Лекция 8. Законы распределения случайных величин. Нормальный закон распределения

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Виды законов распределения случайных величин.
2. Нормальный закон распределения.

1. Виды законов распределения случайных величин

1. Биномиальное распределение.
2. Геометрическое распределение.
3. Распределение по закону Пуассона.
4. Равномерное распределение.
5. Показательное распределение.
6. Нормальное распределение.

2. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения является самым распространенным из законов распределения, наиболее часто встречающимся в случайных явлениях природы. Объясняется это тем, что, как правило, с. в. принимает те или иные значения под воздействием большого числа взаимно независимых малых причин.

- Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальный закон распределения (закон Гаусса)*** с параметрами a и σ, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma>0$, $x\in R$.

Смысл параметров a и σ:

$a=M(X)$ — математическое ожидание;

$\sigma=\sigma(X)$ — среднее квадратическое отклонение.

Свойства функции $y=f(x)$:

1) $f(x)>0$ при $x\in R$;

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$;

3) $x=a$ — точка максимума функции $y=f(x)$;

$f(a)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ — максимум функции $y=f(x)$;

4) $M_1\left(a-\sigma,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $M_2\left(a+\sigma,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ — точки перегиба графика функции $y=f(x)$.

- График плотности распределения вероятности нормального закона называют ***нормальной кривой*** или ***кривой Гаусса***.

(График функции $y = f(x)$ изобразите самостоятельно).

- ***Интегральная функция распределения*** нормальной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Свойства функции $y = F(x)$:

1) $0 < F(x) < 1$ при $x \in R$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

3) $M\left(a, \frac{1}{2}\right)$ — точка перегиба графика функции $y = F(x)$.

(График функции $y = F(x)$ изобразите самостоятельно).

Вероятность того, что нормально распределенная СВ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Для симметричного относительно a промежутка $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ справедлива формула:

$$P(|X - a| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким образом, вероятность того, что нормально распределенная с. в. X отклонится от своего математического ожидания не более чем на ε, равна

$$P(|X - a| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Полагая $l = 3\sigma$, получим $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$, т.е. отклонение случайной величины X от своего математического ожидания меньше, чем на 3σ — почти достоверное событие.

Практически достоверно, что с. в. X примет свои значения в промежутке $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Это утверждение называется «***правилом трех сигм***».

Пример:

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

Решение

Воспользуемся формулой нахождения вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

По условию задачи: $a = 10$, $\sigma = 2$, $\alpha = 12$, $\beta = 14$.

Тогда

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

$\Phi(2)$ и $\Phi(1)$ находим по таблице значений функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(2) \approx 0{,}4772,\ \Phi(1) \approx 0{,}3413.$$

Тогда искомая вероятность

$$P(12 < X < 14) \approx 0{,}4772 – 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

Ответ: 0,1359.

Пример:

Случайные значения веса зерна распределены нормально с математическим ожиданием 0,15 г и средним квадратическим отклонением 0,03 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,1 г. Определить процент семян, от которых можно ожидать нормальные всходы.

Решение

Пусть случайная величина X — вес зерна.

По условию: $M(X) = a = 0{,}15$ г, $\sigma = 0{,}03$ г.

Нормальные всходы дадут зерна, вес которых больше 0,1 г. Найдем вероятность того, что значения случайной величины X больше 0,1. Используем формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(0{,}1 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 0{,}15}{0{,}03}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}1 - 0{,}15}{0{,}03}\right) = \Phi(\infty) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}5 + \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}5 + \Phi(1{,}67) \approx 0{,}5 + 0{,}4525 \approx 0{,}9525.$$

Значения $\Phi(\infty)$ и $\Phi(1{,}67)$ находим по таблице значений функции $\Phi(x)$.
Значит, от 95,25% семян можно ожидать нормальные всходы.
Ответ: 0,9525.

Пример:

Длина детали представляет собой нормально распределенную с.в. с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти вероятность того, что длина детали отклонится от ее математического ожидания меньше чем на 1,5 мм.

Решение

Пусть X — длина детали.
По условию: $a = M(X) = 40$, $\sigma = 3$.

Искомая вероятность $P\left(\left|X-40\right|<1{,}5\right)$ находится по формуле

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \text{ где } \varepsilon = 1{,}5.$$

Имеем:

$$P\left(\left|X-40\right|<1{,}5\right)=2\Phi\left(\frac{1{,}5}{3}\right)=2\Phi\left(0{,}5\right)\approx 2\cdot 0{,}1915\approx 0{,}383.$$

Значение $\Phi(0{,}5)$ находим по таблице значений функции $\Phi(x)$.
Ответ: 0,383.