Лекция 2. Правила сложения и умножения вероятностей

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Сумма событий.
2. Произведение событий.
3. Теорема о вероятности суммы несовместных событий.
4. Теорема о вероятности произведения независимых событий.
5. Теорема о вероятности произведения зависимых событий.
6. Теорема о вероятности суммы двух совместных событий.

1. Сумма событий

- ***Суммой событий*** A и B называется событие $C = A + B$, которое означает наступление или *A*, или *B*, или *A* и *B* одновременно (т.е. происходит хотя бы одно из них).

Пример:

Рассматривается опыт — выбор одного из чисел от 1 до 10.

A — выбор четного числа (2, 4, 6, 8, 10);

B — выбор числа, кратного 3 (3, 6, 9).

Тогда событие $C = A + B$ означает выбор числа, кратного или 2, или 3, при этом не исключается, что число кратно и 2 и 3, т.е. выбор одного из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10.

Суммой нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

2. Произведение событий

- ***Произведением событий*** A и B называется событие $C = A \cdot B$, которое означает появление и *A* и *B* одновременно.

Пример:

Рассматривается опыт — выбор одного из чисел от 1 до 10.

A — выбор четного числа (2, 4, 6, 8, 10);

B — выбор числа, кратного 3 (3, 6, 9).

Тогда событие $C = A \cdot B$ означает выбор числа, кратного и 2 и 3 одновременно, т.е. выбор числа 6.

Произведением нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в появлении всех этих событий в одном эксперименте.

Замечание.

Операции над событиями можно представить как операции над множествами. При этом события представляют подмножествами некоторого универсального множества Ω. Сумме событий $A + B$ соответствует объединение $A \bigcup B$ этих множеств, а произведению $A \cdot B$ соответствует пересечение $A \bigcap B$ этих множеств. Достоверное событие представляется множеством Ω. Невозможное событие — пустым множеством Ø. Несовместность событий A и B означает, что соответствующие события не пересекаются. Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, является дополнением к событию A до множества Ω. Эти операции в графическом виде иллюстрируются диаграммами Венна (*изобразите самостоятельно*).

3. Теорема о вероятности суммы несовместных событий

Теорема (о вероятности суммы двух несовместных событий):

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Вероятность суммы n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)}$$

Следствие 1: Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Пример: В урне 10 белых, 3 красных и 5 черных шаров. Наудачу выбирается один шар. Найти вероятность тог, что вынутый шар будет белым или черным.

Решение.

Обозначим события:

A — вынули белый или черный шар;

B — вынули белый шар;

C — вынули черный шар.

Тогда $A=B+C$. События B и C — несовместные.

$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)$.

$P(B)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$, $P(C)=\frac{5}{18}$.

Следовательно, $P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{9}+\frac{5}{18}=\frac{5}{6}$.

4. Теорема о вероятности произведения независимых событий

- Два события называются ***независимыми***, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое или нет.

Пример: Игральная кость брошена 2 раза. Событие A — в первом испытании выпало 2 очка, событие B — во втором испытании выпало 2 очка, являются независимыми. Причем $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$.

- События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми***, если они попарно-независимы и независимыми является каждое из них и произведение $n-1$ остальных.

- Событие B называется ***зависимым*** от события A, если вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло событие A или нет.

- Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место другое событие A, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$

Пример: В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Рассмотрим события: A — первый шар белый, B — второй шар белый. Событие B зависит от события A. При этом $P_A(B)=\frac{4}{11}$.

Если события A и B — независимые, то $P_A(B)=P(B)$, если события A и B — зависимые, то $P_A(B)\neq P(B)$.

Теорема (о вероятности произведения двух независимых событий): Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}$$

Пример: Игральная кость брошена 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза выпало 2 очка.

Решение.

Обозначим события:

A — в первом испытании выпало 2 очка;

B — во втором испытании выпало 2 очка;

C — оба раза выпало 2 очка.

Тогда событие $C=A\cdot B$. Так как события A и B являются независимыми, то $P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Теорема (о вероятности произведения n независимых событий): Вероятность произведения n независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)}$$

5. Теорема о вероятности произведения зависимых событий

Теорема (о вероятности произведения двух зависимых событий): Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

или

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)}$$

Пример: В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение.

Обозначим события:

A — первый шар белый;

B — второй шар белый;

C — оба шара белые.

Тогда событие $C = A \cdot B$. Так как событие B зависит от события A, то $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{4}{11} = \dfrac{5}{33}$.

Теорема (о вероятности произведения n зависимых событий): Вероятность произведения n зависимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n)}$$

6. Теорема о вероятности суммы двух совместных событий

Теорема (о вероятности суммы двух совместных событий):

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Пример: Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 6 очков.

Решение.

Обозначим события:

A — на первой кости выпадет 6 очков;

B — на второй кости выпадет 6 очков;

C — хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков.

Тогда событие $C = A + B$. Так как события A и B являются совместными, то $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

Формулы для определения вероятности суммы большего числа совместных событий достаточно громоздки, поэтому удобнее использовать вероятности противоположных событий.

Событие, состоящее в том, что наступит хотя бы одно из нескольких элементарных событий, противоположно событию, состоящему в том, что не наступит ни одно из них.

Поэтому, чтобы найти вероятность того, что произошло хотя бы одно из n событий $A_1, A_2, ..., A_n$, надо из единицы вычесть вероятность произведения им противоположных событий:

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n})}$$

Пример: Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности попадания соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение.

Обозначим события:

A — в мишень попадет хотя бы один стрелок;

A_1 — в мишень попадет первый стрелок;

A_2 — в мишень попадет второй стрелок;

A_3 — в мишень попадет третий стрелок.

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}994.$$

Пример.

Вероятность того, что первый автобус прибудет в пункт назначения без опоздания, равна 0,9, для второго автобуса эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что только один автобус опоздает.

Решение

Обозначим события:

A — только один автобус опоздает,

A_1 — первый автобус прибудет без опоздания,

A_2 — второй автобус прибудет без опоздания.

Тогда

$\overline{A_1}$ — первый автобус опоздает,

$\overline{A_2}$ — второй автобус опоздает.

По условию $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}8$.

Тогда $P\left(\overline{A_1}\right) = 1 - P\left(A_1\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$,

$P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - P\left(A_2\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Событие A произойдет в том случае, когда имеет место одно из следующих двух несовместных событий: либо $A_1\overline{A_2}$ — первый автобус прибудет без опоздания, а второй опоздает, либо $\overline{A_1}A_2$ — первый автобус опоздает, а второй прибудет без опоздания. То есть $A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$.

Тогда

$$P\left(A\right) = P\left(A_1\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}A_2\right).$$

В силу того что события A_1 и A_2, а следовательно, $\overline{A_1}$ и A_2, A_1 и $\overline{A_2}$ независимы, имеем:

$$P\left(A\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(A_2\right) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26.$$