Лекция № 4. Замечательные пределы. Вычисление пределов

На лекции рассматриваются вопросы:
1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел.
3. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.

1. Первый замечательный предел.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Следствия: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tgx}=1$.

Пример 1. Найти: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{5}{3}\cdot 1=\dfrac{5}{3}$.

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 4}=2\cdot\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

2. Второй замечательный предел.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

Число e является иррациональным $e\approx 2{,}718$. Оно служит основанием натуральных логарифмов. Для обозначения натурального логарифма числа N пользуются символом $\ln N$.

Пример 2. Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{\frac{6}{x}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{30}=e^{30}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-2x\cdot\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-6}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}.$$

3. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.

Пример 3. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}=$

Подставим вместо x его предельное значение, получим:

$$=\left(\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+1}{3\cdot 1^2+4\cdot 1-2}\right)=\left(\frac{0}{5}\right)=0\,.$$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}=$

Подставим вместо x его предельное значение, получим:

$$=\left(\frac{(-2)^2+3\cdot(-2)+7}{(-2)^2-2-2}\right)=\left(\frac{5}{0}\right)=\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$

При $x=3$ числитель и знаменатель данной дроби обращаются в нуль. То есть непосредственная подстановка приводит к неопределенному выражению $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно разложить числитель и знаменатель дроби на множители, тем самым выделить множитель $(x-3)$, сократить дробь на него и вычислить предел оставшегося выражения.

Разложение квадратного трехчлена на множители выполняем по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 — корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Разложим на множители числитель:

$$5x^2-16x+3=0,$$
$$D=(-16)^2-4\cdot 5\cdot 3=256-60=196,$$
$$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{196}}{2\cdot 5},$$
$$x_1=\frac{16+14}{10}=3,\ x_2=\frac{16-14}{10}=\frac{1}{5};$$
$$5x^2-16x+3=5(x-3)\left(x-\frac{1}{5}\right)=(x-3)(5x-1).$$

Разложим на множители знаменатель:

$$x^2-4x+3=0,$$
$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4,$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1},$$

$$x_1=\frac{4+2}{2}=3,\ x_2=\frac{4-2}{2}=1;$$

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(5x-1)}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x-1}{x-1}=\frac{5\cdot 3-1}{3-1}=\frac{14}{2}=7.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-1}{3x^2-x+5}$

При стремлении x к ∞ получается неопределенное выражение $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, надо разделим и числитель, и знаменатель данной дроби на x^2, применяя теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-1}{3x^2-x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x^2+x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2, получим:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+3x^3}{4x^2+6x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3, получим:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}+3}{\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{3}{0}=\infty.$$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

Умножим числитель и знаменатель дроби на множитель, сопряженный числителю, то есть на $\left(\sqrt{3x-2}+2\right)$, получим:

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{3}{4}.$$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)=(\infty-\infty)=$

Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на ему сопряженное, т.е. на $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$, получим:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-5x+6-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-5x}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x, получим:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}=-\frac{5}{2}.$$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

Применим первый замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7\cdot\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

Применим формулу тригонометрии $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и первый замечательный предел, получим:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$