Самостоятельное изучение учебного материала

Непрерывность функции. Точки разрыва

Изучите вопросы:
1. Непрерывность функции в точке.
2. Точки разрыва.
3. Свойства функций, непрерывных в точке.
4. Непрерывность функции на промежутке.

1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности: $y_0=f(x_0)$.

Если аргумент x_0 получает приращение Δx. Тогда новое значение аргумента $x=x_0+\Delta x$, а новое значение функции $f(x_0+\Delta x)$. При этом функция получает в точке x_0 приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

- Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) бесконечно малому приращению Δx аргумента x в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Можно сформулировать еще одно определение непрерывности функции в точке.

- Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) она определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) существует конечный предел функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Условия 2) и 3) эквивалентны условию $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

2. Точки разрыва

- Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то эту точку называют ***точкой разрыва*** функции.
- Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***, если односторонние пределы функции в этой точке существуют, но не равны между собой, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.
- В этом случае выражение $\left|\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right|$ называется ***скачком*** функции в точке x_0.

Например, рассмотрим функцию $y=\frac{|x|}{x}$. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. В точке $x=0$ функция не определена, поэтому $x=0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0^{-0}}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^{-0}}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^{-0}}(-1)=-1,\ \lim_{x\to 0^{+0}}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^{-0}}1=1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют, но не равны между собой. Поэтому точка $x=0$ — точка разрыва первого рода. Найдем скачок функции в точке разрыва:

$$\Delta=|1-(-1)|=2.$$

- Если в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\neq f(x_0)$, или $f(x_0)$ не существует, то ее называют ***точкой устранимого разрыва первого рода.***

Например, рассмотрим функцию $y=\frac{\sin x}{x}$. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. В точке $x=0$ функция не определена, поэтому $x=0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0^{-0}}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют и равны между собой. Но $y(0)$ не существует. Поэтому точка $x=0$ — точка устранимого разрыва первого рода. Если положить, что $y(0)=1$, то функция станет непрерывной в точке $x=0$.

- Точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***, если в этой точке не существует хотя бы один из односторонних пределов или он равен бесконечности.

Например, рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. В точке $x=0$ функция не определена, поэтому $x=0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0^{-0}}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty;\ \lim_{x\to 0^{+0}}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то $x=0$ — точка разрыва второго рода.

3. Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. то их сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0)\neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

2. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

4. Непрерывность функции на промежутке

- Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на интервале***, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема: Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения

Свойства функций, непрерывных на отрезке:

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке (**первая теорема Вейерштрасса**[1]).

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения *m* и наибольшего значения *M* (**вторая теорема Вейерштрасса**).

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c) = 0$ (**теорема Больцано**[2]**-Коши**).

Пример 1: Исследовать на непрерывность функции. Определить род точек разрыва, если они существуют.

1) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 3}{x^2 + 5}$; 2) $y = \dfrac{x}{x - 3}$;

3) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } \ x \le 1, \\ 4 - x \text{ при } x > 1 \end{cases}$; 4) $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{5}{x+1}}}$.

Решение.

1) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 3}{x^2 + 5}$ — это элементарная функция. Она определена при любом значении аргумента *x*, значит, она и непрерывна при любом значении аргумента *x*.

2) $y = \dfrac{x}{x - 3}$ — это элементарная функция. Ее область определения $D(y) = (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$. Поэтому функция непрерывна на интервалах $(-\infty;3)$ и $(3;+\infty)$. В точке $x = 3$ функция не определена, поэтому $x = 3$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 3$:

---

[1] Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — немецкий математик.

[2] Больцано Бернард (1781—1848) — чешский математик, философ, геолог.

$\lim\limits_{x\to 3^{-0}} \dfrac{x}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^{+0}} \dfrac{x}{x-3} = +\infty$.

Так как односторонние пределы бесконечны, то $x=3$ — точка разрыва второго рода.

3) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } \ x \le 1, \\ 4 - x \text{ при } x > 1 \end{cases}$

Данная функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. Так как при $x=1$ меняется аналитическое выражение функции, то только эта точка может быть точкой разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^{-0}} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^{+0}} (4-x) = 3$.

Односторонние пределы функции в точке $x=1$ существуют, но не равны между собой. Поэтому точка $x=1$ — точка разрыва первого рода.

4) $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{5}{x+1}}}$ — это элементарная функция. Ее область определения $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$. Поэтому функция непрерывна на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. В точке $x=-1$ функция не определена, поэтому $x=-6$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции при $x \to -1$:

$$\lim_{x\to -1^{-0}} \frac{1}{1+2^{\frac{5}{x+1}}} = \left[\frac{1}{1+2^{\frac{5}{-0}}} \right] = \left[\frac{1}{1+2^{-\infty}} \right] = \left[\frac{1}{1+0} \right] = 1,$$

$$\lim_{x\to -1^{+0}} \frac{1}{1+2^{\frac{5}{x+1}}} = \left[\frac{1}{1+2^{\frac{5}{+0}}} \right] = \left[\frac{1}{1+2^{+\infty}} \right] = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=-1$ существуют, но не равны между собой. Поэтому точка $x=-1$ — точка разрыва первого рода. Найдем скачок функции в точке разрыва:

$$\Delta = |1-0| = 1.$$