Лекция № 7. Правила дифференцирования

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Основные правила дифференцирования.
2. Производная сложной и обратной функций.
3. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью.

1. Основные правила дифференцирования

Теорема 1: Производная постоянной равна нулю, т.е. $C' = 0$, где $C = \text{const}$.

Доказательство.

◀ Рассматриваем функцию $y = C$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.
2. Находим приращение функции $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = C - C = 0$.
3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.
4. По определению производной находим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Итак, $C' = 0$. ▶

Теорема 2: Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций, т.е.

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}.$$

Доказательство:

◀ Рассматриваем функцию $y = u + v$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.
2. Функции u и v получат соответственно приращения Δu и Δv. Находим приращение функции:

$$\Delta y = \big(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big) =$$
$$= u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.
4. По определению производной находим y':

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Итак, $(u + v)' = u' + v'$. ▶

Аналогично, $\boxed{(u - v)' = u' - v'}$.

Теорема 3: Производная произведения двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}.$$

Доказательство.

◄ Рассматриваем функцию $y = uv$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Функции u и v получат соответственно приращения Δu и Δv. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x)v(x) + u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v.$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

4. По определению производной находим y':

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) =$$
$$= u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= u(x)v' + v(x)u' + u'v' \cdot 0 = u'v(x) + u(x)v'.$$

Итак,

$$(uv)' = u'v + uv'. \ ►$$

Следствие:

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu',$$

где $C = \text{const}$.

Теорема 4: Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

Доказательство.

◄ Рассматриваем функцию $y = \dfrac{u}{v}$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$.

2. Функции u и v получат соответственно приращения Δu и Δv. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{(u(x)+\Delta u)v(x)-u(x)(v(x)+\Delta v)}{(v(x)+\Delta v)v(x)}=$$
$$=\frac{u(x)v(x)+v(x)\Delta u-u(x)v(x)-u(x)\Delta v}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{v^2(x)+v(x)\Delta v}.$$

3. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{\Delta x\cdot\left(v^2(x)+v(x)\Delta v\right)}=\frac{v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta v}.$$

4. По определению производной находим y':

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=\frac{v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{v(x)u'-u(x)v'}{v^2(x)}.$$

Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.\ ►$$

2. Производная сложной и обратной функций

Пусть переменная y есть функция от переменной u, т.е. $y=f(u)$, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. $u=g(x)$. Тогда задана сложная функция $y=f(g(x))$.

Теорема 5: Если $y=f(u)$ и $u=g(x)$ — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x, т.е.

$$\boxed{y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)}.$$

Доказательство.

◄ Рассматриваем функцию $y=f(g(x))$.

1. Даем аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$.

2. Функции $y=f(u)$ и $u=g(x)$ соответственно получат приращения Δy и Δu. Пусть $\Delta u\neq 0$.

3. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

4. По определению производной находим y':

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'(u)\cdot u'(x).$$

Итак, $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$. ►

Теорема 6: Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ с производной $y'(x) \neq 0$, производная обратной функции $x = g(y)$ равна обратной величине производной данной функции, т.е. находится по формуле:

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}.$$

Доказательство.

◄ Рассматриваем функцию $x = g(y)$.

1. Даем аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$.

2. Функция $x = g(y)$ получит приращение Δx.

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

4. По определению производной находим x':

$$x' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}.$$

(При этом если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$.)

Итак, $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)}$. ►

3. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью

Теорема 7: Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.