Самостоятельное изучение учебного материала

Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных выражений

Изучите вопросы:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$.
3. Интегрирование иррациональных выражений.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ находят с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример: Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$t = tg\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)2t}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$.

При нахождении таких интегралов используют формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример: Найти $\int cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$.

Решение

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \sin^4 x\, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \sin^4 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx; \end{array}\right]$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) t^4 dt \ = \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Пример: Найти $\int \cos^2 3x dx$.

Решение

$$\int \cos^2 3x dx = \quad \left| \begin{array}{l} \text{по формуле} \\ \text{понижения степени} \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{6}\sin 6x) + C.$$

3. Интегрирование иррациональных выражений

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$ рационализируются заменой $x = t^n$.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x}\right) dx$ рационализируются заменой $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное чисел n, m.

Пример: Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 3}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 3} =$$

$$x = t^2, \quad t = \sqrt{x}, \quad dx = 2tdt$$

$$= \int \frac{2tdt}{t + 3} = \int \left(2 - \frac{6}{t + 3}\right) dt = 2t - 6\ln\left|t + 3\right| + C = 2\sqrt{x} - 6\ln\left|\sqrt{x} + 3\right| + C.$$