Лекция 4. Повторные независимые испытания

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Формула Бернулли.
2. Формула Пуассона.
3. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

1. Формула Бернулли

- Пусть проводится n повторных испытаний, удовлетворяющих следующим условиям:

1. все n испытаний — независимые, т.е. вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний;

2. в каждом испытании может произойти событие A (его называют *успехом*) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Например, схемой Бернулли является 10 независимых выстрелов по мишени, где событие A — попадание (успех), $P(A) = 0{,}8$; событие $\overline{A}$ — промах (неудача), $P(\overline{A}) = 0{,}2$.

Для вычисления вероятности $P_n(k)$, того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, определяется по ***формуле Бернулли:***

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где n — число испытаний,
k — число появления события A (успеха) в n испытаниях,
p — вероятность появления события A (успеха) в каждом испытании,
q — вероятность непоявления события A (неуспеха) в каждом испытании,
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

Пример:

Вероятность появления бракованной детали равна 0,2. Найти вероятность того, что из четырех случайно отобранных деталей бракованных окажется

а) две;
б) не более двух;
в) хотя бы одна.

Решение.

A — бракованная деталь.

а) $n=4$, $p=0{,}2$, $q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$, $k=2$.

Тогда

$$P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{4-2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot 0{,}04\cdot 0{,}64=6\cdot 0{,}04\cdot 0{,}64=0{,}1536.$$

б) $n=4$, $p=0{,}2$, $q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$, $0\le k\le 2$.

$$P_4(0;2)=P_4(0)+P_4(1)+P_4(2).$$

$$P_4(0)=C_4^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^4=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot 0{,}4096=0{,}4096,$$

$$P_4(1)=C_4^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^3=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}512=4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}512=0{,}4096,$$

$$P_4(2)=0{,}1536.$$

Тогда

$$P_4(0;2)=0{,}4096+0{,}4096+0{,}1536=0{,}9728.$$

в) $n=4$, $p=0{,}2$, $q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$, $1\le k\le 4$.

$$P_4(1;4)=P_4(1)+P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-P_4(0)=1-0{,}4096=0{,}5904..$$

В n испытаниях Бернулли наиболее вероятное число успехов k_0 удовлетворяет неравенству

$$\boxed{np-q\le k_0\le np+p}$$

Пример:

Всхожесть семян данного растения 0,8. Найти наиболее вероятное число проросших семян из пяти посеянных.

Решение.

$n=5$, $p=0{,}8$, $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$.

Тогда

$$5\cdot 0{,}8-0{,}2\le k_0\le 5\cdot 0{,}8+0{,}8,$$

$$3{,}8\le k_0\le 4{,}8.$$

Так как $k_0\in Z$, то $k_0=4$.

Итак, наиболее вероятное число проросших семян из пяти посеянных равно четырем.

2. Формула Пуассона

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, вероятность появления события A в одном испытании p мала, а произведение $\lambda=np\le 20$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, определяется по ***формуле Пуассона:***

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}},$$

где $\lambda = np$.

Для нахождения значений $P_n(k)$ по формуле Пуассона существуют таблицы.

Пример:

Завод «Золотая балка» (Крым) отправил в Москву 1500 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более 2-х бутылок.

Решение.

A — бутылка разбилась.

$n = 1500$, $p = 0{,}002$, $0 \le k \le 2$; $\lambda = np = 1500 \cdot 0{,}002 = 3$.

$P_{1500}(0;2) = P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2)$.

$P_{1500}(0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}0498$,

$P_{1500}(1) = \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}1494$,

$P_{1500}(2) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}2240$.

Тогда $P_{1500}(0;2) \approx 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$

3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю, для вычисления вероятности $P_n(k)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, используется ***локальная формула Муавра-Лапласа***:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется функцией Гаусса.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы значений.

Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) при $x \ge 4$ можно считать, что $\varphi(x) \approx \varphi(4)$.

Пример:

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Решение.

A — мишень поражена.

$n = 200$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $k = 160$;.

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \cdot \varphi\left(\frac{160 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \varphi\left(\frac{20}{\sqrt{42}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{6{,}48} \cdot \varphi\left(\frac{20}{6{,}48}\right) \approx 0{,}15 \cdot \varphi(3{,}09) \approx 1{,}15 \cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005.$$

4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ или $P_n(k_1, k_2)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, используется ***интегральная формула Муавра-Лапласа***:

$$\boxed{P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — *функция Лапласа*. Имеются таблицы приближенных значений функции $\Phi(x)$.

Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) при $x \ge 5$ можно считать, что $\Phi(x) \approx \Phi(5)$.

Пример:

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 и не более 90 раз.

Решение.

A — мишень поражена.

$n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $k_1 = 75$;. $k_2 = 90$

$$P_{100}(75, 90) \approx \Phi\left(\frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) \approx$$

$$\approx \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 \approx 0{,}8882.$$

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \cdot \varphi\left(\frac{160 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \varphi\left(\frac{20}{\sqrt{42}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{6{,}48} \cdot \varphi\left(\frac{20}{6{,}48}\right) \approx 0{,}15 \cdot \varphi(3{,}09) \approx 1{,}15 \cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005.$$