Лекция № 1. Функция одной переменной, ее основные свойства. Сложная функция. Обратная функция

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие функции одной переменной. Способы задания функции.
2. Область определения и множество значений функции.
3. Основные свойства функций:
1) Монотонность.
2) Четность, нечетность.
3) Периодичность.
4) Ограниченность.
4. Понятие сложной функции.
5. Понятие обратной функции.

1. Понятие функции одной переменной. Способы задания функции.

Величина, которая в условиях данного процесса сохраняет одно и тоже числовое значение, называется *постоянной* величиной.

Величина, которая в условиях данного процесса принимает различные числовые значения, называется *переменной* величиной.

Например, при равномерном движении скорость v — величина постоянная, время движения t и пройденный путь s — переменные.

Часто приходится рассматривать несколько переменных величин, зависящих одна от другой. Математический анализ изучает переменные величины, рассматривая их во взаимной связи, зависимости. Так, в приведенном примере переменные s и t не могут принимать произвольные значения, независимо друг от друга, придав определенное значение переменной t, мы единственным образом определим значение $s = v \cdot t$.

В указанном примере каждому рассматриваемому значению одной величины соответствует одно определенное значение другой величины.

Пусть x и y — две переменные величины.

Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если по некоторому правилу или закону каждому значению, которое может принять переменная x, ставится в соответствие одно определенное значение переменной y.

Условно это записывается так: $y = f(x)$.

Переменная x при этом называется независимой переменной или аргументом, а y — зависимой переменной.

Наиболее часто встречаются три *способа задания функции*:

1) *Аналитический способ* — это задание функции при помощи формул. Например: $y = 6x - 8$, $y = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$, $y = \cos x$.

Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y, то функция называется *неявной*.

Например, $e^y - 7xy + x^3 = 0$ — неявное задание функции.

Функция может задаваться не одной, а несколькими формулами. Например, $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \le 0, \\ 2x + 3, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

2) *Табличный способ* — это способ задания функции при помощи таблицы, содержащей ряд числовых значений аргумента и соответствующих им значений функции.

3) *Графический способ* — это способ задания функции графиком.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости xOy, для каждой из которых абсцисса x равна значению аргумента, а ордината равна соответствующему значению функции $y = f(x)$.

Одну и ту же функцию можно задать различными способами.

Если дана функция $y = f(x)$, то для обозначения значения функции при некотором значении аргумента $x = a$ применяют обозначения: $y(a)$ или $f(a)$.

Пример 1. Вычислить значение функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x - 5}$ при $x = 3$.

Решение.

Чтобы найти значение функции при данном значении аргумента, надо в аналитическое выражение функции подставить вместо аргумента принимаемое им значение. Имеем:

$$f(3) = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 2}{2 \cdot 3 - 5} = 5.$$

2. Область определения и множество значений функции.

Совокупность всех действительных значений аргумента x, для которых функция y определена, то есть существует и выражается действительным числом, называется *областью определения* функции $y = f(x)$ и обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Совокупность всех тех значений, которые принимает при этом сама функция y, называется *областью (множеством) значений функции* и обозначается $E(f)$ или $E(y)$.

Например, функция $y = x^2$ существует при любом значении аргумента x, поэтому ее областью определения является множество всех действительных чисел, то есть $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Но при этом зависимая переменная y принимает только положительные значения или 0, поэтому множеством ее значений являются $y \ge 0$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

Пример 2. Найти область определения функций:

а) $y=\sqrt{6+x}$;

б) $y=\dfrac{7x}{x^2-4}$;

в) $y=\lg(x+3)$.

Решение.

а) Функция y будет иметь действительные значения тогда, когда подкоренное выражение неотрицательное, то есть $6+x\geq 0$, откуда $x\geq -6$. Следовательно, $D(y)=[-6;+\infty)$.

б) Из области определения функции следует исключить те значения аргумента, при которых знаменатель дроби обращается в нуль, то есть $x=-2$ и $x=2$. Следовательно, $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

в) Логарифм можно вычислить только от положительного числа, поэтому $x+3>0$, откуда $x>-3$. Следовательно, $D(y)=(-3;+\infty)$.

3. Основные свойства функций.

1) Монотонность.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке *X*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции:

$$x_1<x_2,\ x_1,\ x_2\in X\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2).$$

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке *X*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции:

$$x_1<x_2,\ x_1,\ x_2\in X\ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2).$$

Функция только возрастающая или только убывающая на промежутке *X* называется *монотонной* на этом промежутке.

Например, функция $y=x^2$ возрастает на $[0;+\infty)$ и убывает на $(-\infty;0]$.

2) Четность и нечетность.

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для любого *x*, принадлежащего области определения, выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Например, $y=x^2$ — четная функция.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для любого *x*, принадлежащего области определения, выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y=x^3$ — нечетная функция.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Их часто называют функциями *общего вида*. Такова, например, функция $y=2x+3$.

3) Периодичность.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ значения $x \pm T \in D(f)$ и $f(x \pm T) = f(x)$.

Число T называют *периодом* функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то ее периодами будут также числа kT, где $k \in Z$.

Наименьший положительный период функции называется ее *основным периодом.*

Например, $y = \sin x$ — периодическая функция с основным периодом 2π.

4) Ограниченность.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*, если существует число $C > 0$, такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq C$ или $-C \leq f(x) \leq C$.

График ограниченной функции лежит между прямыми $y = -C$ и $y = C$.

Например, $y = \sin x$ — ограниченная функция, так как $|\sin x| \leq 1$ для $x \in R$.

4. Понятие обратной функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, для которой $D(f)$ — область определения, $E(f)$ — область значений. Функция $y = f(x)$ каждому значению $x \in D(f)$ ставит в соответствие единственное значение $y \in E(f)$.

Теперь, наоборот, поставим в соответствие каждому $y \in E(f)$ единственное значение $x \in D(f)$, при котором $f(x) = y$. Тогда получим функцию, называемую *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначаемую $x = f^{-1}(y)$.

Для любой монотонной функции $y = f(x)$ существует обратная.

Чтобы найти обратную функцию, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

Например, для функции $y = 2x$ функция $x = \frac{1}{2}y$ является обратной.

Переход от функции $y = f(x)$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$ сводится лишь к изменению ролей множеств $D(f)$ и $E(f)$, тогда как зависимость между x и y одна и та же в обоих случаях. Поэтому графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.

Обычно для обратной функции аргумент обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, то есть вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$. В этом случае графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Например, функция $y = \frac{1}{2}x$ — обратная по отношению к $y = 2x$.

5. Понятие сложной функции.

Пусть переменная y есть функция от переменной u, а переменная u, в свою очередь, является функцией от независимой переменной x, то есть $y = f(u)$ и $u = g(x)$, причем значения $g(x)$ принадлежат области определения функции $f(u)$, тогда функция $y = f(g(x))$ называется *сложной функцией* (или функцией от функции).

Переменная $u = g(x)$ называется *промежуточным аргументом*.

Например, функция $y = (2 - 3x^2)^5$ является сложной, так как ее можно представить следующим образом $y = u^5$, где $u = 2 - 3x^2$.

Если, например, $y = \sqrt{u + 1}$, а $u = x^2$, то сложная функция имеет вид $y = \sqrt{x^2 + 1}$.