Элементы линейной алгебры

Понятие матрицы, виды матриц

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Горизонтальные ряды матрицы называют **строками,** вертикальные – **столбцами**. **Элементы матрицы** обозначают малыми буквами с двумя индексами a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. Элементами матрицы могут быть различные математические объекты – числа, функции, многочлены и т.д.

Матрицы, как правило, обозначаются большими латинскими буквами, например, $A;B;C\dots$; элементы матрицы записываются в круглых скобках.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица A размера 3×4.

Две матрицы называются **равными**, если равны все соответствующие элементы этих матриц. Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Матрица называется **квадратной порядка** n, если число столбцов матрицы равно числу ее строк и равно n.

Элементы $a_{11}, a_{22},\dots,a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют ее **главную диагональ**, а диагональ, идущая от правого верхнего к левому нижнему углу, называется **побочной диагональю** матрицы.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали равны нулю. Диагональная матрица называется **единичной**, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали равны единице, и обозначают E. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно квадратная, диагональная и единичная матрицы третьего порядка.

Нулевая и единичная матрицы в матричном исчислении играют ту же роль, что и числа 0 и 1 в арифметике.

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно **матрицей-строкой** или **матрицей-столбцом** (или вектором).

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица-строка размера 1×3;

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец 2×1.

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** к данной. Обозначается A^T.

Определители, их свойства, вычисление.

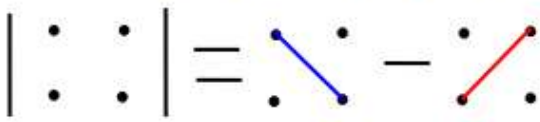
Квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие число, называемое определителем (или детерминантом) и обозначаемое $|A|$ или Δ или $\det A$. Необходимость введения понятия определителя тесно связана с решением СЛАУ.

Определителем матрицы первого порядка называется единственный элемент этой матрицы. Например, для $A=(5)$ имеем $|A|=5$.

Определителем матрицы второго порядка называется число, определяемое по формуле

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.} \qquad (2.3)$$

Способ его вычисления иллюстрируется схемой – **правило диагоналей**.



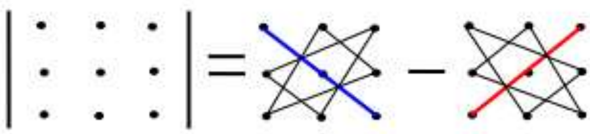
Пример 2.1. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. По правилу диагоналей $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 7 - 6\cdot 2 = -19.$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое по формуле

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \end{aligned}} \qquad (2.4)$$

Для облегчения запоминания этой сложной формулы воспользуемся **правилом треугольника**, представимым следующей схемой.



Словами можно записать: со знаком «плюс» надо взять произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, стоящих в вершинах треугольников, чьи основания параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся аналогичные произведения, только относительно побочной диагонали.

Пример 2.2. Найти определитель матицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Согласно правилу треугольника

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot(-2) + 0\cdot 5\cdot(-1) - (-2)\cdot 3\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 6 - 4\cdot 5\cdot 1 = -24.$$

Для вычисления определителей высших порядков применяется формула, понижающая порядок и нам понадобятся вспомогательные понятия.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.} \tag{2.5}$$

Пример 2.3. Найти минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{-4} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 3 & 1 & \cancel{2} \end{vmatrix}; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -5; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot (-5) = 5.$$

Теорема 2.1 (*теорема разложения*). Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \text{ для любого } i = 1, 2, \ldots, n$$

или $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$, для любого $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 2.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$:

а) разложением по элементам второго столбца;
б) разложением по элементам первой строки.

Решение.

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(15-1) - 2(6-4) - 2(2-20) = -42 - 4 + 36 = -10;$$

$$б)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-6-2) - 3(15-1) + 4(10+2) = -16 - 42 + 48 = -10.$$

Свойства определителей

Приведем основные свойства определителей без доказательства, при этом строки и столбцы будем просто называть рядами определителя**.**

1. «*Равноправность строк и столбцов*». Величина определителя не изменится, если строки заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками.

2. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

4. Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

5. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный.

6. Если один из рядов определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

7. «*Элементарные преобразования определителя*». Значение определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Действия над матрицами

Над матрицами, как над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны числовым операциям, а некоторые носят особый характер.

1) *Сложение матриц*

Суммой двух матриц одинаковой размерности $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица той же размерности $C_{m\times n}=(c_{ij})$, такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$.

Таким образом, чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их соответствующие элементы.

Пример 2.6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$; $A+B=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ -4 & 10 & 1\end{pmatrix}$.

2) *Умножение матрицы на число*

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ **на число** $\boldsymbol{k}$ называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$, такая, что $b_{ij}=ka_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$.

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число нужно все элементы данной матрицы умножить на это число.

Пример 2.7. Если $A=\begin{pmatrix}6 & 10 & 0\\ -8 & 5 & 1\end{pmatrix}$, то $3A=\begin{pmatrix}18 & 30 & 0\\ -24 & 15 & 3\end{pmatrix}$.

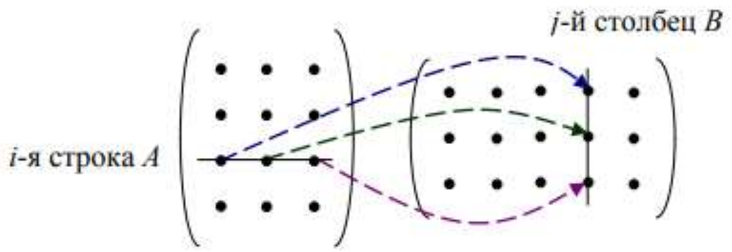
Следствие. Разность матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$.

3) *Умножение матриц*

Произведением матрицы $A_{m\times k}=(a_{ij})$ размера $m\times k$ на матрицу $B_{k\times n}=(b_{ij})$ размера $k\times n$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ размера $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$$

Проиллюстрируем наглядно вычисление элемента c_{ij}:



Умножение матрицы A на матрицу B возможно, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример 2.8. Вычислить AB и BA, где $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

__Решение__. По определению произведения матриц $A_{2\times3}B_{3\times2}=C_{2\times2}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\5&1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{array}{cc}\text{элемент } c_{11} & \text{элемент } c_{12}\\ \left(\begin{matrix}1\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot(-2) & 1\cdot0+0\cdot0+2\cdot0\\ 3\cdot(-1)+1\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0\end{matrix}\right) & \\ \text{элемент } c_{21} & \text{элемент } c_{22}\end{array}=\begin{pmatrix}-5&0\\2&1\end{pmatrix}.$$

По определению произведения матриц $B_{3\times2}A_{2\times3}=C_{3\times3}$:

$$\begin{pmatrix}-1&0\\5&1\\-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+0\cdot3 & -1\cdot0+0\cdot1 & -1\cdot2+0\cdot0\\5\cdot1+1\cdot3 & 5\cdot0+1\cdot1 & 5\cdot2+1\cdot0\\-2\cdot1+0\cdot3 & -2\cdot0+0\cdot1 & -2\cdot2+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\8&1&10\\-2&0&-4\end{pmatrix}.$$

Замечание. Для произвольных матриц $AB\neq BA$.