# **Лекция № 12.** Исследование функций на монотонность и экстремумы

***На лекции рассматриваются вопросы:***

1. Исследование функций на монотонность.
2. Исследование функций на экстремумы.

***1. Исследование функций на монотонность.***

- Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на интервале $(a,b)$, если для любых $x_1$, $x_2$ $\in (a;b)$ при $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.
- Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на интервале $(a,b)$, если для любых $x_1$, $x_2$ $\in (a;b)$ при $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

***Теорема (достаточное условие возрастания функции):*** Если $f'(x) > 0$ на интервале $(a;b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$.

*Доказательство:*

Пусть $x_1$, $x_2$ — две точки, принадлежащие интервалу $(a;b)$ и $x_2 > x_1$. Для функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < c < x_2$.

Так как $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$,
или $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Это означает, что на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает.

***Теорема (достаточное условие убывания функции):*** Если $f'(x) < 0$ на интервале $(a;b)$, то функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$.

*Доказательство аналогичное.*

***Теорема (необходимый признак возрастания (убывания) функции):*** Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси; $y' = 3x^2$. Очевидно, что $y' > 0$ при $x \neq 0$, а $y'(0) = 0$, т.е. $y'(x) \geq 0$.

***Пример 2.*** Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

*Решение.*

1. Находим область определения функции: $D(y) = R$.

2. Находим производную функции $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

3. Находим критические точки: $y' = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 3$.

4. Отмечаем критические точки на числовой прямой. В полученных интервалах расставим знак производной.

5. Функция возрастает на интервалах $(-\infty;1)$ и $(3;+\infty)$, убывает на интервале $(1;3)$.

***2. Исследование функций на экстремумы.***

- Точка $x_0$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.
- Точка $x_0$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.
- Значения функции в точке максимума и точке минимума называются соответственно ***максимумом*** и ***минимумом функции***.
- Максимум и минимум функции объединяют общим названием ***экстремума функции***, а точки максимума и минимума называются ***точками экстремума.***

***Теорема (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции):***

Если в точке $x_0$ дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

*Доказательство:*

Пусть $x = x_0$ — точка максимума. Следовательно, $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ для $\Delta x \neq 0$.

Тогда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \text{ при } \Delta x < 0 \text{ и } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0;$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ при } \Delta x > 0 \text{ и } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, следовательно, $f'(x)$ есть определенное число, не зависящее от способа стремления $\Delta x$ к нулю. Тогда $f'(x_0) = 0$.

- Точки, в которых производная равна нулю, называются ***стационарными.***

Непрерывная функция может иметь экстремум и в тех точках, в которых она недифференцируема. Например, функция $y=|x|$ имеет минимум в точке $x=0$, но в этой точке производная функции не существует.

*Таким образом, для того чтобы функция $y=f(x)$ имела экстремум в точке $x_0$, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0)=0$) или не существовала.*

- Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими.***

Однако *не всякая критическая точка является точкой экстремума*.

Например, рассмотрим функцию $y=x^3$; $y'=3x^2$; $y'(0)=0$, т.е. $x=0$ — критическая точка, но она не является точкой экстремума.

***Теорема (первое достаточное условие экстремума):***

Пусть функция $y=f(x)$

1) непрерывна в точке $x_0$;

2) дифференцируема в окрестности точки $x_0$, кроме, быть может, самой точки $x_0$;

3) при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак,

то точка $x=x_0$ является точкой экстремума функции $y=f(x)$.

При этом если производная меняет знак с минуса на плюс, то точка $x=x_0$ является точкой минимума, а если с плюса на минус, то точкой максимума.

*Доказательство.*

Пусть производная меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x=x_0$.

Запишем формулу Лагранжа для точек $x_0$ и $x_1$, где $x_1$ принадлежит окрестности точки $x_0$:

$$f(x_1)-f(x_0)=f'(c)(x_1-x_0).$$

Если $x_1<x_0$, то $f'(c)<0$, $x_1-x_0<0$. Тогда $f(x_1)-f(x_0)>0$ или $f(x_1)>f(x_0)$.

Если $x_1>x_0$, то $f'(c)>0$, $x_1-x_0>0$. Тогда $f(x_1)-f(x_0)>0$ или $f(x_1)>f(x_0)$.

Таким образом, для любого $x$ из окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$. Следовательно, $x=x_0$ — точка минимума функции $y=f(x)$.

***План исследования функции $y = f(x)$ на экстремум.***

1. Находим область определения $D(y)$.

2. Находим производную $f'(x)$.

3. Находим критические точки, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.

4. Отмечаем на числовой прямой область определения и критические точки. В полученных интервалах расставляем знак производной.

5. Делаем вывод о наличии точек экстремума.

6. Находим экстремумы функции.

***Пример 3.*** Найти экстремумы функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

*Решение.*

1—4. Смотри решение примера 8.2.

5. Согласно достаточному условию экстремума $x = 1$ — точка максимума, а $x = 3$ — точка минимума данной функции.

6. Находим экстремумы: $y(1) = 3$ — максимум функции; $y(3) = -1$ — минимум функции.

***Теорема (второе достаточное условие экстремума):***

Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке $x_0$, а вторая производная в этой точке $f''(x_0) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$; если $f''(x_0) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$.

***План исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второй производной.***

1. Находим область определения $D(y)$.

2. Находим производную $f'(x)$.

3. Находим критические точки, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.

4. Находим вторую производную $f''(x)$ и ее значение в стационарных точках.

5. Делаем вывод о наличии точек экстремума.

6. Находим экстремумы функции.

***Пример 4.*** Найти точки экстремумы функции $y = 2x^2 - x^4 + 3$.

*Решение.*

1. Находим область определения $D(y) = R$;

2. Находим производную $y' = 4x - 4x^3$.

3. Находим стационарные точки: $y' = 0$, $4x - 4x^3 = 0$; $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

4. Находим вторую производную $y'' = 4 - 12x^2$ и ее значение в стационарных точках: $y''(-1) = -8 < 0$, $y''(0) = 4 > 0$, $y''(1) = -8 < 0$.

5. Следовательно, по второму достаточному условию экстремума $x_1 = -1$ и $x_3 = 1$ являются точками максимума, а $x_2 = 0$ — точка минимума данной функции.

*Замечания:*

1. Второе достаточное условие экстремума применяют только для стационарных точек. Точки, в которых $f'(x)$ не существует проверяют по первому достаточному условию экстремума.

2. Если в стационарной точке $f''(x) = 0$, то следует продолжить исследование по первому достаточному условию.

***Пример 5.*** Исследовать на экстремум и построить график функции:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5.$$

*Решение.*

Область определения *D(y)=R*.

Найдем первую производную $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

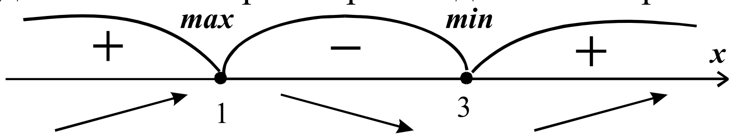
Приравняем ее к нулю и найдем критические точки:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 3.$$

Определим знаки первой производной в интервалах:




$$y'(0) > 0,$$

$$y'(2) < 0,$$

$$y'(4) > 0.$$

$x = 1$ — точка максимума,

$x = 3$ — точка минимума.

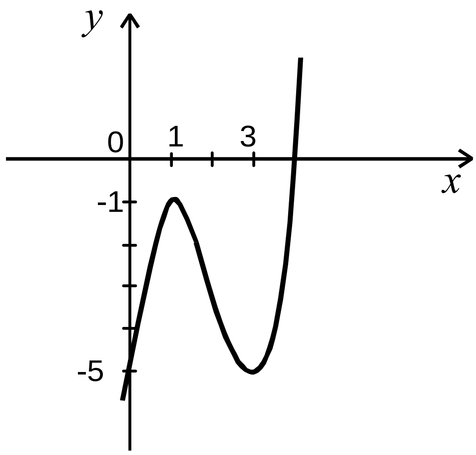
Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(1) = 1 - 6 + 9 - 5 = -1,$$

$$y_{\min} = y(3) = 27 - 6 \cdot 9 + 9 \cdot 3 - 5 = -5.$$

Функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(3; +\infty)$ и убывает на $(1; 3)$.

По полученным данным строим эскиз графика (рис. 4):



y
x
0
1
3
-1
-5