Самостоятельное изучение учебного материала

Определенный интеграл

Изучите вопросы:

1. Понятие определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Основные свойства определенного интеграла.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Выполним следующие действия:

1) С помощью точек $x_0=a$, x_1, x_2, …, $x_n=b$ ($x_0<x_1<...<x_n$) разобьем отрезок $[a;b]$ на *n частичных отрезков* $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$.

2) В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, i = 1, 2, …, n выберем произвольную точку $c_i\in[x_{i-1};x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3) Умножим найденное значение $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

4) Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+...+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda=\max\Delta x_i$ (i = 1, 2, …, n).

5) Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n\to\infty$ так, что $\lambda\to0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to0)}}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то он и называется ***определенным интегралом*** от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to0)}}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, отрезок $[a;b]$ — *областью (отрезком) интегрирования.*

Функция $y=f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Теорема: Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

2. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)\geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу — осью Ox. сбоку — прямыми $x=a$, и $x=b$, называется *криволинейной трапецией*.

Тогда определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади этой криволинейной трапеции.

3. Формула Ньютона-Лейбница

Для вычисления определённого интеграла применяется формула Ньютона – Лейбница

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно:

1) найти первообразную $F(x)$ (при $C=0$),

2) в полученное выражение подставить вместо x пределы интегрирования, сначала верхний, а затем нижний и из первого результата вычесть второй.

Пример. Вычислить определённые интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

$a)\ \int_1^2 x^3dx$; $б)\ \int_1^4 \sqrt{x}dx$;

$в)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$; $г)\ \int_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$.

Решение

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим данные определенные интегралы:

$$a)\ \int_1^2 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4};$$

$$б)\ \int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_1^4 = \frac{2}{3}4\sqrt{4} - \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3};$$

$$в)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = \left.\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$$

$$г)\ \int_0^5 \frac{dx}{x^2+25} = \left.\frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}\right|_0^5 = \frac{1}{5}(arctg1 - arctg\,0) = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{20}.$$

4. Основные свойства определенного интеграла

1. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрировании, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разделён точкой c на два отрезка $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

6. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждой из этих функции:

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Пример: Вычислить определённые интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{2}(4x^3-1)dx$; *б)* $\int\limits_{1}^{4}(x^2-2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$; *в)* $\int\limits_{0}^{\pi}(e^x-\frac{1}{2}\cos x)dx$.

Решение

Применяя свойства определённого интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, вычислим интегралы:

а) $$\int_{-1}^{2}(4x^3-1)dx = 4\int_{-1}^{2}x^3dx - \int_{-1}^{2}dx = 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} - x\Big|_{-1}^{2} = x^4\Big|_{-1}^{2} - x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} - x\Big|_{-1}^{2} = x^4\Big|_{-1}^{2} - x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2^4 - (-1)^4\right) - \left(2 - (-1)\right) = (16-1) - 3 = 12;$$

б) $$\int_1^4\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 x^2dx - 2\int_1^4 xdx + \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 - 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 + \frac{1}{2}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 - x^2\Big|_1^4 + \sqrt{x}\Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(4^2 - 1^2\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 21 - 15 + 1 = 7;$$

в) $$\int_0^\pi (e^x - \frac{1}{2}\cos x)dx = \int_0^\pi e^x dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos xdx = e^x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^\pi =$$

$$= \left(e^\pi - e^0\right) - \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin 0\right) = e^\pi - 1.$$

5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Замену переменных в определенном интеграле выполняют по тем же правилам, что и в неопределенном, только, с учетом замены, устанавливают пределы для новой переменной интегрирования. При этом не надо возвращаться к первоначальной переменной интегрирования. (как это было в неопределенном интеграле).

Пример: Вычислить $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение

$$\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ \sqrt{x+1}=t, \quad x=t^2-1 \\ dx = 2tdt \\ \text{Новые пределы:} \\ t_1 = \sqrt{x+1}\,\big|_{x=0} = 1 \\ t_2 = \sqrt{x+1}\,\big|_{x=3} = 2 \end{array} \right.$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int\limits_1^2 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3}-2\right) - 2\left(\frac{1}{3}-1\right) = 8/3.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняют с помощью формулы

$$\boxed{\int\limits_a^b udv = (u\cdot v)\ \Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu}$$

Пример: Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi x\cos xdx.$

Решение

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right.$$

$$\overset{(20)}{=} x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = (\pi \sin \pi - 0) + \cos x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \cos \pi - \cos 0 = -2.$$