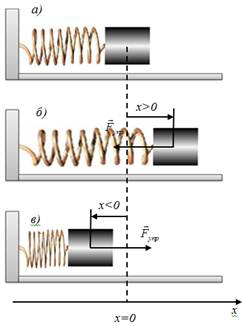
**§2 Пружинный маятник.**

**Упругие и квазиупругие силы**.

**Уравнение колеблющейся пружины**

Рассмотрим тело массы *m*, закрепленное на пружине с коэффициентом жесткости *k* (массой пружины пренебрегаем).  Растянем пружину на *х*. Тогда по закону Гука на тело будет действовать сила упругости *F*упр :

1) величина силы пропорциональна величине отклонения системы от положения равновесия

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image004.png

2) направление сила противоположно направлении смещения, т.е. сила всегда  направлена к положению равновесия (при *х* > 0, *F*упр < 0, при *х* < 0,*F*упр > 0)

3) В положении равновесия *х* = 0 и *F*упр = 0.

По закону Гука

*F*упр = -*kх*.

 Систему, состоящую из материальной точки массы *m*и абсолютно упругой пружины с коэффициентом жесткости *k*, в которой возможны свободные колебания, называют **пружинным маятником**.

Запишем второй закон Ньютона для рис. б

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image006.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image008.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image010.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image012.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image014.png

т.е.

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image016.png

тогда

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image018.png

и

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image020.png

 Если сила не является по своей природе упругой, но подчиняется закону *F*= -*kх*, то она называется **квазиупругой силой**.

Получим уравнение пружинного маятника.  Учтем в записи второго закона Ньютона, что

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image023_0000.png

тогда

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image010_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image026_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image028_0000.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image030_0000.png

 - дифференциальное уравнение точки, совершающей колебательное движение (дифференциальное уравнение пружинного маятника).

 Решение дифференциального уравнения:

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image032_0000.png

- уравнение колеблющейся точки (уравнение колеблющейся пружины).

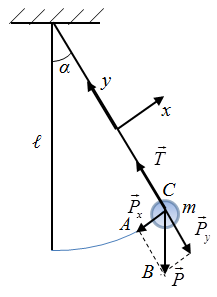
http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image034_0000.png

-  собственная частота колебаний.

**§3 Математический и физический маятники.**

**Периоды колебаний математического и физического маятников**

**Математический маятник** - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, и совершавшая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. **Материальная точка** - тело, масса которого сосредоточена в центре масс и размерами которого в условиях данной задачи, можно пренебречь.

Математический маятник при колебаниях совершает движение по дуге окружности радиуса http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image037.png. Его движение подчиняется законам вращательного движения.

Основное уравнение вращательного цветения запишется в виде

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image039.png                                             (1)

*М –*момент сил, *I* – момент инерции, ε – угловое ускорение.

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image041.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image043.png

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image045.png

Равнодействующая сил http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image047.png и http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image049.pngравна http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image051.png.

Из треугольника АВС

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image053.png

т.е.

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image055.png

таким образом, колебания математического маятника происходят под действием квазиупругой силы - силы тяжести.

Тогда (1) запишется в виде

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image057.png                                  (2)

Знак минус учитывает, что векторы  http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image059.pngи http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image061.pngимеют противоположные направления (угол поворота можно рассматривать, как псевдовектор углового смещения http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image061_0000.png, направление вектора http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image059_0000.png определяется по правилу правого винта, из-за знака минус http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image061_0001.png направлен в противоположную сторону).

 Сократив в (2) на *m* и http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image037_0000.png получим

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image064.png

При малых углах колебаний  α = 5 ÷6° ,http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image066.png, получим

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image068.png

Ввода обозначения

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image070.png

получим **дифференциальное уравнение колебаний математического маятника**

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image072.png

Его решение:

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image074.png

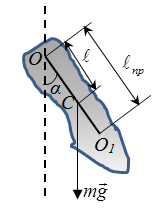
- **уравнение математического маятника**.

из которого видно, что угол α изменяется по закону косинуса.  α0 -  амплитуда, ω0 - циклическая частота, φ0 - начальная фаза.

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image076.png

- период колебаний математического маятника

**Физический маятник** - твердое тело, колеблющееся под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести тела, называемой осью качания маятника.

Основное уравнение – вращательного движения для физического маятника запишется в виде

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image079.png

При малых углах колебаний  http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image066_0000.pngи уравнение движения имеет вид

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image081.png

Тогда положив

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image083.png

получим

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image085.png

- дифференциальное уравнение физического маятника.

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image087.png

- период колебаний физического маятника

Приравняв *Тфиз = Тмат*:

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image089.png

следовательно, математический маятник с длиной

http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image091.png

имеет такой же период колебаний, как и данный физический маятник.  http://www.bog5.in.ua/lection/vibration_lect/image_vibr/clip_image093.png- **приведенная длина физического маятника** -  это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.