

Теорема разложения

Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\text{Пусть } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{— разложение определителя по элементам первой строки;}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \quad \text{— разложение определителя по элементам второго столбца.}$$

Пример 1.10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, разложив

его по элементам первой строки.

Решение

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 1A_{11} + 2A_{12} + 0A_{13} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 1 - 2 \cdot 4) - 2((-2) \cdot (-1) - (-5) \cdot 4) = \\ &= -11 - 2(2 + 20) = -11 - 44 = -55. \end{aligned}$$

Ответ: -55 .

Замечание. Теорема разложения позволяет понизить порядок определителя на единицу.

Пример 1.11. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

используя свойство (6) и теорему разложения.

Решение

Элементы 1-й строки прибавим к соответствующим элементам 2-й строки. Потом элементы 1-й строки умножим на (-1) и прибавим к

соответствующим элементам 4-й строки. Затем разложим определитель по элементам 4-го столбца. Получим:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1A_{11} = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (6 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 4(-1)(-1)) = \\ &= -(-6 + 40 - 24 - 4) = -6.\end{aligned}$$

Ответ: -6 .