Лекция 8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

- Уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q — действительные числа, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Теорема: Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного неоднородного уравнения, т.е.

$$\boxed{y_{он} = y_{оо} + y_{чн}},$$

где $y_{он}$ — общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения;
$y_{оо}$ — общее решение линейного однородного дифференциального уравнения;
$y_{чн}$ — частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Нахождение $y_{оо}$ см. выше.

Для нахождения $y_{чн}$ для некоторых специальных видов функций $f(x)$ используют метод неопределенных коэффициентов. Сначала по виду правой части устанавливается вид частного решения с неопределенными коэффициентами, затем эти коэффициенты определяются.

Рассмотрим некоторые виды функции $f(x)$, стоящей в правой части уравнения.

Случай 1. Пусть правая часть уравнения $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени *n*.

Тогда частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$y_{чн} = Q_n(x)$, если корни характеристического уравнения $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени *n* с буквенными коэффициентами, подлежащими определению;

$y_{чн} = xQ_n(x)$, если $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$, т.е. один из корней характеристического уравнения равен нулю;

$y_{чн} = x^2 Q_n(x)$, если $k_1 = k_2 = 0$, т.е. оба корня характеристического уравнения равны нулю (в этом случае уравнение лучше решать, как уравнение, допускающее понижение порядка).

Для определения буквенных коэффициентов находят $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ и подставляют их и $y_{чн}$ в данное линейное неоднородное уравнение.

Пример: Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1.$$

Решение

Уравнение $y'' + 2y' = x^2 + 2x - 1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1. Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0.$$

Его корни: $k_1 = 0$ и $k_2 = -2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}$$

или

$$y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2. Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой многочлен второй степени и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$
$$y''_{чн} = 6Ax + 2B.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:
$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2x - 1$$
или
$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2x - 1.$$
Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:
$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 2, \\ 2B + 2C = -1. \end{cases}$$
Отсюда имеем:
$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{4}.$$
Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:
$$y_{чн} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$
3. Найдем $y_{он}$:
$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$
Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:
$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$
Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$.

Случай 2. Пусть правая часть уравнения есть показательная функция $f(x) = ae^{mx}$.

Тогда частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$y_{чн} = Ae^{mx}$, если корни характеристического уравнения $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$, где A — коэффициент, подлежащий определению;

$y_{чн} = Axe^{mx}$, если $k_1 = m$ или $k_2 = m$, т.е. один из корней характеристического уравнения равен m;

$y_{чн} = Ax^2e^{mx}$, если $k_1 = k_2 = m$, т.е. оба корня характеристического уравнения равны m.

Пример:

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y' - 2y = 9e^{2x}.$$

Решение.

Уравнение $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1. Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -1$ и $k_2 = 2$.

Тогда $y_{оо}$ находим по формуле:

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

2. Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой показательную функцию вида $f(x) = ae^{mx}$ и $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = Axe^{2x}.$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$y''_{чн} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 9e^{2x}.$$

Приведя подобные слагаемые и разделив обе части уравнения на e^{2x}, определим коэффициент A:

$$3Ae^{2x}=9e^{2x},$$
$$3A=9,$$
$$A=3.$$

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн}=3xe^{2x}.$$

3. Найдем $y_{он}$:

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}.$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}.$$

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$.

Случай 3. Пусть правая часть уравнения есть тригонометрическая функция $f(x)=a\cos nx+b\sin nx$, где a, b, n — действительные числа и $n\neq 0$.

Тогда частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$y_{чн}=A\cos nx+B\sin nx$, если корни характеристического уравнения $k_1,k_2\neq\pm ni$, где A, B — коэффициенты, подлежащие определению;

$y_{чн}=x(A\cos nx+B\sin nx)$, если $k_1,k_2=\pm ni$.

Пример:

Решить дифференциальное уравнение

$$y''+4y=4\cos 2x-12\sin 2x.$$

Решение

Уравнение $y''+4y=4\cos 2x-12\sin 2x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн},$$

где $y_{он}$ — общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{оо}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения;

$y_{чн}$ — частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

1. Найдем $y_{оо}$. Для этого решим соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0$$

или

$$k^2 = -4.$$

Его корни: $k_1 = -2i$ и $k_2 = 2i$.

Так как корни характеристического уравнения комплексные сопряженные вида $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то y_{oo} находим по формуле:

$$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Получим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y_{oo} = e^{0x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

или

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2. Найдем $y_{чн}$. Так как правая часть данного линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой тригонометрическую функцию вида $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$ и числа $k = \pm ni = \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения, то $y_{чн}$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x + x\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right),$$

$$\begin{aligned} y''_{чн} &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \\ &+ x\left(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x\right) = \\ &= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x \end{aligned}$$

Подставив $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в данное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} &-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x + \\ &+ 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x \end{aligned}$$

или

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим:

$$\begin{cases} -4A = -12, \\ 4B = 4; \end{cases}$$

Тогда $A = 3$, $B = 1$.

Таким образом, получаем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{чн} = x\left(3\cos 2x + \sin 2x\right).$$

3. Найдем $y_{он}$:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x)$

Теорема 3: Если правая часть линейного неоднородного уравнения представлена в виде суммы двух функций, т.е. дано уравнение

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частное решение $y_{чн_1}$ уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и частное решение $y_{чн_2}$ уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$, т.е.

$$y_{чн} = y_{чн_1} + y_{чн_2}.$$