

Самостоятельное изучение учебного материала

Применение определенного интеграла

Изучите вопросы:

1. Геометрические приложения определенного интеграла:
 - 1) Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.
 - 2) Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.
 - 3) Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.
 - 4) Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.
 - 5) Вычисление объема тела вращения.

1. Геометрические приложения определенного интеграла

1) Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.

1) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью Ox , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2 - 5$ и осью Ox .

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox :

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 - 5, \\ y = 0; \\ -x^2 + 6x - 5 = 0, \\ x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x_1 = 1, x_2 = 5. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 (6x - x^2 - 5) dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - 5x \right) \Big|_1^5 = \\ &= 75 - \frac{125}{3} - 25 - 3 + \frac{1}{3} + 5 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

2) Если криволинейная трапеция расположена ниже оси абсцисс, то есть $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a, b]$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = -\int_a^b f(x) dx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x$, прямыми $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$ и осью Ox .

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

$$S = -\int_{\frac{1}{2}}^3 (x^2 - 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^3 = -9 + 18 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2} = 8\frac{13}{24} \text{ (кв. ед.)}$$

3) Площадь фигуры, ограниченной сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу — непрерывной кривой $y = g(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x$ и прямой $y = 4 - 3x$.

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = 4 - 3x; \end{cases} \\ x^2 - 3x = 4 - 3x, \\ x_1 = -2, x_2 = 2.$$

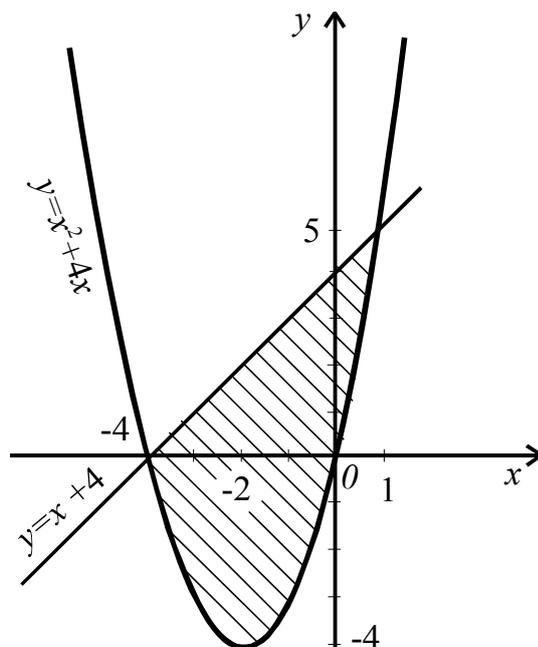
Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (4 - 3x - x^2 + 3x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = \\ &= 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$, (сделать чертеж).

Решение

Построим эскиз фигуры:



Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, пересекающимися в точках с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Для нахождения абсцисс точек пересечения данных линий решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4; \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = x + 4,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда

$$S = \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^1 =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

4) Если уравнение контура задана **параметрическими уравнениями**

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из соотношений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, заданным параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то вычислим вначале четвертую часть искомой площади.

Найдем пределы для параметра t . Так как x изменяется от 0 до a , то имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cos t, \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ — нижний предел;} \\ a &= a \cos t, \quad t_2 = 0 \text{ — верхний предел.} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, площадь эллипса $S = \pi ab$.

2) Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.

Пусть задана полярная система координат.

• *Криволинейным сектором* наз. плоская фигура, ограниченная непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $r = \alpha$ и $r = \beta$.

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярной осью.

Решение

Рисунок фигуры сделайте самостоятельно.

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2 \varphi^3}{6} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

3) Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

а) Длина дуги AB кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \leq x \leq 5$.

Решение

Найдем производную:

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} l &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4} x\right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = \frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} x\right)^3} \Big|_0^5 = \frac{8}{27} \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{8}{27} = \frac{335}{27} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

б) Длина дуги AB кривой, заданной **параметрическими уравнениями** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где $t_1 \leq t \leq t_2$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Пример. Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$

Решение

Рисунок кривой сделайте самостоятельно.

Кривая симметрична относительно осей координат. Вычислим длину той части, которая расположена в первой четверти, в этом случае t будет изменяться от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Предварительно найдем производные:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -3a \cos^2 t \sin t, \\y'(t) &= 3a \sin^2 t \cos t.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t} \cdot dt = \\&= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \cdot dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t \cdot dt = \\&= -3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot d(\cos t) = -3a \cdot \left(\frac{\cos^2 t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a \cdot \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\cos^2 0}{2} \right) = \frac{3a}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно, длина астроида $l = 6a$.

4) Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.

Длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi.$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение

Рисунок кривой сделайте самостоятельно.

Кривая симметрична относительно полярной оси. При изменении полярного угла от 0 до π имеем половину кривой.

Найдем производную:

$$r' = -a \sin \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \\&= a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} \cdot d\varphi =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \cdot d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = \\
&= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 4a.
\end{aligned}$$

Следовательно, длина кардиоиды $l = 8a$.

5) Вычисление объема тела вращения.

а) Вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью Ox . Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейная трапеция, ограниченной параболой $y^2 = 4x$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью Ox .

Решение

Рисунок фигуры вращения и тела вращения сделайте самостоятельно.

$$V_x = \pi \int_1^3 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_1^3 = 18\pi - 2\pi = 16\pi \text{ (куб. ед.)}$$

2) Вокруг оси Oy вращается криволинейная трапеция, ограниченная справа графиком непрерывной функции $x = g(y)$, снизу и сверху — соответственно прямыми $y = c$, $y = d$, слева — осью Oy . Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 2$, прямыми $y = 2$, $y = 4$ и осью Oy .

Решение

Рисунок фигуры вращения и тела вращения сделайте самостоятельно.

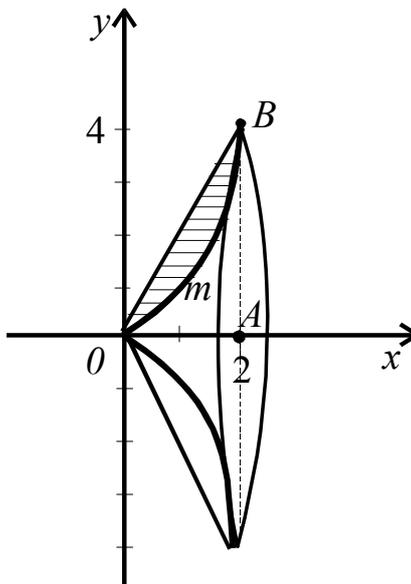
$$V_y = \pi \int_2^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \int_2^4 y^{-2} dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_2^4 = -\pi + 2\pi = \pi \text{ (куб. ед.)}$$

Пример.

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x$, вокруг оси Ox .

Решение

Построим эскиз тела:



Пусть V_1 — объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры $OABmO$, а V_2 — объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox треугольника OAB . Тогда искомый объем V_x равен разности объемов V_2 и V_1 :

$$V_x = V_2 - V_1.$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox , находится по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, находим абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x; \\ x^2 = 2x, \\ x^2 - 2x = 0, \\ x(x - 2) = 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_x &= V_2 - V_1 = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \\ &= \pi \left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right] = \frac{64}{15} \pi \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ: $V = \frac{64}{15} \pi$ (куб. ед.).