Лекция № 11. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Основные теоремы дифференциального исчисления.
2. Правило Лопиталя.

1. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ролля[1]: Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) дифференцируема на интервале (a,b);

3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале (a,b) существует по крайней мере одна такая точка $c \in (a,b)$, в которой производная функции равна нулю, т.е. $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: Если кривая $y = f(x)$ имеет касательную в каждой точке интервала (a,b) и $f(a) = f(b)$, то на кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

Например, функция $f(x) = 8x - x^2$ дифференцируема на отрезке $[2;6]$ и на концах отрезка принимает равные значения:

$$f(2) = f(6) = 12.$$

Следовательно, по теореме Ролля на интервале $(2;6)$ найдется по крайней мере одно значение аргумента *x*, при котором производная $f'(x)$ обращается в нуль.

$f'(x) = 8 - 2x$;

$f'(x) = 0$ при $x = 4$, где $2 < 4 < 6$.

Теорема Лагранжа[2]: Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) дифференцируема на интервале (a,b);

Тогда на интервале (a,b) существует по крайней мере одна такая точка $c \in (a,b)$, в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

---

[1] Ролль Мишель (1652—1719) — французский математик.
[2] Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик.

или

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Механический смысл теоремы Лагранжа:

$f(b)-f(a)$ — изменение функции на отрезке $[a,b]$;

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — средняя скорость изменения функции на отрезке $[a,b]$;

$f'(c)$ — мгновенная скорость изменения функции в точке c.

По теореме существует хотя бы одна точка внутри отрезка, такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k_{AB}$ — угловой коэффициент хорды AB;

$f'(c)=k_{кас}$ — угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x=c$.

По теореме $k_{AB}=k_{кас}$, следовательно, найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции и хорда, проведенная через концы дуги AB, параллельны.

Пример 1. На параболе $y=x^2$ даны точки $A(-2;4)$ и $B(4;16)$. Требуется на дуге AB найти такую точку C, в которой касательная параллельна хорде AB.

Решение.

Функция $y=x^2$ на отрезке $[-2;4]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

По условию имеем: $a=-2$, $b=4$; $f(a)=4$, $f(b)=16$.

Подставим эти данные в формулу Лагранжа:

$$16-4=f'(c)(4-(-2)),$$

откуда $f'(c)=2$, где $-2<c<4$.

$f'(x)=2x$, $f'(c)=2c$; $2c=2$, $c=1$.

Таким образом, в точке $C(1;1)$ касательная параллельна хорде AB.

2. Правило Лопиталя.

Пусть при нахождении предела отношения двух функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Тогда имеет место формула $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, которую называют ***правилом Лопиталя.***

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+15x}{\sin 5x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, значит, можно воспользоваться правилом Лопиталя. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+15x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4x^2+15x\right)'}{\left(\sin 5x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x+15}{5\cos 5x}=\frac{15}{5}=3.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{e^{3x}}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. По правилу Лопиталя получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6x+5\right)'}{\left(e^{3x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{3e^{3x}}=0,$$

поскольку знаменатель стремится к $+\infty$.

Неопределенности $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$ надо предварительно преобразовать к виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, а затем применить правило Лопиталя.