

Лекция 1. Случайные события, их виды. Понятие вероятности события

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Случайные события, их виды.
2. Понятие вероятности события.

1. Случайные события, их виды

- **Эксперимент, испытание, опыт** — это возникновение или преднамеренное создание определенного комплекса условий, результатом которого является тот или иной исход.

- **Событием** называется исход испытания.

Например, брошена монета — испытание; появление орла или решки — событие.

События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, \dots .

Классификация событий:

1. **Достоверное событие** — событие, которое обязательно происходит в результате испытания.

2. **Невозможное событие** — событие, которое не может произойти в результате данного испытания.

3. **Случайное событие** — событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате данного испытания.

Примеры:

1. Выпадение не более шести очков при бросании игральной кости — достоверное событие.

2. Выпадение десяти очков при бросании игральной кости — невозможное событие.

3. Выпадение трех очков при бросании игральной кости — случайное событие.

- **Элементарными** называются те из событий, которые нельзя разложить на составляющие их события.

Пример: В опыте с бросанием игральной кости элементарными событиями являются выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Множество всех элементарных событий называется **пространством элементарных событий** и обозначается Ω

Виды случайных событий:

- Несколько событий называются **совместными**, если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других.

Например, при бросании трех монет выпадение цифры на одной из них не исключает появления цифры на других.

- Несколько событий называются **несовместными**, если в результате эксперимента наступление одного из них исключает появление других.

Например, при одном бросании игральной кости события, состоящие в появлении цифры 2, 3, представляют два несовместных события.

- События A_1, A_2, \dots, A_n ($n > 2$) называются **попарно несовместными**, если любые два из них несовместны.

- Несколько событий называются **равновозможными**, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Например, при бросании игральной кости появление каждой из ее граней — события равновозможные.

- **Противоположным** событию A называется событие \bar{A} , которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т.е. \bar{A} означает, что событие A не наступило).

Например, выпадения орла или решки при подбрасывании монеты являются противоположными событиями.

- События A_1, A_2, \dots, A_n образуют **полную группу** несовместных событий, если в результате данного испытания непременно произойдет только одно из них.

Например, выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании игральной кости образуют полную группу несовместных событий.

2. Понятие вероятности события

При исследовании большого количества одинаковых испытаний обнаруживаются определенные закономерности, которые можно описать, используя понятие вероятности.

Под вероятностью понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существует несколько подходов к определению вероятности.

1. Статистическое определение вероятности.

Пусть при проведении n испытаний некоторое событие A появилось m раз. Число m называют **частотой** события A .

Отношение $\frac{m}{n}$ называется **относительной частотой** (или **частотью**) события A .

При больших n относительная частота колеблется около некоторого числа.

- **Статистической вероятностью события A** называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний.

Например, английский ученый Пирсон произвел 23000 бросаний монеты. При этом герб появился 11512 раз. Значит, частота появления герба равна $\frac{11512}{23000} \approx 0,5005$.

Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5.

2. Классическое определение вероятности.

Пусть проводится опыт с n исходами, которые представляют полную группу несовместных равновероятных исходов.

- Исход называется **благоприятствующим событию A** , если он приводит к наступлению события A .

- **Вероятностью события A** называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу n всех исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность любого события $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность достоверного события равна 1.

Пример.

В урне находится 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение.

A — вынут белый шар.

Общее число всех равновероятных исходов равно количеству шаров в урне, т.е. $n = 12 + 8 = 20$.

Число исходов, благоприятствующих событию A , равно количеству белых шаров, т.е. $m = 12$.

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0,6$.

Пример.

Найти вероятность появления грани с четным числом очков при подбрасывании игральной кости.

Решение

A — выпадение грани с четным числом очков.

$n = 6$ (т.к. у игральной кости 6 граней).

$m = 3$ (т.к. у игральной кости 3 грани с четным числом очков: 2, 4, 6).

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример.

Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3.

Решение.

A — при бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3.

$n = 6$, $m = 2$.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример.

На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы $a, в, с, е, н$. Одна за другой наугад выбираются пять карточек и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «весна».

Решение

A — появится слово «весна».

Так как в каждом исходе берется все множество из 5 элементов (букв), и каждый исход отличается от другого только порядком следования элементов, то общее число исходов будет равно числу перестановок из 5 элементов, т.е.

$$n = P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

При этом слово «весна» появится лишь один раз, т.е. $m = 1$.

Значит,
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}.$$

Пример.

В партии из 15 деталей есть 3 нестандартные. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу 5 деталей будет 2 нестандартные.

Решение

A — среди 5 выбранных деталей есть 2 нестандартные.

Запишем условие в виде схемы:

$$\begin{array}{ccc} 15 \text{ дет.} & \text{—} & 12 \text{ ст.} & \text{—} & 3 \text{ нест.} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 \text{ дет.} & \text{—} & 3 \text{ ст.} & \text{—} & 2 \text{ нест.} \end{array}$$

(В первой строке указано то, что дано, во второй — то, что хотим получить).

Так как порядок выбора деталей не имеет значения, то общее число исходов испытаний будет равно числу сочетаний из 15 элементов по 5 элементов, т.е.

$$n = C_{15}^5 = \frac{15!}{5!10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 1 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3.$$

При вычислении числа исходов, благоприятствующих событию A , так же используем формулу числа испытаний и правило умножения:

$$m = C_{12}^3 C_3^2 = \frac{12!}{3!9!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = \frac{1 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 9} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 10 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3}{11 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{20}{91}.$$

Общая схема решения задач о выборке:

$$\begin{array}{rcc} k & = & k_1 + k_2 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ p & = & p_1 + p_2 \\ & & n = C_k^p; \end{array}$$

$$m = C_{k_1}^{p_1} C_{k_2}^{p_2};$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{k_1}^{p_1} C_{k_2}^{p_2}}{C_k^p}.$$