Самостоятельное изучение учебного материала

Интегрирование рациональных дробей

Изучите вопросы:

1. Интегрирование простейших рациональных дробей.
2. Разложение на простейшие рациональные дроби.
3. Интегрирование неправильных рациональных дробей.

1. Интегрирование простейших рациональных дробей

Многочленом степени n называется выражение вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

где a_0, a_1, …, a_n — некоторые числа, $a_n \neq 0$.

Например, выражение $4 - 3x + 5x^4$ является многочленом четвертой степени.

Рациональной дробью (рациональной функцией) называется отношение двух многочленов.

Например, $\dfrac{x^3 - 4x + 7}{x^4 + 2x^2 - 3}$ — рациональная дробь.

Правильной называется дробь, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Используя алгоритм деления многочленов, всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Интегрирование простейших дробей.

Рассмотрим интегрирование трех типов простейших дробей:

1) $\dfrac{A}{x-b}$;

2) $\dfrac{A}{(x-b)^n}$, $n > 1$;

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Интегралы от простейших рациональных дробей 1-го и 2-го типа находят с помощью замены $ax + b = t$ или подведения $ax + b$ под знак дифференциала $dx = \dfrac{1}{a} d(ax+b)$.

Пример: Найти $\int \frac{dx}{5x-3}$.

Решение

$$\int \frac{1}{5x-3}dx = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x-3)}{5x-3} = \frac{1}{5}\ln\left|5x-3\right| + C$$

Пример: Найти $\int \frac{dx}{(3-4x)^3}$.

Решение

$$\int \frac{1}{(3-4x)^3}dx = \qquad \left| \begin{array}{l} \textit{Замена} \\ 3-4x=t \\ -4dx=dt \\ dx=-\frac{1}{4}dt \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}dt = -\frac{1}{4}\int t^{-3}dt = -\frac{1}{4}\,\frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \frac{1}{8t^2} + C = \frac{1}{8(3-4x)^2} + C.$$

В простейших рациональных дробях 3-го типа в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x)+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}k+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c =$$

$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ и делают замену $x+\frac{b}{2a}=t$.

Пример: Найти $\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx.$

Решение

$$\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx = \qquad \left| \begin{array}{l} x^2-6x+13= \\ =x^2-6x+9+4= \\ =(x-3)^2+4, \\ x-3=t, \\ x=t+3, dx=dt \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt = \int \frac{2t+4}{t^2+4}dt = \int \frac{2tdt}{t^2+4} +$$

$$+4\int \frac{dt}{4+t^2} = \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \ln\left|t^2+4\right| + 4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \ln\left|x^2-6x+13\right| + 2arctg\frac{x-3}{2} + C.$$

2. Разложение на простейшие рациональные дроби

Если правильная дробь не относится к простейшим, то находят корни ее знаменателя, раскладывают знаменатель на квадратичные и (или) линейные множители с действительными коэффициентами, а затем раскладывают дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Для отыскания неопределенных коэффициентов A, B, C, … правую часть полученного равенства приводят к общему знаменателю и приравнивают числители левой и правой частей.

После этого:

– либо *подставляют* в полученное равенство *конкретные значения* x (лучше всего — корни знаменателя исходной дроби);

– либо *приравнивают* в полученном равенстве *коэффициенты при одинаковых степенях* x (в этом случае имеющиеся скобки надо раскрыть и привести подобные).

В результате получается система для определения A, B, C, …

Примеры разложения:

$$\frac{3x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{3x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2},$$

$$\frac{x}{(x+2)(x^2+8)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+8}.$$

Пример: Найти интеграл $\int \frac{x^2+8}{x^3-8}dx$.

Решение

Разложим подынтегральную дробь $\frac{x^2+8}{x^3-8}$ на сумму простейших.

Так как $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$, то

$$\frac{x^2+8}{x^3-8} = \frac{x^2+8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Приводя в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители дробей, получим

$$x^2 + 8 = A\,(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2).$$

Найдем коэффициенты A, B, C *первым способом*. Для этого подставим в предыдущее равенство последовательно $x = 2$ (корень знаменателя исходной дроби), $x = 0$ и $x = 1$ (наиболее удобные целые числа), тогда получим:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при} & x=2: 12=12A, \\ \text{при} & x=0: 8=4A-2C, \\ \text{при} & x=1: 9=7A-B-C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1, \\ C=-2, \\ B=0. \end{array}$$

Покажем как найти A, B, C *вторым способом*. Для этого в равенстве раскроем скобки и сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые степени x:

$$x^2 + 8 = x^2\,(A + B) + x\,(2A - 2B + C) + (4A - 2C).$$

Последовательно приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получим

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при} & x^2: 1=A+B \\ \text{при} & x^1: 0=2A-2B+C, \\ \text{при} & x^0: 8=4A-2C \end{array}\right\} \Rightarrow A=1, B=0, C=-2.$$

Таким образом, заданный интеграл равен

$$\int \frac{x^2+8}{x^3-8}dx = \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{x^2+2x+4}\right)dx = \int\frac{dx}{x-2} - 2\int\frac{dx}{x^2+2x+4} =$$

$$= \int\frac{d(x-2)}{x-2} - 2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3} = \ln|x-2| - \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. Интегрирование неправильных рациональных дробей

Для нахождения интегралов от *неправильной рациональной дроби* в ней выделяют целую часть.

Пример: Найти $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4x+1}\,dx.$

Решение

Под интегралом стоит неправильная рациональная дробь. Выделим в ней целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+4 & x^2+4x+1 \\ \cline{2-2}
-\ x^3+4x^2+x & x-4 \\ \cline{1-1}
-4x^2-x+4 & \\
-\ -4x^2-16x-4 & \\ \cline{1-1}
15x+8 &
\end{array}
$$

Получим:

$$\frac{x^3+4}{x^2+4x+1}=x-4+\frac{15x+8}{x^2+4x+1}.$$

Тогда

$$\int\frac{x^3+4}{x^2+4x+1}dx=\int\left(x-4+\frac{15x+8}{x^2+4x+1}\right)dx=$$

$$=\int xdx-4\int dx+\int\frac{15x+8}{x^2+4x+1}dx=\frac{x^2}{2}-4x+\int\frac{15x+8}{(x+2)^2-3}dx=$$

$$\begin{bmatrix} t=x+2, \\ x=t-2, \\ dx=dt; \end{bmatrix}$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\int\frac{15(t-2)+8}{t^2-3}dt=\frac{x^2}{2}-4x+\int\frac{15t-22}{t^2-3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+15\int\frac{tdt}{t^2-3}-22\int\frac{dt}{t^2-3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}\int\frac{d\left(t^2-3\right)}{t^2-3}-22\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}\ln\left|t^2-3\right|-\frac{11}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}\ln\left|(x+2)^2-3\right|-\frac{11}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|-\frac{11}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C.$$