Лекция № 11 Точечные оценки параметров генеральной совокупности

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие оценки параметров. Свойства оценок.
2. Точечные оценки параметров генеральной совокупности.

1. Понятие оценки параметров. Свойства оценок.

Выше рассмотрены методы расчета основных характеристик выборки: выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение. Эти характеристики называются ***статистиками.***

Статистики получаемые по различным выборкам, как правило, отличаются друг от друга.

Например, если из 600 студентов случайным образом отбирают 60 чел. для определения среднего балла, то проводя этот эксперимент несколько раз, можно получить разные значения выборочных статистик. Причем статистика, полученная из выборки, отличается от соответствующего параметра генеральной совокупности. Она является ***оценкой*** неизвестного параметра генеральной совокупности.

Ясно, что статистику следует выбирать таким образом, чтобы ее значения как можно точнее оценивали значения соответствующих параметров генеральной совокупности.

Для того, чтобы статистики служили хорошими оценками параметров генеральной совокупности, они должны обладать рядом свойств:

1. несмещенность,
2. эффективность,
3. состоятельность.

Оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется ***несмещенной***, если $M\overline{\theta}=\theta$.

Несмещенная оценка не дает систематических ошибок.

Оценка $\overline{\theta}$ называется ***состоятельной***, если при больших объемах выборки $(n\to\infty)$ она все ближе приближается к истинному значению параметра θ.

Оценкой качества несмещенной оценки $\overline{\theta}$ является ее дисперсия

$$D\overline{\theta}=M\left(\overline{\theta}-\theta\right)^2.$$

Несмещенная оценка $\overline{\theta}$ называется ***эффективной***, если ее дисперсия минимальна по сравнению с дисперсиями всех других возможных несмещенных оценок параметра θ.

Классификация оценок параметров генеральной совокупности:

1) *Точечная оценка* — это числовое значение $\overline{\theta}$ (характеристика), полученное по выборке.

2) *Интервальная оценка* — определяется интервал $(\overline{\theta_1};\overline{\theta_2})$, внутри которого находится точное значение θ оцениваемого параметра.

2. Точечные оценки параметров генеральной совокупности

1) Пусть $MX = a$ — генеральная средняя (неизвестный постоянный параметр).

Несмещенной, состоятельной оценкой $MX = a$ является выборочная средняя $\overline{x_в}$, то есть $\overline{x_в} \approx a$.

2) Пусть $DX = \sigma^2$ — генеральная дисперсия (неизвестный постоянный параметр).

Выборочная дисперсия $D_в$ является состоятельной, но смещенной оценкой $DX = \sigma^2$. Ее используют при больших объемах выборки $(n > 30)$. При малых объемах выборки $(n \le 30)$ выборочную дисперсию исправляют:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$$

S^2 — называется исправленной выборочной дисперсией. Она является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии.

3) Пусть $\sigma X = \sigma$ — генеральное среднее квадратическое отклонение.

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$ используют для оценки $\sigma X = \sigma$ при больших объемах выборки $(n > 30)$. При малых объемах выборки $(n \le 30)$ используют исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2}\ .$$

Оценка качества несмещенной оценки параметра a, то есть оценка качества $\overline{x_в}$ **:**

Ее дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

а) для повторной выборки: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{S^2}{n}$, $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{S^2}{n}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}}$;

б) для бесповторной выборки: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{S^2}{n}\left(1 - \dfrac{n}{N}\right)$, $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{S^2}{n}\left(1 - \dfrac{n}{N}\right)}$;

Пример:

Найти точечные оценки генеральной средней, генеральной дисперсии и генерального среднего квадратического отклонения. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение выборочной средней.

Решение.

Точечной оценкой генеральной средней является выборочная средняя: $\overline{x_в} = 3{,}32$.

Так как $n = 25 < 30$, то для точечной оценки генеральной дисперсии используем исправленную выборочную дисперсию, которую находим по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в.$$

Так как $D_в = 0{,}8576$, то

$$S^2 = \frac{25}{25-1} \cdot 0{,}8576 \approx 0{,}8933.$$

Точечной оценкой генерального среднего квадратического отклонения является исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2},$$

$$S \approx \sqrt{0{,}8933} \approx 0{,}95.$$

Пример:

Найти точечные оценки генеральной средней, генеральной дисперсии и генерального среднего квадратического отклонения.

Решение.

Точечной оценкой генеральной средней является выборочная средняя: $\overline{x_в} = 28$.

Найдем исправленную выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в,$$

$$S^2 = \frac{100}{100-1} \cdot 3{,}72 \approx 3{,}76.$$

Найдем исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2},$$

$$S \approx \sqrt{3{,}76} \approx 1{,}94.$$

Пример.

Из 1500 деталей отобрано 250. Вычислены точечная оценка генеральной средней — $\overline{x_в} = 8{,}44$ и точечная оценка генеральной дисперсии — $S^2 = 0{,}042$. Найти дисперсию $\sigma^2_{\bar{x}}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$ оценки $\overline{x_в}$ для повторного и бесповторного отбора.

Решение.

Дисперсия $\sigma_{\bar{x}}^2$ оценки $\overline{x_в}$ для повторного отбора:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n};$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{0,042}{250} = 0,000168.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$ оценки $\overline{x_в}$ для повторного отбора:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{0,000168} \approx 0,013.$$

Дисперсия $\sigma_{\bar{x}}^2$ оценки $\overline{x_в}$ для бесповторного отбора:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right);$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{0,042}{250}\left(1 - \frac{250}{1500}\right) = 0,00014.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$ оценки $\overline{x_в}$ для бесповторного отбора:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{0,00014} \approx 0,012.$$