<-7/20$; 2) $5/3<x<3$; 3) $-4<x<2$ или $2<x<8$; 4) $1/4<x<7/2$; 5) $4<x<+\infty$; 6) $\log_3(28/27)<x<\log_3 4$. **Зачетная работа.** I вариант. 1) 3; 2) 8; 3) $0<x<1$; 4) $2<x<7/2$ или $7/2<x<5$; 5) $(2m+1)/2$. II вариант. 1) -2; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-1/3<x<3$; 4) $1/2<x<1$; 5) $(a+1)/(a+b)$.

Глава 5

6. 1) 7, 9, 11, 13, 15; 2) 1, 1/3, , $_{6^x}$ 3 $^{6}_{3}$. + + $^{-}_{I}$ 1 $^{-}_{2}$ (1 $_{1}$ – . $^{-}$)ре,

2) (3; −2), (7; −4) и (1; −6); 3) (−3; 2), (−7; 4) и (−1; 6); 4) (2; 3), (4; 7) и (6; 1). **117.** $\overrightarrow{AM_1}=\vec{a}+0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{BM_2}=0{,}5\vec{b}-0{,}5\vec{a}$; $\overrightarrow{CM_3}=-0{,}5\vec{a}-\vec{b}$; $|\overrightarrow{AM_1}|=10$. **118.** 10. **119.** A (−8; −3). **120.** (−3; −3). **121.** D (6; −3). **122.** C (5; −5), D (1; −7). **Зачетная работа.** I вариант. 1) $\overrightarrow{AB}=(3; 7)$; 2) (4; 4); 3) M_1 (2; −2), M_2 (10; −10); 4) 90°. II вариант. 1) $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}+9\vec{j}$; 2) C (4; −3); 3) C (8; −2); 4) 63/65.

Глава 18

11. 6 кв. ед. **12.** 1) $y+4=0$; 2) $x+6=0$. **13.** 1) $y=0$, $x=-4$, $y=-3$, $x=0$; 2) $x=2$, $y=0$, $x=5$, $y=3$. **14.** 1) $4x-5y-7=0$; 2) $3x-4y-7=0$. **15.** 1) $2x+y+7=0$; 2) $5x-2y-6=0$; 3) $x-4y-10=0$. **16.** 1) $x-4y=0$; 2) $4x+5y=0$. **17.** 15. **18.** 1) (2; −1); 2) (−4; −2). **23.** 1) $x/3+y/3=1$; 2) $x/(-1/2)+y/(-1/3)=1$; 3) $x/3+y/2=1$; 4) $x/(-4)+y/3=1$. **24.** 1) $x/(-2)+y/3=1$; 2) $x/3+y/(-4)=1$. **25.** 1) 10; 2) 20; 3) 15. **37.** 1) 30°; 2) 108°,4; 3) 81°,9; 4) 109°,1; 5) 149°; 6) 71°. **38.** 1) $x+y=0$; 2) $4x-y=0$. **39.** $y=(2/3)x-1/2$. **40.** 1) $\sqrt{3}x-y=0$; 2) $\sqrt{3}x-3y=0$; 3) $x+y=0$; 4) $3x-y=0$; 5) $5x+y=0$. **41.** 1) $y=x+3$; 2) $y=-\sqrt{3}x+3$; 3) $y=5x+3$. **42.** 1) $y=(\sqrt{3}/3)x-2$; 2) $y=-x-2$; 3) $y=2x-2$. **43.** 1) $2x+y=0$; 2) $5x-y=0$. **44.** 1) P (4; 3); 2) (0; 0), (12; 0), (12; 16) и (0; 16). **45.** $y=-2x-12$. **46.** 1) $y=-2x+3$; 2) $y=-x-5$. **49.** 1) $x-y=0$; 2) $2x+y-4=0$. **50.** 1) $3x+y-7=0$; 2) $x-y+1=0$; 3) $x+y-5=0$. **55.** 1) $x-y=0$; 2) $4x+3y-12=0$. **56.** 1) $7x-4y+13=0$ (AB); $9x+7y-44=0$ (BC); $2x+11y+28=0$ (AC); 2) $2x-y-1=0$, $5x+y-20=0$ и $3x-5y-12=0$. **57.** 1) $x+y-1=0$; 2) $x-2y-2=0$. **58.** $\operatorname{arctg}0{,}8\approx38°{,}7$. **59.** 1) $a=5$, $b=-5$; 2) (0; 3). **60.** 1) $x-y+3=0$; 2) $x+y-2=0$. **64.** 1) (−1; −3); 2) (4; −2). **65.** 1) (−2; −4), (5; 2) и (−5; 0); 2) (4; −1), (−3; −3); (1; 6). **66.** 1) $3x-2y+7=0$; 2) $4x+5y-6=0$. **73.** 1) $\operatorname{arctg}2\approx63°{,}4$; 2) $\operatorname{arctg}(7/9)\approx37°{,}9$; 3) $\operatorname{arctg}(14/23)\approx31°{,}3$; 4) $\arccos(13/85)\approx81°{,}2$. **74.** $\arccos(63/65)\approx14°{,}1$. **75.** 1) ≈67°,4, ≈56°,3, 56°,3; 2) ≈76°,3, ≈43°,8, ≈59°,9; 3) ≈72°,3, ≈58°,5, 49°,2. **76.** 1) ≈53°,1; 2) ≈46°,8. **77.** $\operatorname{arctg}(25/21)\approx50°$. **78.** 1) $A\approx25°{,}8$, $B\approx23°{,}6$, $C\approx130°{,}6$; 2) $A\approx67°{,}4$, $B=C\approx56°{,}3$. **79.** $\operatorname{arctg}0{,}5\approx26°{,}6$. **80.** 1) ≈29°,7; 2) ≈48°,4. **81.** $\operatorname{arctg}(27/47)\approx29°{,}9$. **82.** $\operatorname{arctg}(5/7)\approx35°{,}5$. **83.** 45°. **84.** 1) $2x-y+9=0$ и $11x-2y+32=0$; 2) $y=0$ и $x=0$; (−1; 0) и (0; 1). **85.** $y=2x$ и $y=7x$; $y=(1/7)x$ и $y=(1/2)x$. **86.** 1) $y=-3x$ и $y=(-2/3)x$; 2) $y=(-3/2)x$ и $y=(-1/3)x$. **87.** $y+2=0$. **89.** Пары прямых 1), 2) и 3) параллельны. **90.** $a=10$. **91.** 1) $5x-3y+21=0$; 2) $3x+4y+19=0$. **92.** 1) $7x+5y+26=0$; 2) $x-6y-25=0$. **93.** 1) $x-4y+6=0$; 2) $x-2y+2=0$. **97.** Пары прямых 1), 3) и 4) перпендикулярны. **98.** $k=-1/5$. **99.** 1) $2x+5y+7=0$; 2) $5x+6y+14=0$; 3) $3x-2y=0$. **100.** $5x-9y+26=0$. **101.** $x+y+3=0$ и $x-y-3=0$. **102.** $x+3y=0$. **103.** $x-y-5=0$. **104.** $2x-3y+10=0$. **105.** 1) $4x+2y-9=0$; 2) $2x-3y+1=0$. **106.** $7x+3y+20=0$. **107.** 1) $10x+3y+2=0$, $5x+9y+2=0$ и $5x-6y=0$; 2) $x+y+10=0$, $15x+4y-18=0$ и $10x-y-68=0$; 3) $11x-9y-26=0$, $9x-2y-64=0$ и $2x-7y+38=0$. **108.** 1) $2x-11y-29=0$; $5x-3y+10=0$ и $3x+8y+39=0$; 2) $x+2y-5=0$, $x-y=0$ и $2x+y-5=0$; 3) $4x-5y+4=0$, $3x+4y+14=0$ и $10x+3y+32=0$. **109.** 1) 5; 2) 10. **110.** 1) 10; 2) 13. **111.** $k=2$. **112.** (−2; −7). **113.** $x-6y=0$, $3x-2y=0$. **114.** $x-6y=0$, $2x-3y=0$. **115.** $8x-11y+2=0$, $5x-2y-15=0$ и $2x+7y-32=0$. **116.** $9x+11y+24=0$. **117.** (6; 2). **118.** $5x-12y=0$. **119.** $8x-15y+11=0$. **120.** $4x-y+36=0$, $x+4y-25=0$. **121.** $4x+5y-16=0$, $4x+5y+25=0$. **122.** 1) $2x-3y+4=0$; 2) $3x-11y-7=0$; 3) $3x+2y-7=0$; 4) 45° и 90°; 5) (7/3; 0). **123.** $x-y-1=0$. **124.** $42x+7y-68=0$. **125.** $9x+2y-113=0$, $3x-10y-59=0$, $2x+3y-14=0$. **126.** $x-3y-3=0$, $3x-2y-16=0$, $x+4y-10=0$, $5x-8y+6=0$. **127.** $x-3y+8=0$, $5x-3y-32=0$, $5x-9y+4=0$, $y=1$. **128.** $2x-y+3=0$, $2x-y-7=0$, $x+2y-1=0$, $x+2y-11=0$, $3x+y-8=0$ и $x-3y+4=0$. **129.** $3x-y+3=0$, $x+3y-19=0$. **130.** $3x-y+1=0$ и $x+3y-13=0$. **Зачетная работа.** I вариант. 1) $4x-3y+37=0$; 2) $4x+5y+13=0$; 3) $3x-4y-10=0$; 4) $\operatorname{arctg}(48/11)\approx77°{,}1$; 5) $x+1=0$. II вариант. 1) $x-2y+18=0$; 2) $y-4=0$; 3) $x-3y+2=0$; 4) $\operatorname{arctg}(21/13)\approx58°{,}3$; 5) (−2/3; 4).

Глава 19

4. $x-y-4=0$. **5.** $x^2+y^2-3x=0$. **6.** $x^2+y^2=16$. **7.** $2x^2+2y^2-25=0$. **8.** $x^2/36+y^2/27=1$. **9.** $x^2/4+y^2/3=1$. **10.** $x^2/16-y^2/48=1$. **11.** $x^2/9-y^2/72=1$. **12.** $x^2+4y+4=0$. **13.** $y^2-6x+9=0$. **14.** 1) $y^2-6y+12x-3=0$; 2) $x^2+6x-12y+21=0$. **15.** $x^2-4x+2y+5=0$. **16.** $x^2-y^2+6x-8y+25=0$. **24.** 1) $x^2+y^2=3$; 2) $(x+2)^2+(y+5)^2=9$. **25.** 1) $(x+1)^2+(y-4)^2=17$; 2) $(x+3)^2+y^2=41$. **26.** 1) $(x-3)^2+(y+2)^2=34$; 2) $x^2+(y-4)^2=5$. **27.** 1) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$; 2) $(x+4)^2+(y-5)^2=41$. **28.** 1) $(x+2)^2+(y-3)^2=13$; 2) $(x-3)^2+(y+5)^2=34$. **29.** (1; 5) и (7; −3). **30.** 1) $(x+4)^2+y^2=100$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. **31.** 1) $(x-3)^2+(y-2)^2=25$; 2) $x^2+(y+3)^2=25$; 3) $(x-2)^2+(y+3)^2=100$. **32.** $(x-5)^2+(y-4)^2=25$ и $(x+5)^2+(y-4)^2=25$. **33.** $(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$ и $(x-27)^2+(y-29)^2=29^2$. **34.** $(x-29)^2+(y-29)^2=29^2$ и $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$. **35.** $(x-4)^2+y^2=41$. **36.** $x^2+(y-2)^2=34$. **37.** 1) $(x+4)^2+(y+3)^2=52$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=20$. **38.** $(x+1)^2+(y+4)^2=25$. **39.** 1) $O_1(-3; 5)$, $r=\sqrt{21}$; 2) O_1 (0; −6), $r=7$; 3) O_1 (1/2; −5/2), $r=7/2$; 4) O_1 (2; 5), $r=0$ (окружность не существует); 5) O_1 (−3; −7), $r=\sqrt{-23}$ (окружность не существует). **40.** 1) 10; 2) $\sqrt{157}$. **41.** 1) $4x-3y-10=0$; 2) $4x-7y+29=0$. **42.** $\sqrt{3}x-y+3\sqrt{3}+2=0$. **43.** $5x+y-21=0$. **44.** $3x+2y=0$. **45.** 1) $5x+2y-13=0$; 2) $x-y-3=0$. **46.** $7x+y-17=0$. **47.** 1) $(x+2)^2+(y-1)^2=100$; 2) $(x-1)^2+(y+3)^2=97$. **54.** 1) $x^2/16+y^2/9=1$; 2) $x^2/4+y^2/25=1$. **55.** 1) $x^2/25+y^2/16=1$; 2) $x^2/89+y^2/64=1$; 3) $x^2/12+y^2/16=1$. **56.** 1) $x^2/36+y^2/11=1$; 2) $x^2/20+y^2/16=1$. **57.** $x^2/25+y^2/28=1$. **58.** 1) (−5; 0), (5; 0), (0; −3) и (0; 3); $2a=10$ и $2b=6$; 2) (−4; 0), (4; 0), (0; −9) и (0; 9); $2a=18$ и $2b=8$; фокусы расположены на оси Oy. **59.** 1) (−3; 0) и (3; 0); $2c=6$; 2) (0; −4) и (0; 4); $2c=8$. **60.** 1) $e=4/5$; 2) $e=3/4$. **61.** $x^2/27+y^2/24=1$. **62.** $x^2/100+y^2/64=1$. **63.** 1) $x^2/25+y^2/16=1$; 2) $x^2/100+y^2/64=1$. **64.** 1) $x^2/25+y^2/9=1$; 2) $x^2/169+y^2/144=1$. **65.** 1) $x^2/100+y^2/25=1$; 2) $x^2/10+y^2/5=1$. **66.** 1) (12; 3) и (9; 4) 2) (4; 1,8) и (3; 2,4). **67.** 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{245}\approx15{,}6$. **75.** $x^2/144-y^2/400=1$. **76.** $x^2/9-y^2/36=1$. **77.** $x^2/36-y^2/64=1$. **78.** (−6; 0) и (6; 0); $2c=12$. **79.** 1) $e=4/3$; 2) $e=7/5$. **80.** 1) $y=\pm(3/4)x$; 2) $y=\pm(2\sqrt{2}/3)x$. **81.** 1) $x^2/2-y^2/6=1$; 2) $x^2/18-y^2/9=1$. **82.** 1) $x^2/9-y^2/16=1$; 2) $x^2/20-y^2/16=1$. **83.** 1) $x^2/64-y^2/16=1$; 2) $x^2/144-y^2/36=1$. **84.** 1) $x^2/8-y^2/2=1$; 2) $x^2/32-y^2/8=1$. **85.** 1) $x^2/9-y^2/16=1$; 2) $x^2/3-y^2/6=1$; 3) $x^2/16-y^2/48=1$. **86.** 1) $x^2/27-y^2/9=1$; 2) $x^2/8-y^2/4=1$; 3) $x^2/12-y^2/9=1$.

5) расходится. **16.** 1) Сходится абсолютно; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно. **Зачетная работа.** I вариант. 1) а) Сходится; б) расходится; 2) а) сходится условно; б) сходится абсолютно. II вариант. 1) а) Расходится; б) сходится; 2) а) сходится абсолютно; б) сходится абсолютно. **19.** 1) $0<|r_4|<0{,}0014$; 2) $|r_5|<0{,}0139$, $r_5<0$. **20.** 1) Три члена; 2) 250 членов. **23.** 1) В точке $x=-1$ сходится абсолютно, в точке $x=2$ расходится; 2) в точке $x=-2$ расходится, в точке $x=2$ сходится условно. **24.** 1) $-\infty<x<\infty$; 2) $-\infty<x<\infty$; 3) сходится в точке $x=0$. **25.** 1) $-3\leqslant x<3$; 2) $-4<x\leqslant 4$; 3) $-1<x\leqslant 1$; 4) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 5) $-4\leqslant x\leqslant -2$. **28.** 1) $1+4x+\frac{4^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{4^nx^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<\infty)$; 2) $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$; 3) $\frac{x}{3}-\frac{x^2}{3^2\cdot 2}+\frac{x^3}{3^3\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{3^n\cdot n}+\ldots(-3<x\leqslant 3)$; 4) $1+$ $+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\ldots(-\infty<x<\infty)$. **29.** 1) $3x-\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{3^5x^5}{5!}-\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 2) $x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots(-\infty<x<\infty)$; 3) $1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 4) $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots(-\infty<x<\infty)$; 5) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\frac{x^{10}}{2^5\cdot 5!}-\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **30.** 1) $x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\ldots$; 2) $1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots$; 3) $1-x-\frac{1}{3}x^3+\ldots$; 4) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$; 5) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\ldots$. **31.** 1) $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\ldots$; 2) $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots$; 3) $1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\ldots$; 4) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\ldots$. **32.** 1) $1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$; 2) $-\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+3}{3}+\frac{(x+3)^2}{3^2}+\frac{(x+3)^3}{3^3}+\ldots\right](-3<x<3)$; 3) $-[1+(x+2)+(x+2)^2+$ $+(x+2)^3+\ldots+(x+2)^n+\ldots](-3<x<-1)$; 4) $1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3+$ $+\ldots+(n+1)(x-1)^n+\ldots(-1<x<1)$. **33.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\ldots\right]$; 2) $\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{3}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^2-\ldots\right]$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4\cdot 2!}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{8\cdot 3!}\times\right.$ $\left.\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3+\ldots\right]$; 4) $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{2\sqrt{3}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3-\ldots$. **34.** 1) $e^3\left[1-\frac{3}{1!}(x+1)+\frac{3^2}{2!}(x+1)^2-\ldots+\frac{(-3)^n}{n!}(x+1)^n+\ldots\right]$. 2) $e^2\left[2+\frac{3}{1!}(x-2)+\frac{4}{2!}\times\right.$ $\left.\times(x-2)^2+\frac{5}{3!}(x-2)^3+\ldots\right]$. **Зачетная работа.** I вариант. 1) Ряд сходится на всей числовой оси. 2) $1-\frac{x^2}{3^2 2!}+\frac{x^4}{3^4\cdot 4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{2n}(2n)!}+\ldots$; 3) $e^6[1-2\times$ $\times(x+3)+\frac{2^2}{2!}(x+3)^2-\ldots+\frac{(-2)^n}{n!}(x+3)^n+\ldots]$ $(-\infty<x<\infty)$. II вариант. 1) Ряд сходится в промежутке $-2\leqslant x<2$; 2) $5x-\frac{5^2x^2}{2}+\frac{5^3x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{5^nx^n}{n}+$ $+\ldots\left(-\frac{1}{5}<x\leqslant\frac{1}{5}\right)$; 3) $-\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{4!}\times\right.$ $\left.\times\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\ldots\right]$. **38.** 1) 0,4384; 2) 0,6157; 3) 0,9613; 4) 0,6820. **39.** 1) 0,0198; 2) 0,0953. **40.** 1) 1,001; 2) 1,004; 3) 1,037. **43.** 1) 0,2339; 2) 0,9045. **44.** 1) 0,1996; 2) 0,2491. **45.** 1) 0,201; 2) 0,508. **46.** 1) 0,4926; 2) 0,2497. **47.** 1) 0,090; 2) 0,747.

Глава 28

2. 1) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(-\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right)$; 2) $2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **3.** $3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **6.** 1) $\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\right.$ $\left.+\ldots\right)$; 2) $\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-$; 3) $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots$; 4) $4\left(\frac{\sin 2x}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\ldots\right)$; 5) $2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$; 6) $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\right.$ $\left.+\frac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right)$; 7) $\frac{4A}{\pi\alpha}\left(\sin\alpha\sin x+\frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5x+\ldots\right)$. **8.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)$. **9.** 1) $\frac{\pi}{1}-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots$; 2) $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots$; 3) $\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\ldots\right)$; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\ldots\right)$. **11.** 1) $\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x-3\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{2}{3^2\pi}\times$ $\times\cos 3x-\frac{3}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x-\frac{3}{5}\sin 5x-\frac{1}{6}\sin 6x+\ldots$; 2) $\frac{3\pi}{8}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\right.$ $\left.+\frac{2\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{2\cos 6x}{6^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\ldots\right)$; 3) $\frac{4}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\right.$ $\left.-\ldots\right)$; 4) $\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right)$. **13.** $\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\ldots\right)$.