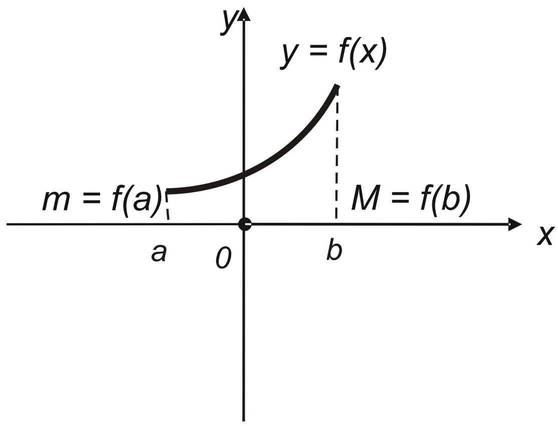
Лекция № 14. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

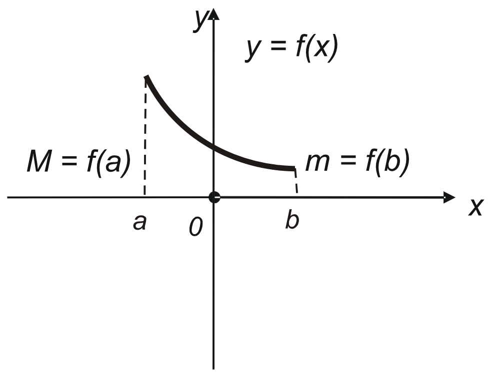
На лекции рассматриваются вопросы:

1. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

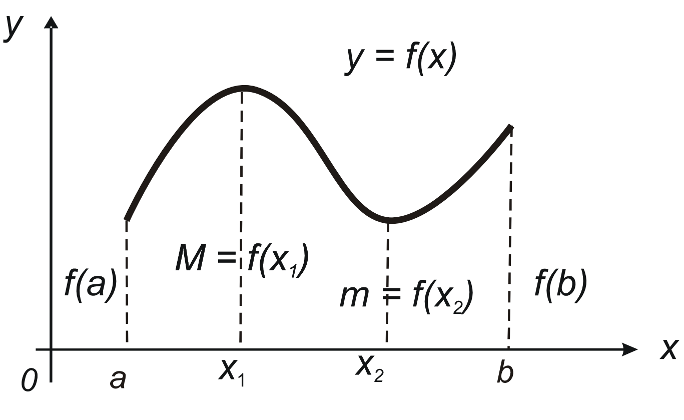
1. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений (либо во внутренней точке интервала (a, b), либо на концах отрезка $[a, b]$).





а) б)



в)

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$, надо:

1. найти критические точки функции на интервале (a, b);

2. вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка;

3. из вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Если непрерывная функция на промежутке имеет только одну точку экстремума, и это точка максимума (минимума), то в ней функция и принимает свое наибольшее (наименьшее) значение.

В случае, если исследуемая функция имеет на отрезке $[a,b]$ точки разрыва или же задана на бесконечном интервале, то необходимо дополнительно рассмотреть ее поведение в окрестности точек разрыва и при $x \to \pm\infty$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач.

Пример 1. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение.

Поступаем в соответствии с данными рекомендациями.

1. Находим $y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x$. Так как область определения производной $D(y') = (-\infty; +\infty)$, то критическими могут быть только те точки, где $y' = 0$, т.е. где

$12x^3 - 48x^2 + 36x = 0$,

$12x(x^2 - 4x + 3) = 0$,

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$.

2. Отрезку $[-1; 2]$ принадлежат только точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Точка $x_3 = 3 \notin [-1; 2]$.

3. Находим значения функции $y = f(x)$ в критических точках: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и на концах отрезка, т.е. в точках $x = -1$, $x = 2$:

$f(0) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=0} = 0$,

$f(1) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=1} = 5$,

$f(-1) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=-1} = 37$ — наибольшее значение,

$f(2) = (3x^4 - 16x^3 + 18x^2)|_{x=2} = -8$ — наименьшее значение.

4. Таким образом, $m = -8$, а $M = 37$.