Самостоятельное изучение учебного материала

Окружность. Эллипс

Изучите вопросы:
1. Понятие о кривых второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс.

1. Понятие о кривых второго порядка

Кривые второго порядка это линии на плоскости, которые в прямоугольной декартовой системе координат задаются алгебраическими уравнениями второй степени, то есть уравнениями вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля.

К кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

2. Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности, на расстояние, равное радиусу.

Если $M(a, b)$ — центр окружности, а R — радиус окружности, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

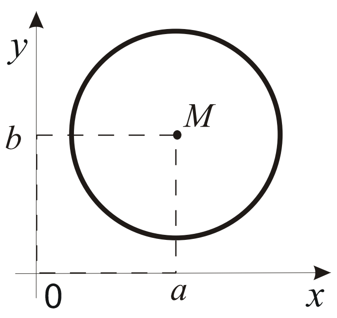

Рис. Изображение окружности

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример 1: Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $A(-3; -2)$ и радиус $R = 4$.

Решение.

Подставим координаты центра и значение радиуса окружности в уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, получим уравнение искомой окружности:

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16.$$

Пример 2: Составить уравнение окружности с диаметром *AB*, если $A(-5;4)$, $B(-3;2)$.

Решение.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка *AB*, по формулам для координат *середины отрезка*:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ и } y=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$x=\frac{-5+(-3)}{2}=\frac{-8}{2}=-4, \text{ и } \quad y=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Итак, $C(-4;3)$ — центр окружности. Радиус окружности *R* равен половине длины отрезка *AB*. Длину отрезка *AB* найдем по формуле расстояния между двумя точками:

$$AB=\sqrt{(-5-(-3))^2+(4-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $R=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

Тогда уравнение искомой окружности будет иметь вид:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=2.$$

2. Эллипс

1) Определение:

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, которая больше расстояния между фокусами, равного $2c$.

2) Каноническое уравнение.

Пусть ось *Ox* проходит через точки F_1 и F_2 и начало координат является серединой отрезка $[F_1;F_2]$.

Тогда координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где c — фокусное расстояние.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса.

По определению эллипса $F_1M+F_2M=2a$.

Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\,,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx\,,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\,,$$

$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2\,,$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2\,.$$

Упрощая выражение, получим

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Обозначим $a^2-c^2=b^2$,

то есть

$$\boxed{c^2=a^2-b^2}$$

Тогда $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Откуда делением на a^2b^2 получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

Здесь a — *большая полуось* эллипса, *в* — *малая полуось* ($a>b$), $2a$ — большая ось, $2b$ — малая ось.

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ — вершины эллипса.

Форму эллипса характеризует *эксцентриситет*. *Эксцентриситетом эллипса* ε называется отношение межфокусного расстояния к большой оси, то есть

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a},$$

причем $\varepsilon<1$.

Чем ближе ε к единице, тем эллипс более вытянут вдоль оси Ox. Эксцентриситет эллипса характеризует степень сжатия кривой к большой оси.

Если $a<b$, то эллипс вытянут вдоль оси Oy.

Тогда b — *большая полуось* эллипса, a — *малая полуось*.

$$\boxed{c^2=b^2-a^2}$$

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{b}}$$

3. Изображение:

а) Найдём точки пересечения эллипса с осями координат.

С осью Ox:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=0;\end{cases}$$

$$x = \pm a,$$

то есть $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ — точки пересечения эллипса с осью Ox.

С осью Oy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$y = \pm b,$$

то есть $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ — точки пересечения эллипса с осью Oy.

б) Строим характеристический прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям координат.

в) Вписываем эллипс.

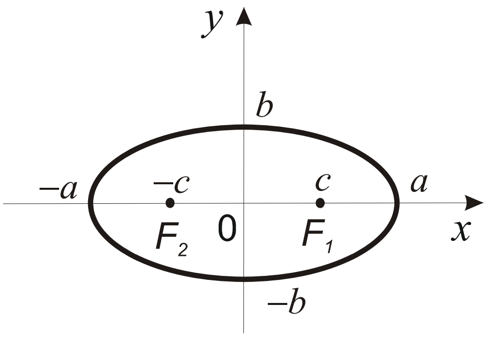

Рис. Изображение эллипса (a > b)

Пример 3: Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Требуется найти: *а*) полуоси; б) координаты вершин; *в*) координаты фокусов; *г*) эксцентриситет.

Решение.

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ — каноническое уравнение эллипса.}$$

а) $a^2 = 9$, $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

б) $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$ — вершины эллипса.

в) Найдем *c* по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$. Тогда $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 4: Написать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, и расстояние между ними равно 6, а большая полуось равна 5.

Решение.

По условию задачи $2c = 6$, $c = 3$ и $a = 5$. Найдём малую полуось эллипса b из формулы связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим

$$9 = 25 - b^2,$$

$$b^2 = 25 - 9 = 16.$$

Подставляя в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$