Самостоятельное изучение учебного материала

Плоскость в пространстве

Изучите вопросы:

1. Понятие об уравнении поверхности пространстве.
2. Плоскость в пространстве. Виды уравнений плоскости.
3. Расстояние от точки до плоскости.
4. Взаимное расположение плоскостей.
5. Угол между плоскостями.

1. Понятие об уравнении поверхности пространстве

Уравнением поверхности в пространстве Oxyz называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$ с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки поверхности и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой поверхности.

Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются *текущими координатами*.

Для того чтобы установить, лежит ли точка $A(x_0; y_0; z_0)$ на данной поверхности, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой поверхности.

2. Плоскость в пространстве. Виды уравнений плоскости

Плоскость — это самая простая поверхность.

1) Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A; B; C)$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Вектор $\vec{n}=(A; B; C)$ называется *нормальным вектором* плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; -1; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2; 4; -3)$.

Решение.

Подставив в уравнение (1) координаты точки M_0 и вектора $\vec{n}$, получим уравнение плоскости:

$$2(x-3)+4(y+1)-3(z-2)=0,$$
$$2x-6+4y+4-3z+6=0,$$
$$2x+4y-3z+4=0.$$

2) *Общее уравнение плоскости* имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C, D — действительные числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D=0$, то плоскость проходит через начало координат.
2. Если $A=0$, то плоскость проходит параллельно оси Ox.
3. Если $B=0$, то плоскость проходит параллельно оси Oy.
4. Если $C=0$, то плоскость проходит параллельно оси Oz.
5. Если $A=D=0$, то плоскость проходит через ось Ox.
6. Если $B=D=0$, то плоскость проходит через ось Oy.
7. Если $C=D=0$, то плоскость проходит через ось Oz.

3) Если плоскость проходит через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, то ее уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$, $M_2(0;3;-2)$, $M_3(2;0;-1)$.

Решение.

Подставим в формулу для составления уравнения плоскости через три точки координаты точек M_1, M_2, M_3, получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 0-1 & 3+2 & -2-3 \\ 2-1 & 2+2 & -1-3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

По правилу треугольников для определителей третьего порядка имеем:

$$-20(x-1)-4(z-3)-5(y+2)-5(z-3)+20(x-1)-4(y+2)=0,$$

$$-20x+20-4z+12-5y-10-5z+15+20x-20-4y-8=0,$$

$$-9y-9z+9=0,$$

$$y+z-1=0.$$

Итак, общее уравнение плоскости имеет вид $y+z-1=0$. Так как $A=0$, то данная плоскость проходит параллельно оси Ox.

4) Если плоскость отсекает на осях координат отрезки a, b, c, то есть проходит через точки $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки $a=3$, $b=2$, $c=1$.

Решение.

Подставив в уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ значения $a=3$, $b=2$, $c=1$, получим уравнение данной плоскости в отрезках на осях:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1.$$

Умножим обе части равенства на 6, получим общее уравнение данной плоскости.

$$2x+3y+6z-6=0.$$

3. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 4. Найти расстояние от точки $M_0(1;-2;4)$ до плоскости $3x-y+5z-2=0$.

Решение.

Подставив в формулу $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ координаты точки M_0 и коэффициенты из уравнения данной плоскости, получим:

$$d=\frac{|3\cdot1+(-1)\cdot(-2)+5\cdot4-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{23}{\sqrt{35}}.$$

Итак, расстояние от точки M_0 до данной плоскости равно $\frac{23}{\sqrt{35}}$.

4. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны две плоскости:

плоскость α_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

плоскость α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

1) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\parallel\vec{n_2}$, то есть $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$;

2) $\alpha_1=\alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$:

3) $\alpha_1\perp\alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$, то есть $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

5. Угол между плоскостями

Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|},$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}.$$