Лекция № 6. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной

На лекции рассматриваются вопросы:

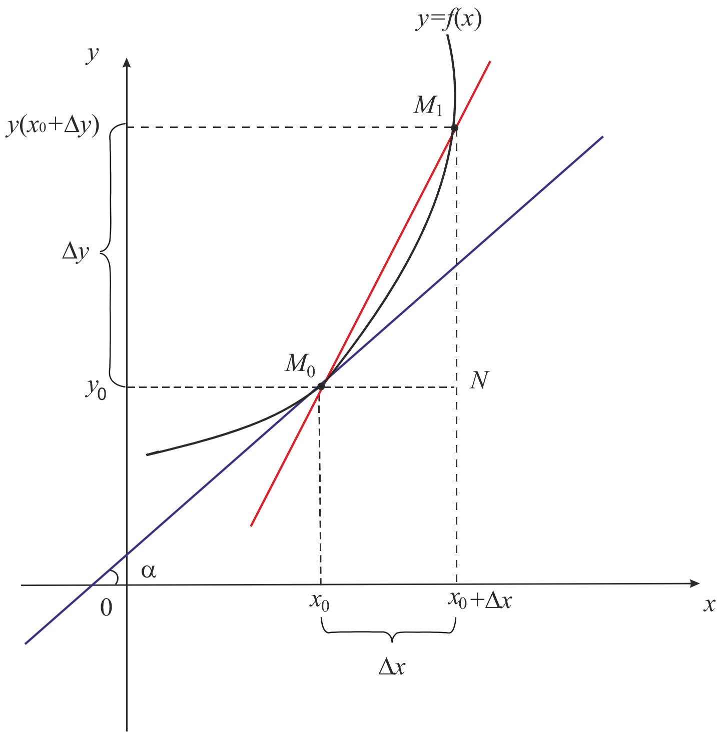
1. Задачи, приводящие к понятию производной:
   1) Задача о касательной.
   2) Задача о скорости прямолинейного движения.
2. Определение производной.
3. Геометрический и физический смыслы производной.
4. Уравнения касательной и нормали к кривой.
5. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью.

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

1. Задача о касательной.

Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y = f(x)$, и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Дадим определение касательной. Пусть аргумент x_0 получает приращение Δx. В этом случае от точки $M_0(x_0; f(x_0))$ по кривой $y = f(x)$ перейдем в точку $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1.



Под ***касательной к кривой*** $y = f(x)$ ***в точке*** M_0 понимают предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, имеет вид

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Из треугольника M_0M_1N найдем угловой коэффициент секущей $k_{M_0M_1}$:

$$k_{M_0M_1} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

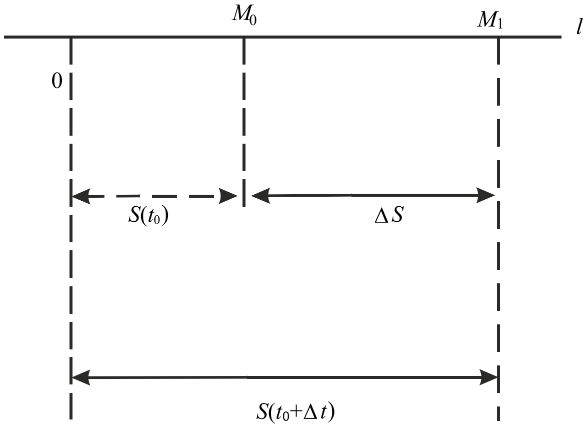
Тогда угловой коэффициент касательной

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Задача о скорости прямолинейного движения.

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s — путь, t — время. Необходимо найти скорость точки в момент времени t_0, т.е. $v(t_0)$.

В момент времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту времени $t_0 + \Delta t$ путь равен $s(t_0 + \Delta t)$.



За время Δt тело пройдет путь $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Тогда за промежуток Δt средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость $v_{\text{ср}}$ характеризует скорость в момент времени t_0. Поэтому скорость точки в момент времени t_0 равна пределу средней скорости за промежуток Δt, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Вывод: Рассматривая две различных по характеру задачи, мы пришли к пределу одного вида: к пределу отношения приращения некоторой функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю. Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

2. Определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Обозначения производной функции: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Нахождение производной функции называется ***дифференцированием*** этой функции.

Если функция в точке x имеет производную, то функция называется ***дифференцируемой в этой точке***.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется ***дифференцируемой на этом промежутке***.

Следовательно, из первой задачи угловой коэффициент касательной

$$\boxed{k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)}.$$

Из второй задачи скорость тела в момент времени t_0

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)}.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение.

1. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Получим новое значение аргумента $x + \Delta x$. Ему соответствует и новое значение функции $y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$.

2. Найдем приращение функции:
$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

4. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Итак, получили, что $(x^2) = 2x$.

3. Геометрический и физический смыслы производной.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, т.е.

$$f'(x_0) = k .$$

Так как угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла α наклона касательной к положительному направлению оси Ox, то

$$f'(x_0) = tg\alpha .$$

Механический смысл производной: если $s = s(t)$ — закон движения точки, где s — путь, t — время, то производная пути по времени $s'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0, т.е.

$$s'(t_0) = v(t_0).$$

Если рассматривается какой-либо другой физический процесс, то производная есть скорость протекания этого процесса.

4. Уравнения касательной и нормали к кривой.

Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y = f(x)$.

Составим уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ по формуле

$$y - f(x_0) = k_{\text{кас}}(x - x_0).$$

Так как $k_{\text{кас}} = f'(x_0)$, то ***уравнение касательной*** к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярна касательной к кривой, проведенной в этой же точке. Тогда по условию перпендикулярности двух прямых угловой коэффициент нормали

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Тогда ***уравнение нормали*** к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}.$$

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2 + 4x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение.

Найдем ординату точки касания $y(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 - 15 = 6$.

Найдем производную функции в произвольной точке $y'(x) = 2x + 4$.

Найдем производную функции в точке касания $y'(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$.

Составим уравнение касательной по формуле $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

Получим $y - 6 = 10(x - 3)$, $10x - y - 24 = 0$ — уравнение касательной.

Составим уравнение нормали по формуле $y - y(x_0) = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

Получим $y - 6 = -\dfrac{1}{10}(x - 3)$, $x + 10y - 63 = 0$ — уравнение нормали.

5. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью.

Теорема 1: Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

◄ Так как по условию теоремы функция дифференцируема в точке x_0, то существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о связи предела функции с бесконечно малой:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части на Δx:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ по свойствам бесконечно малых устанавливаем, что $\Delta y \to 0$. Следовательно, по определению непрерывности функции в точке заключаем, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ►

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Таким образом, непрерывность функции — необходимое, но не достаточное условие ее дифференцируемости.