Самостоятельное изучение учебного материала

Функция. Основные свойства функций

Изучите вопросы:

1. Элементы теории множеств.
2. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки.
3. Элементы математической логики.
4. Понятие функции. Способы задания функции.
5. Основные свойства функций
6. Понятие обратной функции
7. Понятие сложной функции
8. Основные элементарные функции

1. Элементы теории множеств

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под ***множеством*** понимается совокупность некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются ***элементами*** этого множества.

Множества обозначаются заглавными буквами, а их элементы — строчными.

Например, $N = \{1, 2, 3, ...\}$ — множество натуральных чисел.

Если a есть элемент множества A, то пишут $a \in A$. Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется ***подмножеством*** множества A и обозначается $B \subset A$.

Два множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C = A \bigcup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, т.е. $D = A \bigcap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $E = A \setminus B$.

Пример 1:

Даны множества $A=\{2;5;7;9\}$ и $B=\{1;3;7;9\}$. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Решение.

$A\bigcup B=\{1;2;3;5;7;9\}$;

$A\bigcap B=\{7;9\}$;

$A\setminus B=\{2;5\}$.

Если $A\subset B$, то ***дополнением*** множества A до множества B называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов множества B, не принадлежащих множеству A, т.е. $\overline{A}=B\setminus A$.

Множество называется ***конечным***, если оно содержит конечное число элементов; в противном случае — ***бесконечным***.

Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие (каждому элементу $a\in A$ соответствует один элемент $b\in B$ и наоборот), то говорят, что множества A и B имеют одинаковую ***мощность,*** или ***эквивалентны***.

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется ***счётным*** (его элементы можно пронумеровать).

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются ***числовыми.***

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Q — множество рациональных чисел;

I — множество иррациональных чисел;

R — множество действительных чисел.

$N\subset Z\subset Q\subset R$, $I\subset R$, $R=Q\bigcup I$.

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками числовой прямой, или числовой оси, т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

$a\le x\le b$ — отрезок $[a;b]$,

$a<x<b$ —интервал $(a;b)$,

$a<x\le b$ — полуинтервал $(a;b]$,

$a\le x<b$ — полуинтервал $[a;b)$,

Бесконечные интервалы и полуинтервалы: $(-\infty;a)$, $(b;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;a]$, $[b;+\infty)$.

Все указанные числовые множества называют ***промежутками***.

2. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки

Абсолютной величиной (или ***модулем***) действительного числа x называется само число x, если $x \geq 0$, и противоположное число $(-x)$, если $x < 0$:

Абсолютная величина разности двух чисел $|x-a|$ означает расстояние между точками x и a числовой прямой.

Поэтому, решением неравенства $|x-a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$) будут точки x интервала $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$.

Всякий интервал, содержащий точку a, называется ***окрестностью точки*** a.

Интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, т.е. множество точек x, таких, что $|x-a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется ε***-окрестностью точки*** a.

3. Элементы математической логики

Для сокращения записи математических высказываний употребляется символика математической логики.

Пусть α и β — некоторые высказывания, относительно которых можно сказать, истинны они или ложны.

$\overline{\alpha}$ — «не α», т.е. отрицание α;

$\alpha \Rightarrow \beta$ — «из α следует β» ($\Rightarrow$ — символ импликации);

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ — «α эквивалентно β» ($\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности);

$\alpha \wedge \beta$ — «α и β» ($\wedge$ — символ конъюнкции);

$\alpha \vee \beta$ — «α или β» ($\vee$ — символ дизъюнкции);

$\forall x$ — «любое x» ($\forall$ — квантор всеобщности);

$\exists y$ — «существует y» ($\exists$ — квантор существования);

$\forall x \in A : \alpha$ — «для любого x из A имеет место α»;

$\exists ! x \in X$ — «существует единственный x из X».

4. Понятие функции. Способы задания функции

Напомним общие сведения о функциях, известные из курса математики средней школы.

Если даны числовое множество X и правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что задана ***функция*** $y = f(x)$.

$X = D(f)$ — ***область определения функции***.

x — независимая переменная (аргумент);

y — зависимая переменная.

Множество всех значений зависимой переменной $y = f(x)$, $x \in X$ называется ***областью (множеством) значений функции*** и обозначается $E(f)$.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, графический, табличный.

При ***аналитическом*** способе функция задается одной или несколькими формулами, действующими на непересекающихся частях области определения.

При ***графическом*** способе функция задается графиком в плоскости xOy.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости xOy, для каждой из которых абсцисса x равна значению аргумента, а ордината равна соответствующему значению функции $y = f(x)$.

При ***табличном*** способе задания имеется таблица значений аргумента и соответствующих значений функции.

5. Основные свойства функций

1) Монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке *X*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции:

$$x_1 < x_2,\ x_1,\ x_2 \in X \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке *X*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции:

$$x_1 < x_2,\ x_1,\ x_2 \in X \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2).$$

Функция только возрастающая или только убывающая на промежутке *X* называется ***монотонной*** на этом промежутке.

Например, функция $y = x^2$ возрастает на $[0;+\infty)$ и убывает на $(-\infty;0]$.

2) Четность и нечетность.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого *x*, принадлежащего области определения, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Например, $y = x^2$ — четная функция.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого *x*, принадлежащего области определения, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y = x^3$ — нечетная функция.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Их часто называют функциями ***общего вида***. Такова, например, функция $y = 2x + 3$.

3) Периодичность.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что для $\forall x \in D(f)$ значения $x \pm T \in D(f)$ и $f(x \pm T) = f(x)$.

Число T называют ***периодом*** функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то ее периодами будут также числа kT, где $k \in Z$.

Наименьший положительный период функции называется ее ***основным периодом.***

Например, $y = \sin x$ — периодическая функция с основным периодом 2π.

4) Ограниченность.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной***, если существует число $C > 0$, такое, что для $\forall x \in D(f)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq C$ или $-C \leq f(x) \leq C$.

График ограниченной функции лежит между прямыми $y = -C$ и $y = C$.

Например, $y = \sin x$ — ограниченная функция, т.к. $|\sin x| \leq 1$ для $\forall x \in R$.

6. Понятие обратной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, для которой $D(f)$ — область определения, $E(f)$ — область значений. Функция $y = f(x)$ каждому значению $x \in D(f)$ ставит в соответствие единственное значение $y \in E(f)$.

Теперь, наоборот, поставим в соответствие каждому $y \in E(f)$ единственное значение $x \in D(f)$, при котором $f(x) = y$. Тогда получим функцию, называемую ***обратной*** по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначаемую $x = f^{-1}(y)$.

Для любой монотонной функции $y = f(x)$ существует обратная.

Чтобы найти обратную функцию, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

Например, для функции $y = 2x$ функция $x = \frac{1}{2}y$ является обратной.

Переход от функции $y = f(x)$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$ сводится лишь к изменению ролей множеств $D(f)$ и $E(f)$ ($D(f)$ — область значений, а $E(f)$ — область определения функции $x = f^{-1}(y)$), тогда как зависимость между x и y одна и та же в обоих случаях. Поэтому графики функций

$y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.

Обычно для обратной функции аргумент обозначают более привычной буквой *x*, а значение функции — буквой *y*, т.е. вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$. В этом случае графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Например, функция $y = \frac{1}{2}x$ — обратная по отношению к $y = 2x$.

7. Понятие сложной функции

Пусть переменная *y* есть функция $y = f(u)$ от переменной *u* с областью определения *U*, а переменная *u* в свою очередь является функцией $u = g(x)$ от переменной *x* с областью определения *X* и областью значений *U*. Тогда заданная на множестве *X* функция $y = f(g(x))$ называется ***сложной функцией***.

$$x \to u = g(x) \to y = f(u) = f(g(x)).$$

Переменная $u = g(x)$ называется ***промежуточным аргументом***.

Если, например, $u = x^2$, а $y = \sqrt{u+1}$, то сложная функция имеет вид $y = \sqrt{x^2+1}$.

8. Основные элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) степенная $y = x^n$, $n \in R$;

2) показательная $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;

5) обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Функция, записанная одной формулой и составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий (+, –, ×, :) и операции взятия сложной функции, называется ***элементарной***.

Например, $y = \dfrac{2^{\sin x}}{1 + \ln x}$ — элементарная функция.