Лекция № 8. Производные основных элементарных функций

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Производная логарифмической функции.
2. Производная показательной функции.
3. Производная степенной функции.
4. Производные тригонометрических функций.
5. Производные обратных тригонометрических функций.

1. Производная логарифмической функции.

◀ Рассмотрим функцию $y = \ln x$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.
2. Находим приращение функции:

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.
4. По определению производной находим y':

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Итак, $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$ и $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'}$. ▶

◀ Рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак, $\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}}$ и $\boxed{(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'}$. ▶

2. Производная показательной функции.

◀ Рассмотрим функцию $y = a^x$. Обратная функция имеет вид $x = \log_a y$, причем $x'(y) = \dfrac{1}{y \ln a} \neq 0$.

По правилу производной обратной функции:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a .$$

Итак, $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a}$ и $\boxed{\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'}$. ►

◄ Рассмотрим $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$.

Итак, $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$ и $\boxed{\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'}$. ►

3. Производная степенной функции.

◄ Рассмотрим функцию $y = x^n$, где $n \in R$.

Логарифмируем обе части:

$$\ln y = \ln x^n,$$

$$\ln y = n \ln x .$$

Дифференцируем обе части:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x} .$$

Умножим обе части на $y = x^n$:

$$y' = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = nx^{n-1} .$$

Итак, $\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$ и $\boxed{\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'}$. ►

Частные случаи:

$x' = 1$;

$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ и $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'}$;

$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$ и $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'}$

4. Производные тригонометрических функций.

1) ◄ Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

3. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

4. По определению производной находим y':

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x\,.$$

Итак,

$$(\sin x)'=\cos x \text{ и } (\sin u)'=\cos u\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

2) ◄ Рассмотрим функцию $y=\cos x$.

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x\,.$$

Итак,

$$(\cos x)'=-\sin x \text{ и } (\cos u)'=-\sin u\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

3) ◄ Рассмотрим функцию $y=\mathrm{tg}x$.

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } (\mathrm{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

4) ◄ Рассмотрим функцию $y=ctgx$.

$$(\mathrm{ctg}x)'=\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(-1)=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x} \text{ и } (\mathrm{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'\,. \blacktriangleright$$

5. Производные обратных тригонометрических функций.

1). ◀ Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Она является обратной к функции $x = \sin y$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $x' = \cos y \neq 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

По правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \blacktriangleright$$

2) ◀ Рассмотрим функцию $y = \arccos x$.

Т.к. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, то $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \blacktriangleright$$

3). ◀ Рассмотрим функцию $y = \mathrm{arctg} x$. Она является обратной к функции $x = \mathrm{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $x' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\mathrm{arcctg} x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ и } (\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \blacktriangleright$$

4) ◀ Рассмотрим функцию $y = \mathrm{arcctg} x$.

Т.к. $\mathrm{arctg} x + \mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x$.

$$(\mathrm{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ и } (\mathrm{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \blacktriangleright$$

Примеры. Найти производные функций:

1) $y = x^4 - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 6$;

2) $y = x \cdot arctgx$;

3) $y = e^{\sin 3x}$;

4) $y = \dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^3}$;

5) $y = 3\cos^4 5x$.

Решение.

1) Преобразуем данную функцию: $y = x^4 - 2x^{-3} + x^{\frac{2}{3}} - 6$.

$$y' = \left(x^4\right)' - 2\left(x^{-3}\right)' + \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - (6)' = 4x^3 + 6x^{-4} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 0 = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) По правилу производной произведения:

$$y' = x' arctgx + x(arctgx)' = 1 \cdot arctgx + x \cdot \frac{1}{1+x^2} = arctgx + \frac{x}{1+x^2}.$$

3) По правилу производной сложной функции:

$$y' = e^{\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' = e^{\sin 3x} \cos 3x \cdot (3x)' = 3e^{\sin 3x} \cos 3x.$$

4) По правилу производного частного:

$$y' = \frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)' x^2 - \cos\frac{x}{4} \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-\sin\frac{x}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}x\right)' - \cos\frac{x}{4} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4} - 2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}$$

5) По правилу производной сложной функции:

$$y' = 3 \cdot 4\cos^3 5x \cdot (\cos 5x)' = 12\cos^3 5x \cdot (-\sin 5x) \cdot (5x)' = -12\cos^3 5x \sin 5x \cdot 5 =$$
$$= -60\cos^3 5x \sin 5x.$$