

Лекция № 3. Предел функции

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки.
2. Предел функции в бесконечности.
3. Предел функции в точке.
4. Односторонние пределы.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Бесконечно малые величины, их основные свойства.
7. Бесконечно большие величины, их основные свойства.
8. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.
9. Теорема о связи функции с ее пределом.

1. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки.

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называется само число x , если $x \geq 0$, и противоположное число $(-x)$, если $x < 0$:

Абсолютная величина разности двух чисел $|x - a|$ означает расстояние между точками x и a числовой прямой.

Поэтому, решением неравенства $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$) будут точки x интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Всякий интервал, содержащий точку a , называется *окрестностью точки a* .

Интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, т.е. множество точек x , таких, что $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется ε -окрестностью точки a .

2. Предел функции в бесконечности.

Число A называется *пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к бесконечности*, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $M > 0$ (зависящее от ε , $M = M(\varepsilon)$), что для всех x , таких, что $|x| > M$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел функции обозначается $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

С помощью логических символов определение запишется

$$(A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists M = M(\varepsilon) > 0) (\forall x : |x| > M) |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения состоит в том, что при достаточно больших по модулю значениях x значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A .

Выясним *геометрический смысл* предела функции $y = f(x)$ в бесконечности. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, соответствующему попаданию части графика в полосу шириной 2ε между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

Итак, число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое число $M > 0$, что для всех x таких, что $|x| > M$, соответствующие точки графика функции попадают в полосу шириной 2ε между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

Приведенное выше определение предела при $x \rightarrow \infty$ предполагает неограниченное возрастание независимой переменной x по абсолютной величине. Можно сформулировать понятие предела при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$:

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists M = M(\varepsilon) > 0) (\forall x : x > M) |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists M = M(\varepsilon) > 0) (\forall x : x < -M) |f(x) - A| < \varepsilon.$$

3. Предел функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ задана в окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 .

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x , стремящемся к x_0 (или *в точке* x_0), если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε , $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел функции обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

С помощью логических символов определение запишется

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что при всех значениях x , достаточно близких к x_0 , значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A .

Выясним *геометрический смысл* предела функции $y = f(x)$ в точке. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, соответствующему попаданию части графика в полосу шириной 2ε между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Аналогично неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, соответствующему попаданию точек x в δ -окрестность точки x_0 .

Итак, число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие точки графика функции попадают в полосу шириной 2ε между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

4. Односторонние пределы.

Если при стремлении x к x_0 переменная x принимает лишь значения, меньшие x_0 , или, наоборот, лишь значения, большие x_0 , и при этом функция $y = f(x)$ стремится к некоторому числу A , то говорят об односторонних пределах функции $y = f(x)$ соответственно слева $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ и справа $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$. Символически эти определения запишутся

$$(A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \neq x_0 : x_0 - \delta < x < x_0)$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon ;$$

$$(A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \neq x_0 : x_0 < x < x_0 + \delta)$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ существует тогда и только тогда, когда равны ее односторонние пределы, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$. Тогда и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

5. Основные теоремы о пределах.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ — функции, имеющие пределы при $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

Сформулируем основные теоремы о пределах.

Т. 1: Функция не может иметь более одного предела.

Т. 2: Предел постоянной равен самой постоянной, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \text{ где } C = \text{const.}$$

Т. 3: Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B .$$

Т. 4: Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB .$$

Т. 5: Постоянный множитель можно вынести за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = CA$$

Т. 6: Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

Т. 7: Если $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$.

Т. 8: Если предельное значение аргумента $x = x_0$ принадлежит области определения элементарной функции $y = f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$.

Пример 1: Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^3 + 2x + 1)$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^3 + 2x + 1) = 27 + 6 + 1 = 34$.

6. Бесконечно малые величины, их основные свойства.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \rightarrow x_0$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Можно дать развернутое определение бесконечно малой величины.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \rightarrow x_0$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε , $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

С помощью логических символов это определение запишется:

$$(\alpha(x) \text{ — б.м. при } x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Аналогично можно сформулировать определение бесконечно малой величины при $x \rightarrow \infty$.

Например, функции $y = \ln x$ при $x \rightarrow 1$ и $y = \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow \infty$ есть бесконечно малые величины, т.к. их пределы равны нулю.

Свойства бесконечно малых величин.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

7. Бесконечно большие величины, их основные свойства.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \rightarrow x_0$, если ее предел равен бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty.$$

Можно дать развернутое определение бесконечно большой величины.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \rightarrow x_0$, если для любого, сколь угодно большого положительного числа $M > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от M , $\delta = \delta(M)$), что для всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|\beta(x)| > M.$$

С помощью логических символов это определение запишется

$$(\beta(x) \text{ — б.б. при } x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (\forall M > 0) (\exists \delta = \delta(M) > 0) (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) |\beta(x)| > M.$$

Аналогично можно сформулировать определения бесконечно большой величины при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$

Например, функции $y = \ln x$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y = \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$ есть бесконечно большие величины.

Свойства бесконечно больших величин.

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.
2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

8. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

Теорема: Функция, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая величина, и наоборот.

То есть если $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$. И наоборот, если $\beta(x)$ — бесконечно большая величина при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ — бесконечно малая при $x \rightarrow 0$, а функция $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ — бесконечно большая при $x \rightarrow 0$.

9. Теорема о связи функции с ее пределом.

Теорема: Если функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow x_0$ предел, равный A , то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Верна и *обратная теорема*: Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то число A есть предел этой функции при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.