# Самостоятельное изучение учебного материала

## Предел числовой последовательности и предел функции

***Изучите вопросы:***

1. Предел числовой последовательности.
2. Предел функции в бесконечности.
3. Предел функции в точке.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Бесконечно малые величины.
6. Бесконечно большие величины.
7. Замечательные пределы.

### 1. Предел числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому натуральному числу $n$ поставлено в соответствие определенное число $a_n$, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$

То есть числовая последовательность есть функция натурального аргумента: $a_n = f(n)$.

Числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n$ называют ***членами последовательности***, а число $a_n$ — ***общим,*** или ***n-м членом*** данной последовательности.

Рассмотрим две числовые последовательности:

$\{a_n\}$: $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dots,\ \dfrac{n}{n+1},\ \dots,$

$\{b_n\}$: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots,\ 2n-1,\ \dots$.

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой. Замечаем, что члены последовательности $\{a_n\}$ с ростом $n$ как угодно близко приближаются к единице. При этом абсолютная величина разности $|a_n - 1|$ становится все меньше и меньше, т.е. с ростом $n$ величина $|a_n - 1|$ будет меньше сколь угодно малого положительного числа.

- Число $A$ называется ***пределом числовой последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер $N$ (зависящий от $\varepsilon$, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номером $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon\,.$$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Используя логические символы, определение предела можно записать в виде

$$\left(A=\lim_{n\to\infty}a_n\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)\ \left(\exists N=N(\varepsilon)\right)\ (\forall n>N)\ \left|a_n-A\right|<\varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, а в противном случае — ***расходящейся***.

Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших $n$ члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа $A$ (по абсолютной величине меньше, чем на число $\varepsilon$, каким бы малым оно ни было).

Выясним ***геометрический смысл*** предела числовой последовательности. Расположим члены последовательности $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$ на числовой прямой. Неравенство $\left|a_n-A\right|<\varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$, соответствующему попаданию членов последовательности $a_n$ в $\varepsilon$-окрестность точки $A$.

Итак, число $A$ есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$, найдется номер $N$, начиная с которого (при $n>N$) все члены последовательности будут заключены в $\varepsilon$-окрестность точки $A$, какой бы узкой она ни была. Вне этой $\varepsilon$-окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

## 2. Предел функции в бесконечности

С понятием предела числовой последовательности $a_n=f(n)$ тесно связано понятие предела функции $y=f(x)$ в бесконечности. Если в первом случае переменная $n$, возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная $x$, изменяясь, принимает любые значения.

- Число $A$ называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***при x, стремящемся к бесконечности***, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$, найдется такое положительное число $M>0$ (зависящее от $\varepsilon$, $M=M(\varepsilon)$), что для всех $x$, таких, что $|x|>M$, верно неравенство

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Этот предел функции обозначается $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

С помощью логических символов определение запишется

$$\left(A=\lim_{x\to\infty}f(x)\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)\ \left(\exists M=M(\varepsilon)>0\right)\ \left(\forall x:|x|>M\right)\ \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Смысл определения состоит в том, что при достаточно больших по модулю значениях $x$ значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа $A$.

Выясним ***геометрический смысл*** предела функции $y=f(x)$ в бесконечности. Неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, соответствующему попаданию части графика в полосу шириной $2\varepsilon$ между прямыми $y = A-\varepsilon$ и $y = A+\varepsilon$.

Итак, число $A$ есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое число $M > 0$, что для всех *x* таких, что $|x| > M$, соответствующие точки графика функции попадают в полосу шириной $2\varepsilon$ между прямыми $y = A-\varepsilon$ и $y = A+\varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

Приведенное выше определение предела при $x \to \infty$ предполагает неограниченное возрастание независимой переменной *x* по абсолютной величине. Можно сформулировать понятие предела при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$:

$$\left(A = \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists M = M(\varepsilon) > 0)\ (\forall x : x > M)\ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

$$\left(A = \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists M = M(\varepsilon) > 0)\ (\forall x : x < -M)\ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

## 3. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ задана в окрестности точки $x_0$, кроме, быть может, самой точки $x_0$.

- Число $A$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при x, стремящемся к*** $x_0$ (или ***в точке*** $x_0$), если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от $\varepsilon$, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех *x*, не равных $x_0$ и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta ,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Этот предел функции обозначается $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

С помощью логических символов определение запишется

$$\left(A = \lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)\ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Смысл определения предела функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ состоит в том, что при всех значениях *x*, достаточно близких к $x_0$, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа *A*.

Выясним ***геометрический смысл*** предела функции $y = f(x)$ в точке. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, соответствующему попаданию части графика в полосу шириной $2\varepsilon$ между прямыми $y = A-\varepsilon$ и $y = A+\varepsilon$. Аналогично неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, соответствующему попаданию точек *x* в $\delta$-окрестность точки $x_0$.

Итак, число $A$ есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такая $\delta$-окрестность точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие точки графика функции попадают в полосу шириной $2\varepsilon$ между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

### *Односторонние пределы.*

Если при стремлении $x$ к $x_0$ переменная $x$ принимает лишь значения, меньшие $x_0$, или, наоборот, лишь значения, большие $x_0$, и при этом функция $y = f(x)$ стремится к некоторому числу *A*, то говорят об односторонних пределах функции $y = f(x)$ соответственно слева $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ и справа $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Символически эти определения запишутся

$$\left(A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : x_0 - \delta < x < x_0)$$
$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$
$$\left(A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : x_0 < x < x_0 + \delta)$$
$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ существует тогда и только тогда, когда равны ее односторонние пределы, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Тогда и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

## 4. Основные теоремы о пределах

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ — функции, имеющие пределы при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

Сформулируем основные теоремы о пределах.

**Т. 1:** Функция не может иметь более одного предела.

**Т. 2:** Предел постоянной равен самой постоянной, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} C = C, \text{ где } C = const.$$

**Т. 3:** Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B.$$

**Т. 4:** Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) g(x)\right) = AB.$$

**Т. 5:** Постоянный множитель можно вынести за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x) = CA$$

**Т. 6:** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

**Т. 7:** Если $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ и $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A$, то $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A$.

**Т. 8:** Если предельное значение аргумента $x = x_0$ принадлежит области определения элементарной функции $y = f(x)$, то $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)$.

***Пример 1:*** Найти предел функции $\lim_{x \to x_0} (x^3 + 2x + 1)$.

*Решение.* $\lim_{x \to x_0} (x^3 + 2x + 1) = 27 + 6 + 1 = 34$.

## 5. Бесконечно малые величины

- Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** при $x \to x_0$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Можно дать развернутое определение бесконечно малой величины.

- Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** при $x \to x_0$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от $\varepsilon$, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех $x$, не равных $x_0$ и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

С помощью логических символов это определение запишется:

$$(\alpha(x) \text{ — б.м. при } x \to x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)\ |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Аналогично можно сформулировать определение бесконечно малой величины при $x \to \infty$.

Например, функции $y = \ln x$ при $x \to 1$ и $y = \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малые величины, т.к. их пределы равны нулю.

***Свойства бесконечно малых величин.***

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

***Сравнение бесконечно малых величин.***

Для сравнения двух бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в окрестности точки $x_0$ вычисляют предел их отношения при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается следующим образом: $\alpha(x) = 0(\beta(x))$ (читается «$\alpha(x)$ есть *о* малое от $\beta(x)$»).

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более низкого порядка малости***, чем $\beta(x)$, т.е. $\beta(x) = 0(\alpha(x))$.

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где $C = const$, то бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются ***бесконечно малыми одного порядка малости***.

4) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***, что обозначают $\alpha(x)\ \ \beta(x)$.

***Теорема*** (***принцип замены эквивалентных бесконечно малых***):

Предел отношения двух бесконечно малых величин равен пределу отношения им эквивалентных.

То есть если $\alpha(x)\ \ \alpha_1(x)$, $\beta(x)\ \ \beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

## 6. Бесконечно большие величины

- Функция $\beta(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$, если ее предел равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty .$$

Можно дать развернутое определение бесконечно большой величины.

- Функция $\beta(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$, если для любого, сколь угодно большого положительного числа $M > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от *M*, $\delta = \delta(M)$), что для всех *x*, не равных $x_0$ и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta ,$$

выполняется неравенство

$$|\beta(x)| > M.$$

С помощью логических символов это определение запишется

$$(\beta(x) \text{— б.б. при } x \to x_0) \Leftrightarrow (\forall M > 0)\ (\exists \delta = \delta(M) > 0)\ (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)\ |\beta(x)| > M.$$

Аналогично можно сформулировать определения бесконечно большой величины при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$

Например, функции $y = \ln x$ при $x \to +\infty$ и $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ есть бесконечно большие величины.

***Свойства бесконечно больших величин.***

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.
2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

***Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.***

***Теорема:*** Функция, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая величина, и наоборот.

То есть если $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to x_0$. И наоборот, если $\beta(x)$ — бесконечно большая величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Например, функция $y = tgx$ — бесконечно малая при $x \to 0$, а функция $y = \dfrac{1}{tgx} = ctgx$ — бесконечно большая при $x \to 0$.

***Теорема о связи функции с ее пределом*:** Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ предел, равный $A$, то ее можно представить в виде суммы этого числа $A$ и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Верна и ***обратная*** теорема: Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа $A$ и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, то число $A$ есть предел этой функции при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

## 7. Замечательные пределы

***Первый замечательный предел:*** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

***Следствия:*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1$.

***Пример 2:*** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$

*Решение.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot 1=\frac{5}{3}.$$

***Второй замечательный предел:*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

***Пример 3:*** Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

*Решение.*

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{\frac{6}{x}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^{30}=e^{30}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-2x\cdot\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-6}=e^{-6}=\frac{1}{e^{6}}.$$