Лекция № 13. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.
2. Асимптоты графика функции.
3. Общая схема исследования функции.

1. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.

График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым (вогнутым)*** на интервале (a,b), если он расположен не выше (не ниже) любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, в которой выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***.

Теорема (достаточный признак выпуклости, вогнутости): Если $f''(x) < 0$ на интервале (a,b), то график функции выпуклый на этом интервале, а если $f''(x) > 0$ на интервале (a,b), то график функции вогнутый на этом интервале.

Теорема (достаточный признак точки перегиба): Если в точке x_0 вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует, а при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

Доказательство.

Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это значит, что слева от точки x_0 график выпуклый, а справа от точки x_0 — вогнутый, т.е. при переходе через точку x_0 выпуклость меняется на вогнутость. Следовательно, точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба.

План исследования функции $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

1. Находим область определения $D(y)$.
2. Находим первую производную $f'(x)$.
3. Находим вторую производную $f''(x)$.
4. Находим точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует (критические точки второго рода)
5. Отмечаем на числовой прямой область определения и критические точки второго рода. В полученных интервалах расставляем знак второй производной.

6. Делаем вывод об интервалах выпуклости, вогнутости, абсциссах точек перегиба.

7. Находим ординаты точек перегиба.

Пример 1. Исследовать функцию $y = x^3 + \frac{1}{4}x^4$ на экстремум, найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и построить ее график.

Решение.

Область определения $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Исследуем функцию на экстремум.

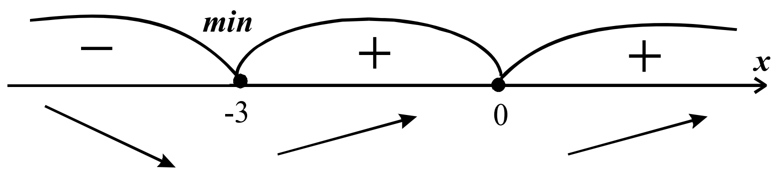
Найдем первую производную:

$$y' = 3x^2 + x^3.$$

Приравняем ее к нулю и найдем критические точки:

$$3x^2 + x^3 = 0,$$
$$x^2(3 + x) = 0,$$
$$x^2 = 0 \text{ или } 3 + x = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } x = -3.$$

Определим знак y' в интервалах:



$$y'(-4) < 0,$$
$$y'(-2) > 0,$$
$$y'(1) > 0.$$

$x = -3$ — точка минимума,

$$y_{\min} = y(-3) = -27 + \frac{1}{4}\cdot 81 = -6\frac{3}{4}.$$

Функция убывает на $(-\infty; -3)$ и возрастает на $(-3; +\infty)$.

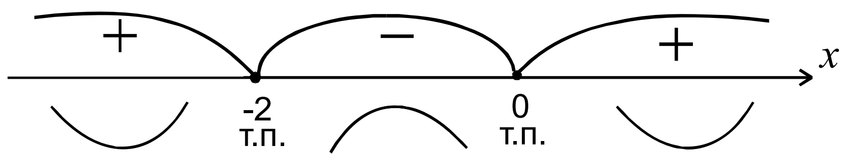
Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, найдем точки перегиба.

Вторая производная $y'' = \left(3x^2 + x^3\right)' = 6x + 3x^2$.

Приравняем ее к нулю и найдем критические точки второго рода:

$$6x + 3x^2 = 0,$$
$$3x(2 + x) = 0,$$
$$3x = 0 \text{ или } 2 + x = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } x = -2.$$

Определим знак y'' в интервалах:

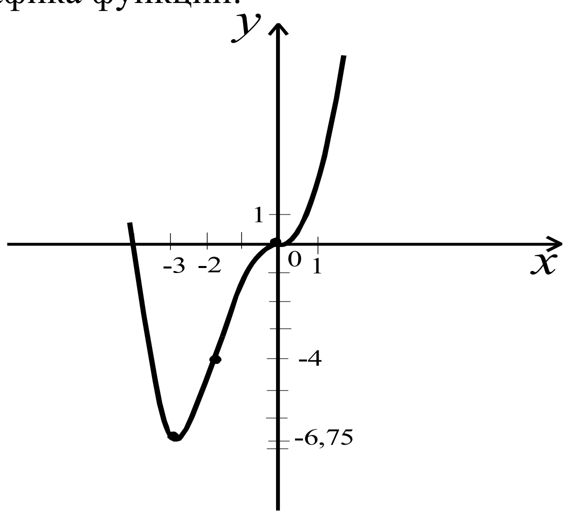


$y''(-3) > 0,$
$y''(-1) < 0,$
$y''(1) > 0.$

$x = -2,\ x = 0$ — абсциссы точек перегиба,
$y(-2) = -4$, $y(0) = 0$ — ординаты точек перегиба,
$(-2; -4)$, $(0; 0)$ — точки перегиба.

График функции вогнутый на $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ и выпуклый на $(-2; 0)$.

Построим эскиз графика функции:



2. Асимптоты графика функции.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат по кривой.

Виды асимптот:

1. вертикальные;
2. наклонные;
3. горизонтальные.

1. *Вертикальные асимптоты.*

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to a^{-0}} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a^{+0}} f(x) = \infty$.

Вертикальные асимптоты проходят либо через точки разрыва второго рода, либо через концы области определения функции.

Если только один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a^{-0}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^{+0}} f(x)$ равен бесконечности то прямая $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой.

2. *Наклонные асимптоты.*

Уравнение наклонной асимптоты находим в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - kx)$.

Если хотя бы один из этих пределов не существует или равен бесконечности, то наклонных асимптот нет.

3. *Горизонтальные асимптоты.*

Горизонтальную асимптоту $y = b$ находят как частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении k и b следует отдельно рассматривать случаи, когда $x \to -\infty$ и когда $x \to +\infty$.

3. Общая схема исследования функции.

Исследование функции $y = f(x)$ и построение ее графика можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции, определить их род.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума, экстремумы функции.
6. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба.
7. Найти асимптоты графика функции.
8. Используя результаты исследования, построить график функции.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение.

1. Найдем область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на непрерывность: $x=3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=-\infty\,,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+13}{x-3}=+\infty\,.$$

Следовательно, $x=3$ — точка разрыва второго рода.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-6(-x)+13}{-x-3}=\frac{x^2+6x+13}{-x-3}\,;$$

$$y(-x)\neq y(x),\qquad y(-x)\neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y'=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\,.$$

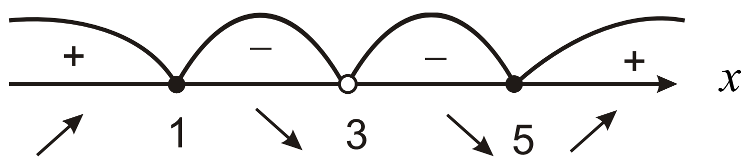
Найдем критические точки:

$$y'=0,\ \text{ если }\ x^2-6x+5=0,$$

$$x_1=1\ \text{ и }\ x_2=5.$$

Производная не существует при $x=3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 1):



$x = 1$ — точка максимума,

$x = 5$ — точка минимума.

$$y_{\max}=y(1)=-4,$$

$$y_{\min}=y(5)=4.$$

Функция возрастает на $(-\infty;\,1)$ и на $(5;\,+\infty)$.

Функция убывает на $(1;\,3)$ и на $(3;\,5)$.

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} \right)' = \frac{\left(x^2 - 6x + 5\right)' (x-3)^2 - \left(x^2 - 6x + 5\right)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - \left(x^2 - 6x + 5\right)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2\cancel{(x-3)}\left((x-3)^2 - x^2 + 6x - 5\right)}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2\left(x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5\right)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода:

$y'' = 0$, $\dfrac{8}{(x-3)^3} = 0$, решений нет.

Вторая производная не существует при $x = 3$, но перегиба в этой точке нет, так как это точка разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

Определим знак второй производной в интервалах (рис. 2):

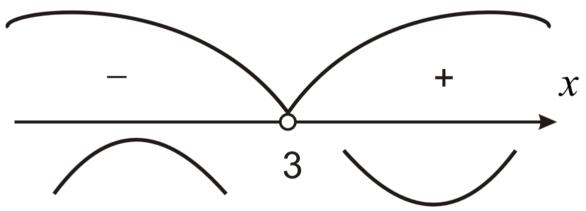


Рис. 2

График функции выпуклый на (–∞; 3) и вогнутый на (3; +∞).

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x = 3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x = 3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{13}{x^2}}{1 - \dfrac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x + 13}{x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3 + \dfrac{13}{x}}{1 - \dfrac{3}{x}} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ — наклонная асимптота.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0$.

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим эскиз графика функции: