Лекция 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Формула полной вероятности.
2. Формула Байеса.

1. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности часто используется на практике в задачах экономического анализа и в научно-исследовательских работах. В тех случаях, когда необходимо определить вероятность какого-то случайного события, наступление которого зависит от внешнего воздействия, необходимо принимать во внимание влияние внешних факторов.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий (т.е. они попарно несовместны, а их сумма есть достоверное событие). В этом случае события $B_1, B_2, ..., B_n$ называют ***гипотезами***, т.к. неизвестно, какое из них произойдет и повлечет событие A. Тогда вероятность события A вычисляется по ***формуле полной вероятности***:

$$\boxed{P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{Bn}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)}$$

Пример: В учебном пособии по физике имеется 45 задач к первому разделу, 30 задач — ко второму и 35 задач — к третьему разделу дисциплины. Шансы студента правильно решить задачу из первого раздела оцениваются в 80%, из второго — в 65%, из третьего — в 85%. Студент наудачу открывает пособие, определите вероятность, что он решит случайно выбранную задачу.

Решение.

Обозначим события:

A — студент решит случайно выбранную задачу.

Это событие может произойти совместно с одной из следующих гипотез:

B_1 — задача из первого раздела;

B_2 — задача из второго раздела;

B_3 — задача из третьего раздела.

Определим вероятности гипотез:

$$P(B_1) = \frac{45}{110} = \frac{9}{22},$$

$$P(B_2) = \frac{30}{110} = \frac{3}{11},$$

$$P(B_3) = \frac{35}{110} = \frac{7}{22}.$$

Определим условные вероятности события A:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8,$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}65,$$

$$P_{B_3}(A) = 0{,}85.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{9}{22} \cdot 0{,}8 + \frac{3}{11} \cdot 0{,}65 + \frac{7}{22} \cdot 0{,}85 \approx 0{,}77.$$

Ответ: вероятность того, что студент решит случайно выбранную задачу, равна примерно 0,77.

2. Формула Байеса

При изучении различных процессов исследователь имеет предварительные, *априорные* (доопытные) вероятности интересующих его событий. Он проводит опыт, получает новую информацию и может пересчитать значения априорных вероятностей. Новые значения вероятностей тех же интересующих его событий будут уже *апостериорными* (послеопытными) вероятностями. Формула Байеса позволяет вычислять такие вероятности.

Пусть событие A может произойти только с одной из гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий. Пусть известны априорные вероятности каждой гипотезы $P(B_1),\ P(B_2), \ldots,\ P(B_n)$. Известно, что происходит событие A, и известны условные вероятности наступления события A совместно с каждой гипотезой $P_{B_1}(A),\ P_{B_2}(A), \ldots,\ P_{B_n}(A)$. Тогда можно вычислить апостериорные вероятности гипотез по ***формуле Байеса:***

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}},$$

где вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности, т.е.

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)}},\ (i = 1,2,...,n).$$

Пример: Имеются три одинаковые с виду коробки: в первой — 15 белых шаров, во второй — 10 белых и 5 черных, в третьей — 15 черных шаров. Из выбранной наугад коробки вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой коробки.

Решение.

Обозначим гипотезы:

B_1 — выбрана первая коробка;

B_2 — выбрана вторая коробка;

B_3 — выбрана третья коробка.

Укажем их априорные вероятности гипотез $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

Обозначим событие A — вынут белый шар.

Укажем условные вероятности наступления события A совместно с каждой гипотезой:

$$P_{B_1}(A) = 1,$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

$$P_{B_3}(A) = 0.$$

Событие A произошло.

Определим апостериорную вероятность гипотезы B_1 после наступления события A по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Ответ: вероятность того, что белый шар вынут из первой коробки равна 0,6.