Определители 2, 3, n-го порядков

Определителем 2-го порядка, соответствующим квадратной матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2-го порядка, называется число, равное $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ и обозначаемое $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Определитель матрицы A обозначается ΔA, или $|A|$, или $detA$ и читается соответственно дельта A, или определитель матрицы A, или детерминант матрицы A.

Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ определителя, a_{12}, a_{21} — побочную. Схема вычисления определителя 2-го порядка представлена на рис. 2.

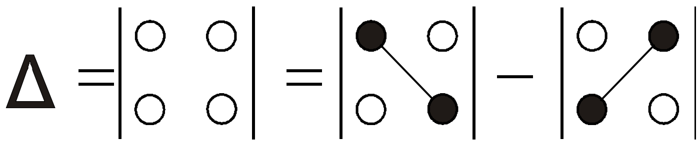

Рис. 2

Пример 1.5. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1-4(-3)=16.$$

Ответ: 16.

Пример 1.6. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Решение

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$

Ответ: $\cos 2\alpha$.

Определителем 3-го порядка, соответствующим квадратной матрице

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ 3-го порядка, называется число, равное

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33},$$
и обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Схема вычисления определителя 3-го порядка по правилу треугольников (правилу Саррюса) представлена на рис. 3.

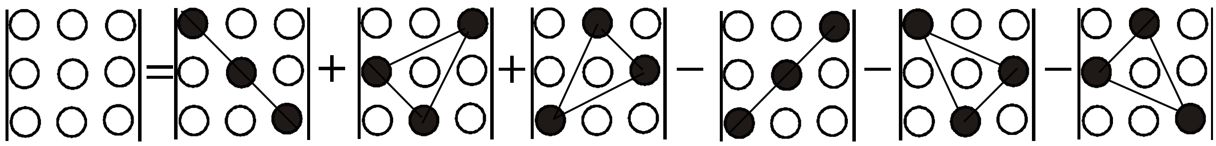

Рис. 3

Пример 1.7. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot 3(-1)+(-2)\cdot 2\cdot 0+2\cdot 4(-5)-(-5)\cdot 3\cdot 0-$$

$$-2\cdot 4\cdot 1-(-2)\cdot 2(-1)=-3-40-8-4=-55.$$

Ответ: – 55.

Пример 1.8. Найдите, при каком значении *n* определитель

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ равен нулю.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10m + 4 - 18 - 2m - 6 + 60 = 8m + 40\,;$$

$\Delta = 0$, $8m + 40 = 0$, $m = -\dfrac{40}{8} = -5.$

При $m = -5$ определитель равен нулю.

Ответ: –5.

Определителем n-го порядка, соответствующим квадратной матрице размерности $(n \times n)$, называется число, найденное по определенному закону, представляющему из себя сумму $n!$ слагаемых.