# Лекция № 9. Производные высших порядков. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно

***На лекции рассматриваются вопросы:***

1. Понятие производной 2-го порядка. Механический смысл второй производной.
2. Понятие производной *n*-го порядка.
3. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
4. Производная неявной функции.

***1. Понятие производной 2-го порядка. Механический смысл второй производной.***

До сих пор рассматривалась производная $f'(x)$ от функции $y = f(x)$, называемая ***производной первого порядка***. Но производная $f'(x)$ сама является функцией, которая тоже может иметь производную.

- ***Производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной $y = f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Также используют обозначение $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

*Механический смысл второй производной*

Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$ (где $s$ — путь, $t$ — время), то $s'(t_0) = v(t_0)$ — скорость изменения пути в момент времени $t_0$, т.е. мгновенная скорость в момент времени $t_0$.

Следовательно, *вторая производная пути по времени* $s''(t_0) = \left(s'(t_0)\right)' = v'(t_0)$ *есть скорость изменения скорости, или* ***ускорение*** *точки в момент времени* $t_0$.

***2. Понятие производной n-го порядка.***

- ***Производной n-ого порядка (или n-ой производной)*** называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Также используют обозначение $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

***Пример 1.*** Найти производную 3-го порядка функции $y = \sin x$.

*Решение.*

$y' = \cos x$,

$y'' = -\sin x$,

$y''' = -\cos x$.

### *3. Дифференцирование функций, заданных параметрически.*

Часто зависимость между переменными $x$ и $y$ задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t$ — вспомогательная переменная, называемая *параметром*.

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, $x'_t \neq 0$ и функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$.

Рассмотрим функции $y = y(t)$, где $t = t(x)$. Тогда можно считать, что $y$ — сложная функция от $x$. По правилам дифференцирования сложной функции и обратной функции

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Итак,

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}.$$

Найдем производную 2-го порядка.

$$y''_x = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

***Пример 2.*** Найти $y''_x$, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$

*Решение.*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(t^3\right)'}{\left(\ln t\right)'} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3;$$

$$y''_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(3t^3\right)'}{\left(\ln t\right)'} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3.$$

***4. Производная неявной функции.***

- Если зависимость между аргументом $x$ и функцией $y$ задается уравнением $y = f(x)$, то есть уравнением, которое разрешено относительно $y$, то $y$ называют ***явной функцией*** от $x$.

- Если же зависимость между $x$ и $y$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно функции $y$, то $y$ называют ***неявной функцией*** от $x$.

Для нахождения производной $y'$ неявной функции $y$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, нужно продифференцировать по переменной $x$ обе части этого равенства, рассматривая $y$, как функцию от $x$, а затем из полученного уравнения выразить производную $y'$.

***Пример 3.*** Найти производную $y'$ функции $y$, определяемой уравнением

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0.$$

*Решение.*

Дифференцируем по переменной $x$ обе части равенства, рассматривая $y$, как функцию от $x$:

$$2x + 2yy' - 2 + 6y' = 0.$$

Выразим из полученного уравнения искомую производную $y'$:

$$2yy' + 6y' = 2 - 2x,$$

$$yy' + 3y' = 1 - x,$$

$$y'(y + 3) = 1 - x,$$

$$y' = \frac{1 - x}{y + 3}.$$