Лекция № 10. Дифференциал функции

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие дифференциала функции.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Свойства дифференциала.
4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Понятие о дифференциалах высших порядков.

1. Понятие дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $f'(x)$. Следовательно, по теореме о связи функции и ее предела $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от $f'(x)$ на бесконечно малую величину $\alpha(\Delta x)$, т.е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Умножим на Δx:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Таким образом, приращение функции состоит из двух слагаемых:

1) $f'(x)\Delta x$ — бесконечно малая величина одного порядка малости по сравнению с Δx (при $\Delta x \to 0$), т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x).$$

2) $\alpha(\Delta x)\Delta x$ — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем Δx, т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Приращение функции Δy является эквивалентным первому слагаемому $f'(x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Оно называется главной частью приращения функции.

- ***Дифференциалом функции*** называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$\boxed{dy = f'(x)\Delta x}.$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = x$.

Решение.

$dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$.

Итак, $dx = \Delta x$, т.е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.*

Поэтому формулу для нахождения дифференциала можно записать в виде

$$\boxed{dy = f'(x)dx},$$

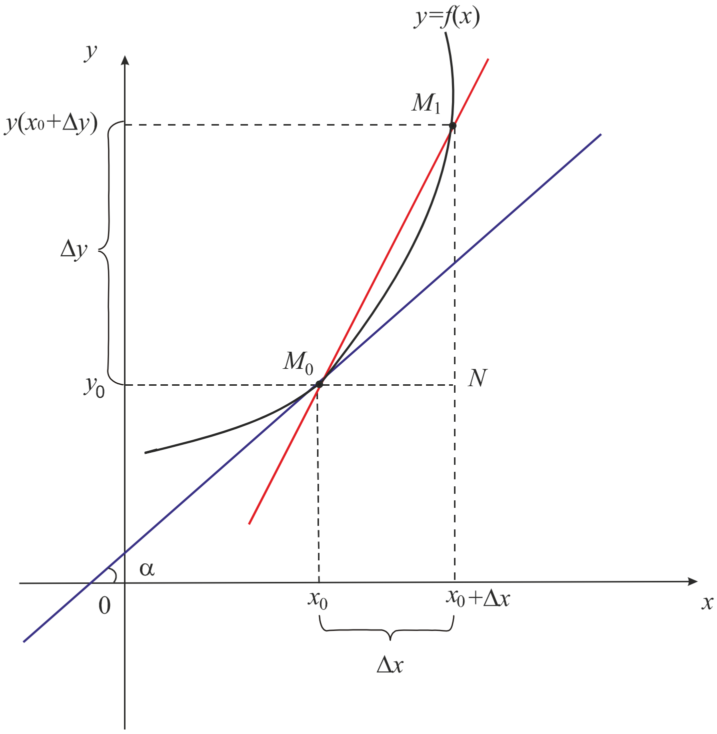
откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ есть отношение дифференциалов (обозначение Лейбница).

2. Геометрический смысл дифференциала.

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$, которая образует угол α с положительным направлением оси Ox, т.е $f'(x) = tg\alpha$. Из прямоугольного треугольника MKN

$$KN = MN \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot tg\alpha = f'(x)\Delta x,$$

Так как $dy = f'(x)\Delta x$, то $dy = KN$.



Итак, *дифференциал функции есть* ***приращение ординаты касательной,*** *проведенной к графику функции* $y = f(x)$ *в данной точке x, когда x получает приращение* Δx.

3. Свойства дифференциала.

1) $dC = 0$;
2) $d(Cu) = C \cdot du$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;
5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

6) *Инвариантность формы дифференциала.*

Рассматривая функцию $y = f(x)$ независимой переменной *x*, получили

$$dy = f'(x)dx.$$

Определим дифференциал сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Тогда дифференциал

$$dy = y' \cdot dx = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du.$$

Таким образом,

$$dy = f'(u)du.$$

Итак, формула дифференциала не изменится, если вместо функции от независимой переменной *x* рассматривать функцию от зависимой переменной *u*.

Это свойство дифференциала получило название *инвариантности* (т.е. неизменности) *формы* (или *формулы*) *дифференциала.*

Пример 2. Найти дифференциал dy функции $y = e^{x^2+1}$.

Решение.

1) По определению дифференциала:

$$dy = y' \cdot dx = \left(e^{x^2+1}\right)' \cdot dx = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx .$$

2) Найдем дифференциал по свойству инвариантности формы дифференциала. Данную функцию можно представить так: $y = e^u$, где $u = x^2 + 1$. Тогда

$$dy = e^u \cdot du = e^{x^2+1} \cdot d\left(x^2 + 1\right) = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx .$$

4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Приращение функции Δy в точке x_0:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \text{ где } f'(x_0)dx = dy, \text{ т.е.}$$

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x .$$

Дифференциал dy является главной частью приращения функции Δy. Это означает, что при достаточно малых значениях Δx приращение Δy приближенно равно дифференциалу, т.е.

$$\Delta y \approx dy ,$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx ,$$

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}.$$

Полученная формула используется в приближенных вычислениях.

Пример 3. Найти приближенное значение величины $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 16$, $\Delta x = 16 - 15{,}8 = -0{,}2$.

Тогда $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$, $f'(x) = \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{32}$.

Получаем $\sqrt[4]{15{,}8} = \sqrt[4]{16 - 0{,}2} \approx 2 + \dfrac{1}{32} \cdot (-0{,}2) = 2 - 0{,}00625 = 1{,}99375$.

5. Понятие о дифференциалах высших порядков.

Дифференциал функции $dy = f'(x)dx$ есть функции от двух аргументов: x и dx.

Будем полагать, что dx имеет фиксированное значение, не зависящее от *x*. В этом случае dy есть некоторая функция от *x*, которая также может иметь дифференциал.

- ***Дифференциалом второго порядка*** $d^2 y$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции при фиксированном dx, т.е.

$$d^2 y = d(dy).$$

- ***Дифференциалом n-го порядка*** $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т.е.

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Найдем $d^2 y$:

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = dx \cdot d\left(f'(x)\right) = dx \cdot \left(f'(x)\right)' dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$.

Итак,

$$\boxed{d^2 y = f''(x)dx^2}.$$

Аналогично,

$$\boxed{d^n y = f^{(n)}(x)dx^n},$$

т.е. *дифференциал n-го порядка равен произведению производной n-го порядка на n-ю степень дифференциала независимой переменной.*

Тогда

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Пример 4. Найти дифференциал второго порядка функции $y = e^{2x} + x^3$.

Решение.

Определим производную 2-го порядка данной функции:

$$y' = 2e^{2x} + 3x^2; \quad y'' = 4e^{2x} + 6x.$$

Тогда

$$d^2 y = y'' \cdot dx^2 = \left(4e^{2x} + 6x\right)dx^2.$$