Лекция 2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением ***с разделяющимися переменными***, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 .$$

Рассмотрим способ решения уравнения $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$.

Его особенность состоит в том, что при дифференциалах dx и dy стоят произведения функций, по отдельности зависящих от *x*, от *y*.

Разделим обе части уравнения на произведение $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$, получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 .$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 .$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Решить уравнение $x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на произведение $(1-y^2)(1-x^2)$, получим

$$\frac{x}{1-x^2}dx + \frac{y}{1-y^2}dy = 0 .$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{x}{1-x^2}dx + \int \frac{y}{1-y^2}dy = 0 .$$

Получим:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| = C .$$

Преобразуя, получим общий интеграл:

$$(1-x^2)(1-y^2) = C .$$

Рассмотрим способ решения уравнения $y' = f(x)g(y)$.

Его особенность состоит в том, что в правой части стоит произведение функций, по отдельности зависящих от x, от y.

Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = f(x)g(y)dx.$$

Разделим на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = tgx(y+1)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 0$.

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение (общий интеграл). Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = tgx(y+1).$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy = tgx(y+1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $(y+1)$:

$$\frac{dy}{y+1} = tgxdx.$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int tgxdx.$$

Получим:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x| + C \text{ — общий интеграл.}$$

Подставим в общий интеграл начальные условия $x = \pi$, $y = 0$ и найдем соответствующее им значение C:

$$\ln 1 = -\ln|\cos \pi| + C,$$

$$C = 0.$$

Подставим найденное значение $C = 0$ в общий интеграл и получим частный интеграл, удовлетворяющий заданным начальным условиям:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x|.$$

Преобразуем:

$$y+1 = \frac{1}{\cos x}.$$

Тогда $y = \frac{1}{\cos x} - 1$ — частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.