

Лекция № 5. Непрерывность функции. Точки разрыва

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Непрерывность функции в точке.
2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
3. Свойства функций, непрерывных в точке.
4. Непрерывность функции на интервале.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Непрерывность функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности: $y_0 = f(x_0)$.

Если аргумент x_0 получает приращение Δx . Тогда новое значение аргумента $x = x_0 + \Delta x$, а новое значение функции $f(x_0 + \Delta x)$. При этом функция получает в точке x_0 приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если:

- 1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;
- 2) бесконечно малому приращению Δx аргумента x в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δy , т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Можно сформулировать еще одно определение непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если:

- 1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;
- 2) существует конечный предел функции в точке x_0 , т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0 , т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Условия 2) и 3) эквивалентны условию $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то эту точку называют *точкой разрыва* функции.

Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если односторонние пределы функции в этой точке существуют, но не равны между собой, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

В этом случае выражение $\left| \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right|$ называется *скачком* функции в точке x_0 .

Например, рассмотрим функцию $y = \frac{|x|}{x}$. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому $x = 0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 0$ существуют, но не равны между собой. Поэтому точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода. Найдем скачок функции в точке разрыва:

$$\Delta = |1 - (-1)| = 2.$$

Если в точке x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$, или $f(x_0)$ не существует, то ее называют *точкой устранимого разрыва первого рода*.

Например, рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{x}$. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому $x = 0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 0$ существуют и равны между собой. Но $y(0)$ не существует. Поэтому точка $x = 0$ — точка устранимого разрыва первого рода. Если положить, что $y(0) = 1$, то функция станет непрерывной в точке $x = 0$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, если в этой точке не существует хотя бы один из односторонних пределов или он равен бесконечности.

Например, рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому $x = 0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

3. Свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0 .

2. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0 , причем $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

4. Непрерывность функции на интервале.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема: Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения

Пример 1: Исследовать на непрерывность функции. Определить род точек разрыва, если они существуют. Изобразить график функции вблизи точек разрыва:

$$1) y = \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 + 5};$$

$$2) y = \frac{x}{x-3};$$

$$3) y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1, \\ 4-x & \text{при } x > 1 \end{cases};$$

$$4) y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{5}{x+1}}}.$$

Решение.

1) $y = \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 + 5}$ — это элементарная функция. Она определена при любом значении аргумента x , значит, она и непрерывна при любом значении аргумента x .

2) $y = \frac{x}{x-3}$ — это элементарная функция. Ее область определения $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Поэтому функция непрерывна на интервалах $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$. В точке $x = 3$ функция не определена, поэтому $x = 3$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \rightarrow 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-0} \frac{x}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+0} \frac{x}{x-3} = +\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

$$3) y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1, \\ 4-x & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Данная функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. Так как при $x = 1$ меняется аналитическое выражение функции, то

только эта точка может быть точкой разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^{-0}} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^{+0}} (4 - x) = 3.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 1$ существуют, но не равны между собой. Поэтому точка $x = 1$ — точка разрыва первого рода.

4) $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{5}{x+1}}}$ — это элементарная функция. Ее область определения

$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Поэтому функция непрерывна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$. В точке $x = -1$ функция не определена, поэтому $x = -1$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \rightarrow -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^{-0}} \frac{1}{1 + 2^{\frac{5}{x+1}}} = \left[\frac{1}{1 + 2^{\frac{5}{-0}}} \right] = \left[\frac{1}{1 + 2^{-\infty}} \right] = \left[\frac{1}{1 + 0} \right] = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^{+0}} \frac{1}{1 + 2^{\frac{5}{x+1}}} = \left[\frac{1}{1 + 2^{\frac{5}{+0}}} \right] = \left[\frac{1}{1 + 2^{+\infty}} \right] = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = -1$ существуют, но не равны между собой. Поэтому точка $x = -1$ — точка разрыва первого рода. Найдем скачок функции в точке разрыва:

$$\Delta = |1 - 0| = 1.$$

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке (*первая теорема Вейерштрасса*¹).

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M (*вторая теорема Вейерштрасса*).

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$ (*теорема Больцано*²-*Коши*).

¹ Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — немецкий математик.

² Больцано Бернад (1781—1848) — чешский математик, философ.

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — немецкий математик



Weierstrass

Больцано Бернад (1781—1848) — чешский математик, философ

