

ТЕМА 2 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ



2.1 Сущность и задачи линейного программирования

2.2 Графический метод решения задач

2.3 Методы линейного программирования



2.2 Графический метод решения задач



Суть графического метода состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение. Эта точка является одной из вершин многоугольника решений.



Ввиду того, что наглядность графического решения достигается лишь на плоскости, с графическим представлением задачи можно познакомиться только в двумерном пространстве. Поэтому графический метод имеет такие узкие рамки применения.



Однако для выработки наглядных представлений о решениях задач линейного программирования графический метод позволяет геометрически подтвердить справедливость теоремы линейного программирования.



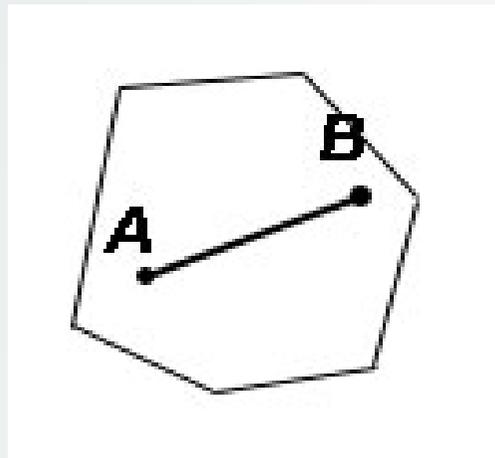
Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.



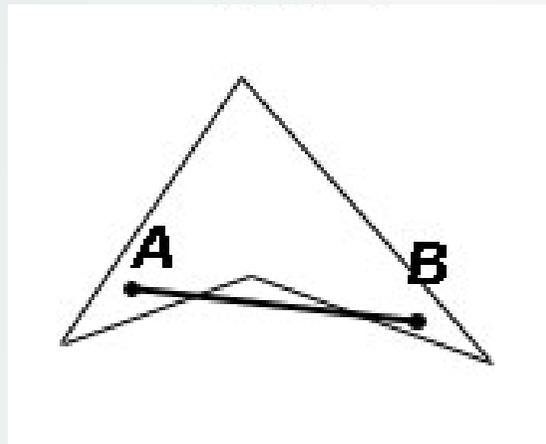
Множество решений задачи линейного программирования определяется совокупностью линейных ограничений, поэтому такое множество геометрически представляет собой выпуклый многогранник или выпуклое множество точек.



Множество точек называется выпуклым, если вместе с его любыми двумя точками ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий их.



Если же существует хотя бы такая пара точек множества, что отрезок, соединяющий эти точки, не принадлежит целиком этому множеству, то такое множество называется невыпуклым.



Этапы графического метода решения
ЗЛП:

1. Построение области допустимых решений

Ограничения ЗЛП в виде
неравенств задают выпуклую
многогранную область,
которая носит название
«область допустимых
решений».



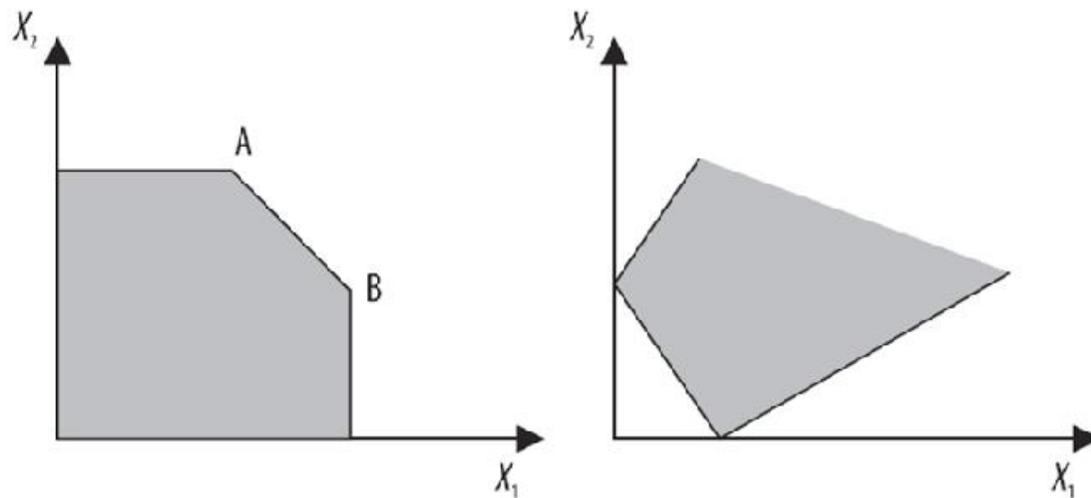
Этапы графического метода решения
ЗЛП:

1. Построение области допустимых решений

В силу условия
неотрицательности
переменных x_1 и x_2 область
располагается в первой
четверти координатной
плоскости ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).



Этапы графического метода решения ЗЛП:
1. Построение области допустимых решений
Область допустимых решений
может иметь вид выпуклого
многогранника или выпуклого
многогранного неограниченного
множества:



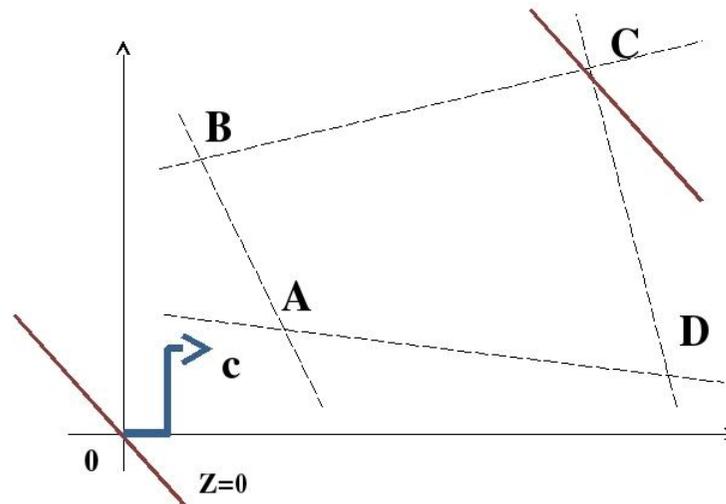
а) выпуклый многогранник; б) выпуклое многогранное неограниченное множество



Этапы графического метода решения ЗЛП:

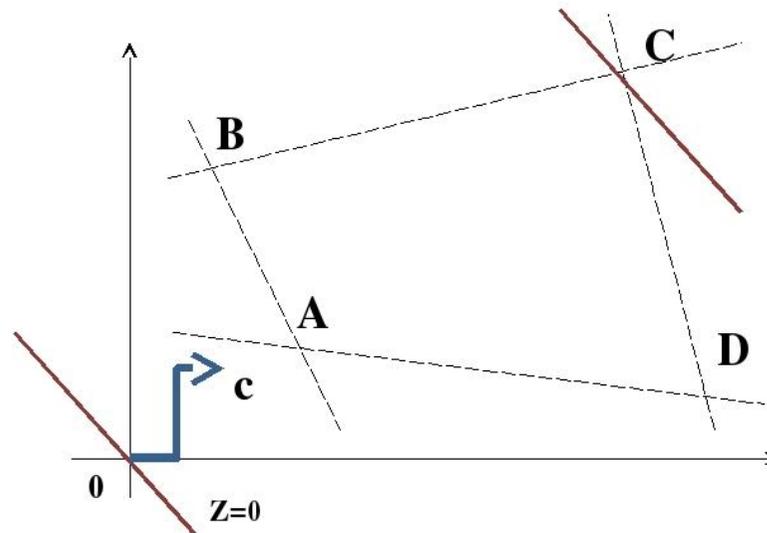
2. Исследование поведения целевой функции на области допустимых решений при помощи линий уровня.

Линия уровня C — линия, на которой значение ЦФ равно C (то есть график $F(x) = C$).



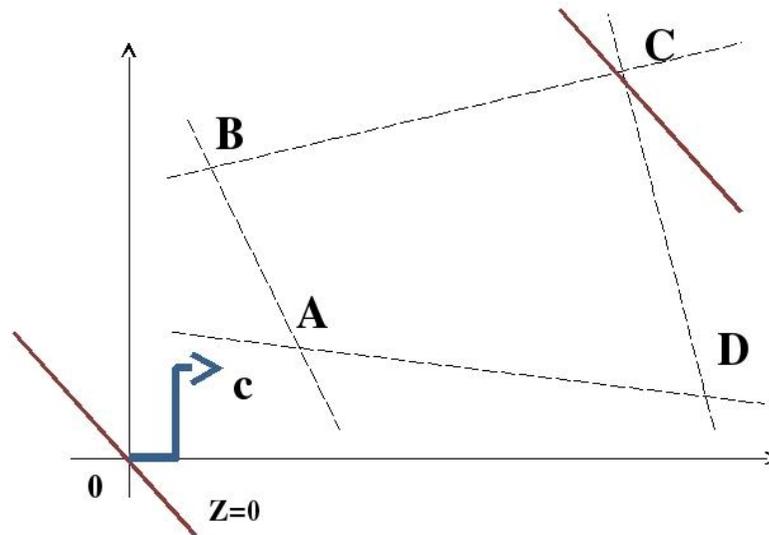
Этапы графического метода решения
ЗЛП:

2. Рисуем линии уровня при
разных значения C и определяем
направление движения по линиям
уровня (переход от одной линии
уровня к другой) при увеличении
значения C .



Этапы графического метода решения
ЗЛП:

2. Таким образом, с помощью
линий уровня можно определить
направление возрастания
(убывания) значения целевой
функции.





Этапы графического метода решения
ЗЛП:

3. Нахождение решения

Продвигаем линии уровня в
направлении возрастания
значения целевой функции

Этапы графического метода решения
ЗЛП:

3. Нахождение решения

Если в задаче требуется найти ее максимум (в направлении убывания, если требуется найти минимум), до достижения последнего касания с областью допустимых решений. Эта линия уровня является «экстремальной».





Пример

Сельскохозяйственное предприятие занимается возделыванием только двух культур (зерновых и картофеля), располагая следующими ресурсами: пашня – 5000 га, труд – 300 тыс. человеко-часов, возможный объем тракторных работ – 28000 усл. эт. га.



Пример

Цель производства – получение максимального объема валовой продукции (в стоимостном выражении). Требуется найти оптимальное сочетание посевных площадей культур.

Пример

Таблица - Нормы затрат и выхода продукции
в хозяйстве

Культуры	Затраты на 1 га посева		Стоимость ВП с 1 га, руб.
	труда, чел.- час.	тракторных работ, усл. эт. га	
Зерновые (x1)	30	4	400
Картофель (x2)	150	12	1000





Пример

Формализация задачи

Пусть

x_1 - площадь зерновых, га;

x_2 - площадь картофеля, га;

Максимум целевой функции:

$$C = 400x_1 + 1000x_2 \rightarrow \max$$



Пример

Условия задачи выражаются в виде следующей системы неравенств:

$$x_1 + x_2 \leq 5000$$

$$30x_1 + 150x_2 \leq 300000$$

$$4x_1 + 12x_2 \leq 28000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Пример

Любая точка многоугольника
OBCDE удовлетворяет
одновременно всем ограничениям
задачи. Поэтому множество точек
этого многоугольника
представляет собой совокупность
допустимых решений задачи.

Пример

В теории ЛП доказывается, что экстремальное значение целевой функции обязательно достигается на одной из вершин выпуклого многогранника, поверхность которого называется симплексом.





Пример

Отсюда произошло название симплексного метода решения задач ЛП путем направленного перебора вершин симплекса до получения оптимального плана.

Пример

Определив по графику координаты остальных вершин многоугольника, находим соответствующие значения ЦФ:

Вершина	Координаты		Значение ЦФ, руб.
O			
B			
D			
E			





Пример

Таким образом, максимальное значение ЦФ достигается в вершине D, что соответствует варианту плана, когда площадь зерновых x_1 - 4000 га, картофеля x_2 - 1000 га.

Спасибо за внимание!

