Элементы линейной алгебры

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю. В противном случае, матрица называется **вырожденной**.

Матрица $\widetilde{A}$ называется **дополнительной** к матрице A, если ее элементы есть алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

Матрица A^{-1} называется **обратной** для квадратной матрицы A, если

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = E.} \tag{2.8}$$

Теорема 2.3. Любая невырожденная квадратная матрица имеет обратную, которая может быть найдена по формуле

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\widetilde{A}\right)^T.} \tag{2.9}$$

Правило нахождения обратной матрицы

1) найти определитель матрицы $|A|$;

2) найти дополнительную матрицу $\widetilde{A}$;

3) транспонировать дополнительную матрицу, то есть найти $(\widetilde{A})^T$;

4) разделить каждый элемент транспонированной дополнительной матрицы на значение определителя $|A|$ исходной матрицы.

Пример 2.9. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 6 + 4 = -8.$$

2) найдем дополнительную матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3) транспонируем дополнительную матрицу $(\widetilde{A})^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

4) найдем обратную матрицу, разделив каждый элемент транспонированной дополнительной матрицы на значение определителя $|A|$ исходной матрицы:

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена верно. Для этого найдем произведение обратной матрицы A^{-1} на исходную матрицу A.

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{4}-\frac{3}{8}+\frac{7}{8} & -\frac{4}{4}+\frac{15}{8}-\frac{7}{8} & \frac{1}{4}-\frac{9}{8}+\frac{7}{8}\\ -\frac{2}{4}-\frac{1}{8}+\frac{5}{8} & \frac{4}{4}+\frac{5}{8}-\frac{5}{8} & -\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\\ -\frac{2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & \frac{4}{2}-\frac{5}{4}-\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Итак, обратная матрица найдена верно.

Понятие системы линейных алгебраических уравнений.

Система m **линейных уравнений с** n **неизвестными** (СЛАУ) записывается в общем виде следующим образом:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad(2.1)$$

Числа $a_{11},a_{12},\ldots,a_{mn}$ называются **коэффициентами,** $b_1,b_2,\ldots,b_m$ – **свободными членами** системы, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – неизвестными.

СЛАУ (2.1) называется **однородной**, если все ее свободные члены равны нулю, в противном случае СЛАУ называется **неоднородной.**

Упорядоченный набор чисел $(c_1;c_2;\ldots;c_n)$, обращающий каждое из уравнений системы в тождество, называется ее **решением.**

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, в противном случае – **несовместной**. Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной,** если она имеет более одного решения (рис. 2.1).

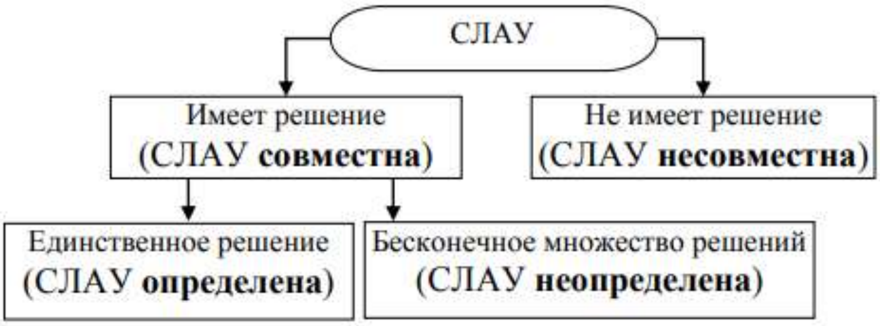

Рис. 2.1

Нетрудно понять, что решение СЛАУ полностью определяется коэффициентами системы и свободными членами. Поэтому встает вопрос: можно ли отдельно исследовать их, записав в виде компактных таблиц, а не переписывать каждый раз СЛАУ? Оказывается, можно. Таблицы, которыми пользуются при решении СЛАУ, назвали матрицами.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим СЛАУ n уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Введем в рассмотрение определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

i -й столбец

Через Δ обозначен определитель системы, через Δ_i – определитель системы, в которой i -й столбец заменен на столбец свободных членов.

Теорема 2.2 (*правило Крамера*[1]). Если в системе n линейных уравнений с n неизвестными определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое задается формулами

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.} \tag{2.7}$$

Формулы (2.7) называют формулами Крамера.

<u>*Пример 2.5.*</u> Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2, \\ 2x - y + 2z = -2, \\ 4x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Вычислим определитель системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(1-6) - 2(-2-8) + 1(6+4) = 15 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 30, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Замечание. Справедливы следующие утверждения:

1) если $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система не имеет решения;

2) если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$, то система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Решение систем линейных уравнений матричным методом

Обратная матрица применяется для решения неоднородных СЛАУ n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2b} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **основная матрица системы;**

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец переменных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Учитывая правило умножения матриц, систему запишем в матричной форме $AX = B$ (так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, то их произведение существует и является матрицей-столбцом B).

Предположим, что квадратная матрица A невырожденная, то есть $|A| \neq 0$, значит существует обратная матрица A^{-1}.

Матричное равенство $AX = B$ умножим слева на A^{-1} и получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$
$$\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B,$$
$$EX = A^{-1}B,$$
$$X = A^{-1}B.$$

Итак, решением СЛАУ будет матрица-столбец

$$\boxed{X = A^{-1}B.} \qquad (2.10)$$

Правило решения СЛАУ с помощью обратной матрицы

1) найти обратную матрицу A^{-1} для основной матрицы системы;
2) умножить найденную матрицу слева на столбец свободных членов B;
3) полученная матрица-столбец и будет решением системы.

Пример 2.10. Решить матричным методом систему $\begin{cases} 3x + 2y + z = 2, \\ 2x - y + 2z = -2, \\ 4x + 3y - z = 1. \end{cases}$

Решение. В данном примере

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

1) Найдем определитель матрицы A: $|A| = 15 \neq 0$;

2) найдем дополнительную матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 10 \\ 5 & -7 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix};$$

3) транспонируем дополнительную матрицу $(\widetilde{A})^T = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -7 & -4 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$;

4) найдем обратную матрицу, разделив каждый элемент транспонированной дополнительной матрицы на значение определителя $|A|$ исходной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -7 & -4 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15} \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $x = -1, y = 2, z = 1$.

Метод обратной матрицы и метод Крамера обладают рядом существенных недостатков. Оба эти метода достаточно трудоемки и применимы только для решения СЛАУ, в которых: 1) число уравнений равно числу неизвестных; 2) определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

Универсальным и вычислительно эффективным является метод Гаусса, который позволяет решить СЛАУ с любым числом уравнений и неизвестных.