. Основные свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами. Это действие называется *транспонированием.*

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Транспонируем определитель Δ:

$$\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$\Delta^T = \Delta$.

2. Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (столбца), то определитель изменит знак на противоположный.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right);$$

$\Delta_1 = -\Delta$.

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Если в определителе какая-либо строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}0 - a_{12}0 = 0.$$

5. Если в определителе какие-либо две строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{11}a_{12} = 0.$$

6. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на одно и тоже число и прибавить к соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель не изменится.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Элементы 1-й строки умножим на число k и прибавим к элементам 2-й строки:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} + ka_{11}a_{12} - a_{21}a_{12} - ka_{11}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\Delta = \Delta_1.$$

П р и м е р 1.9. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ двумя способами:

1) по правилу треугольников;
2) упростив определитель по свойствам и затем применив правило треугольников.

Решение

1) По правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1(-3) + 2 \cdot 4(-3) - (-3)3(-3) - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 6 - 6 - 24 - 27 - 4 - 8 = -63.$$

2) Используя свойство (6), умножим элементы 1-й строки на (–2) и прибавим к соответствующим элементам 2-й строки. Затем умножим элементы 1-й строки на 3 и прибавим к соответствующим элементам 3-й строки. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-7) + 0 \cdot 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 10 \cdot 0 -$$

$$- 0 \cdot (-1) \cdot (-3) - 7 \cdot 10 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot (-7) = 7 - 70 = -63.$$

Ответ: – 63.