Самостоятельное изучение учебного материала

Гипербола

Изучите вопросы:

1. Гипербола.

1. Гипербола

1) Определение.

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, которая меньше расстояния между фокусами, равного $2c$.

2) Каноническое уравнение.

Если фокусы F_1 и F_2 лежат на оси Ox, причем $OF_1 = OF_2 = c$ — фокусное расстояние, то координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Если $M(x;y)$ — произвольная точка гиперболы, то по определению $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Можно получит каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где x, y — координаты произвольной точки эллипса (текущие координаты), a — действительная полуось гиперболы, b — мнимая полуось, причем

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

3) Изображение:

а) Найдём точки пересечения гиперболы с осями координат.

С осью Ox:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$x = \pm a,$$

то есть $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ — точки пересечения гиперболы с осью *Ox, вершины* гиперболы..

С осью Oy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

решений нет, то есть гипербола не пересекает ось Oy.

б) Строим характеристический прямоугольник со сторонами 2a и 2b, параллельными осям координат, проводим его диагонали, продолжая их за вершины прямоугольника.

Эти прямые являются *асимптотами гиперболы*, то есть прямыми, к которым точки гиперболы неограниченно приближаются при бесконечном удалении их от начала координат вдоль линии.

Уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a} x .$$

в) Строим гиперболу.

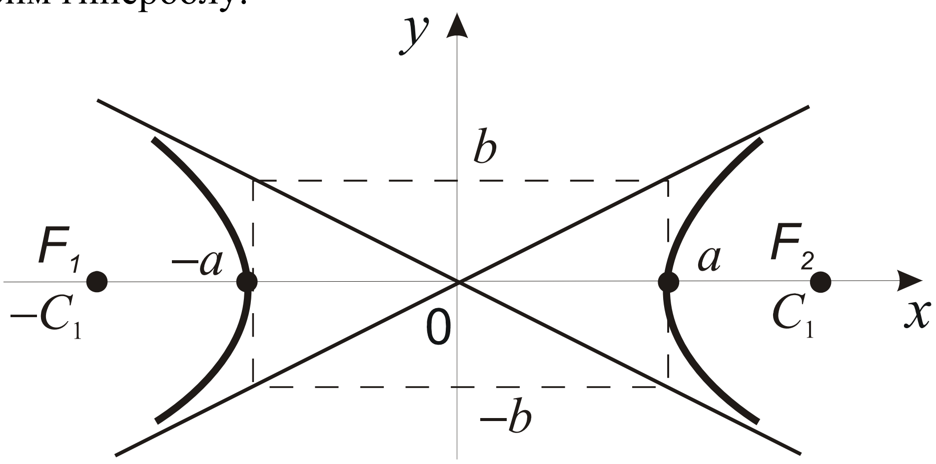

Рис.. Изображение гиперболы

4) Эксцентриситет.

Эксцентриситетом гиперболы ε называется отношение межфокусного расстояния к действительной оси, то есть

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

причем $\varepsilon > 1$.

Эксцентриситет гиперболы характеризует степень сжатия кривой к действительной оси.

5) Виды гипербол:

а) Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней (равнобокой).*

Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2 .$$

б) Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются *сопряжёнными.*

Пример 1: Дано уравнение гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$. Требуется найти: *а*) полуоси; *б*) координаты вершин; *в*) координаты фокусов; *г*) эксцентриситет; *д*) уравнения асимптот.

Решение.

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы.}$$

а) $a^2=9$, $a=3$ — действительная полуось, $b^2=4$, $b=2$ — мнимая полуось.

б) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$ — вершины гиперболы.

в) Найдем c по формуле связи $c^2=a^2+b^2$, получим $c^2=9+4=13$, $c=\sqrt{13}$.

Тогда $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, получим $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

д) Уравнения асимптот найдём по формулам $y=\pm\frac{b}{a}x$, получим:

$$y=\pm\frac{2}{3}x.$$

Пример 2: Написать каноническое уравнение гиперболы, если межфокусное расстояние равно 10, а действительная полуось $a=4$.

Решение.

По условию задачи $2c=10$, $c=5$ и $a=4$. Найдём мнимую полуось эллипса b из формулы связи $c^2=a^2+b^2$, получим

$$25=16+b^2,$$
$$b^2=25-16=9.$$

Подставляя в уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $a^2=16$, $b^2=9$, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$