Лекция

Кривые второго порядка

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие о кривых второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс.
4. Гипербола (определение, каноническое уравнение, виды гипербол).
5. Парабола (определение, каноническое уравнение, виды парабол).

1. Понятие о кривых второго порядка

Кривые второго порядка это линии на плоскости, которые в прямоугольной декартовой системе координат задаются алгебраическими уравнениями второй степени, то есть уравнениями вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля.

К кривым второго порядка относятся ***окружность, эллипс, гипербола и парабола***.

2. Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности, на расстояние, равное радиусу.

Если $M(a,b)$ — центр окружности, а R — радиус окружности, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

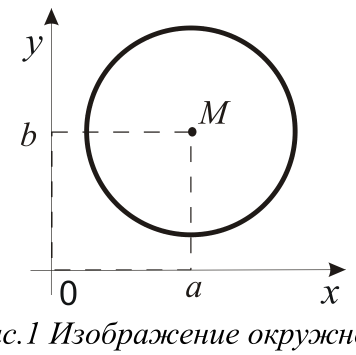

Рис.1 Изображение окружности

В частности, *если центр окружности совпадает с началом координат*, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример: Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $A(-3;-2)$ и радиус $R=4$.

Решение.

Подставим координаты центра и значение радиуса окружности в уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, получим уравнение искомой окружности:

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16.$$

Пример: Составить уравнение окружности с диаметром *AB*, если $A(-5;4)$, $B(-3;2)$.

Решение.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка *AB*, по формулам для координат *середины отрезка*:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ и } y=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$x=\frac{-5+(-3)}{2}=\frac{-8}{2}=-4, \text{ и } \ y=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Итак, $C(-4;3)$ — центр окружности. Радиус окружности *R* равен половине длины отрезка *AB*. Длину отрезка *AB* найдем по формуле расстояния между двумя точками:

$$AB=\sqrt{(-5-(-3))^2+(4-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $R=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

Тогда уравнение искомой окружности будет иметь вид:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=2.$$

3. Эллипс

1) Определение:

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2*a*, которая больше расстояния между фокусами, равного 2*c*.

2) Каноническое уравнение.

Пусть ось *Ox* проходит через точки F_1 и F_2 и начало координат является серединой отрезка $[F_1;F_2]$.

Тогда координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где *c* — фокусное расстояние.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса.

По определению эллипса $F_1M+F_2M=2a$.

Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$
$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

Упрощая выражение, получим

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Обозначим $a^2-c^2=b^2$,

то есть

$$\boxed{c^2=a^2-b^2}$$

Тогда $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Откуда делением на a^2b^2 получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

Здесь a — ***большая полуось*** эллипса, *в* — ***малая полуось*** ($a>b$), $2a$ — большая ось, $2b$ — малая ось.

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ — вершины эллипса.

Форму эллипса характеризует эксцентриситет. ***Эксцентриситетом эллипса*** ε называется отношение межфокусного расстояния к большой оси, то есть

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a},$$

причем $\varepsilon<1$.

Чем ближе ε к единице, тем эллипс более вытянут вдоль оси *Ox*. Эксцентриситет эллипса характеризует степень сжатия кривой к большой оси.

Если $a<b$, то эллипс вытянут вдоль оси *Oy*.

Тогда b — ***большая полуось*** эллипса, a — ***малая полуось***.

$$\boxed{c^2=b^2-a^2}$$

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{b}}$$

3) Изображение:

а) Найдём точки пересечения эллипса с осями координат.

С осью *Ox*:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$x = \pm a,$$

то есть $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ — точки пересечения эллипса с осью Ox.

С осью Oy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$y = \pm b,$$

то есть $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ — точки пересечения эллипса с осью Oy.

б) Строим характеристический прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям координат.

в) Вписываем эллипс.

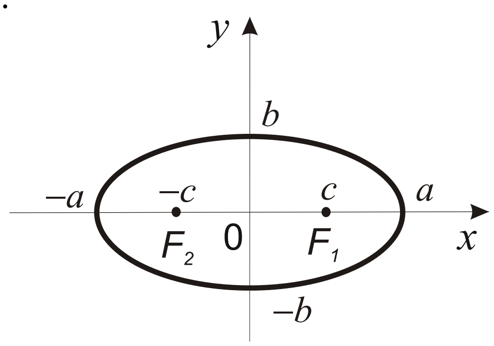

Рис.2. Изображение эллипса (a > b)

Пример: Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Требуется найти: *а*) полуоси; б) координаты вершин; *в*) координаты фокусов; *г*) эксцентриситет.

Решение.

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ — каноническое уравнение эллипса.}$$

а) $a^2 = 9$, $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

б) $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$ — вершины эллипса.

в) Найдем *c* по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$. Тогда $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример: Написать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, и расстояние между ними равно 6, а большая полуось равна 5.

Решение.

По условию задачи $2c=6$, $c=3$ и $a=5$. Найдём малую полуось эллипса b из формулы связи $c^2=a^2-b^2$, получим

$$9=25-b^2,$$
$$b^2=25-9=16.$$

Подставляя в уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a^2=25$, $b^2=16$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

4. Гипербола

1) Определение.

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, которая меньше расстояния между фокусами, равного $2c$.

2) Каноническое уравнение.

Если фокусы F_1 и F_2 лежат на оси Ox, причем $OF_1=OF_2=c$ — фокусное расстояние, то координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Если $M(x;y)$ — произвольная точка гиперболы, то по определению $|MF_1-MF_2|=2a$.

Можно получит каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где x, y — координаты произвольной точки эллипса (текущие координаты), a — действительная полуось гиперболы, b — мнимая полуось, причем

$$c^2=a^2+b^2.$$

3) Изображение:

а) Найдём точки пересечения гиперболы с осями координат.

С осью Ox:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \\ y=0; \end{cases}$$

$$x=\pm a,$$

то есть $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ — точки пересечения гиперболы с осью *Ox*, ***вершины*** гиперболы.

С осью *Oy*:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

решений нет, то есть гипербола не пересекает ось *Oy*.

б) Строим характеристический прямоугольник со сторонами 2a и 2b, параллельными осям координат, проводим его диагонали, продолжая их за вершины прямоугольника.

Эти прямые являются ***асимптотами гиперболы***, то есть прямыми, к которым точки гиперболы неограниченно приближаются при бесконечном удалении их от начала координат вдоль линии.

Уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a} x .$$

в) Строим гиперболу.

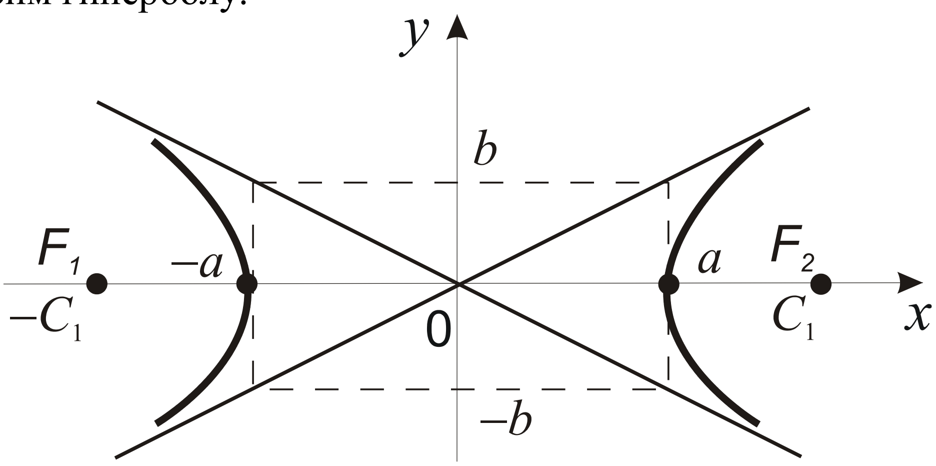

Рис. 3. Изображение гиперболы

4) Эксцентриситет.

Эксцентриситетом гиперболы ε называется отношение межфокусного расстояния к действительной оси, то есть

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

причем $\varepsilon > 1$.

Эксцентриситет гиперболы характеризует степень сжатия кривой к действительной оси.

5) Виды гипербол.

а) Если $a = b$, то гипербола называется ***равносторонней (равнобокой)***.

Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2 .$$

б) Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ называются ***сопряжёнными***.

Пример: Дано уравнение гиперболы $4x^2-9y^2=36$. Требуется найти: *а*) полуоси; *б*) координаты вершин; *в*) координаты фокусов; *г*) эксцентриситет; *д*) уравнения асимптот.

Решение.

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ — каноническое уравнение гиперболы.

а) $a^2=9$, $a=3$ — действительная полуось, $b^2=4$, $b=2$ — мнимая полуось.

б) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$ — вершины гиперболы.

в) Найдем *с* по формуле связи $c^2=a^2+b^2$, получим $c^2=9+4=13$, $c=\sqrt{13}$.

Тогда $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, получим $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

д) Уравнения асимптот найдём по формулам $y=\pm\frac{b}{a}x$, получим:

$$y=\pm\frac{2}{3}x.$$

Пример: Написать каноническое уравнение гиперболы, если межфокусное расстояние равно 10, а действительная полуось $a=4$.

Решение.

По условию задачи $2c=10$, $c=5$ и $a=4$. Найдём мнимую полуось эллипса *b* из формулы связи $c^2=a^2+b^2$, получим

$$25=16+b^2,$$
$$b^2=25-16=9.$$

Подставляя в уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $a^2=16$, $b^2=9$, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

5. Парабола

1) Определение.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***.

2) Каноническое уравнение. Основные элементы.

Если ось Ox проходит через фокус параболы перпендикулярно директрисе, ось Oy проходит посредине между директрисой и фокусом параллельно директрисе, начало координат является ***вершиной параболы***, а ось Ox — её ***осью симметрии***; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ — фокус параболы; $x=-\frac{p}{2}$ — уравнение директрисы, то ***каноническое уравнение параболы*** имеет вид

$$y^2=2px,$$

где p — расстояние от фокуса F до директрисы ($p>0$).

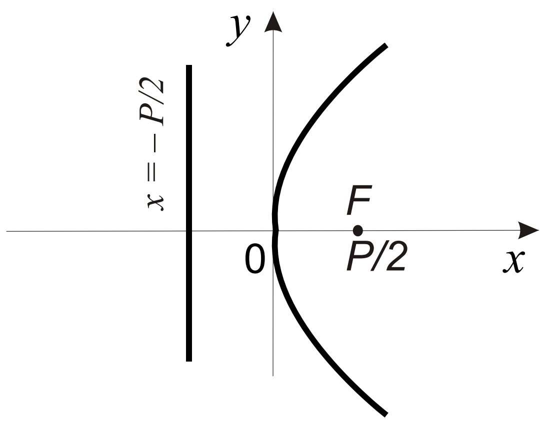

Рис. 4. Изображение параболы $y^2=2px$

Если $M(x;y)$ — произвольная точка параболы, то по определению $MF=MN$.

3) Виды парабол.

а) Парабола с каноническим уравнением $y^2=-2px$ имеет вид:

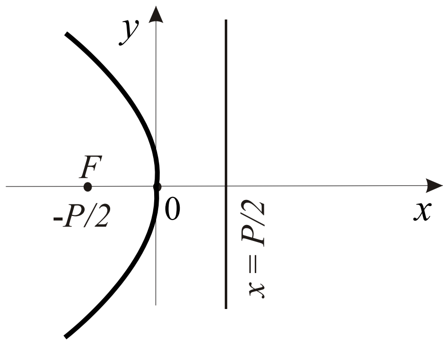

Рис. 5. Изображение параболы $y^2=-2px$

$F\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$ — фокус параболы; $x=\dfrac{p}{2}$ — уравнение директрисы.

б) Парабола с каноническим уравнением $x^2=2py$ имеет вид:

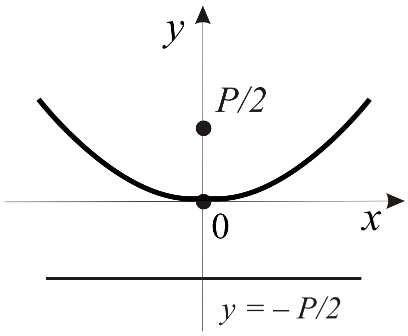

Рис. 6. Изображение параболы $x^2=2py$

$F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$ — фокус параболы; $y=-\dfrac{p}{2}$ — уравнение директрисы.

в) Парабола с каноническим уравнением $x^2=-2py$ имеет вид:

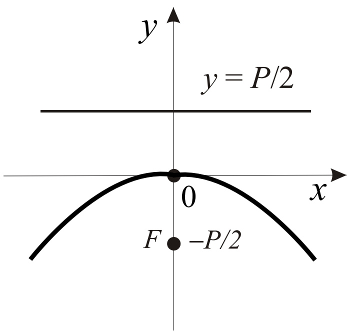

Рис. 7. Изображение параболы $x^2=-2py$

$F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right)$ — фокус параболы; $y=\dfrac{p}{2}$ — уравнение директрисы.

Пример: Найти уравнение директрисы и координаты фокуса каждой из парабол: $a)$ $y^2=4x$; $b)$ $x^2=-8y$.

Решение.

а) $y^2=4x$ — уравнение параболы, симметричной относительно оси Оx, ветви параболы идут вправо. Из уравнения находим: $2p=4$, откуда $p=2$, $\dfrac{p}{2}=1$.

Директрисой служит прямая, параллельная оси Оy и отстоящая от последней на расстоянии $\dfrac{p}{2}=1$. Следовательно, уравнение директрисы параболы будет иметь вид $x=-1$.

Фокус параболы находится на оси Оx, расстояние от фокуса до начала координат $\frac{p}{2}=1$, поэтому $F(1;0)$ — фокус параболы.

$b)$ $x^2=-8y$ — уравнение параболы, симметричной относительно оси Оy, ветви параболы идут вниз. Из уравнения находим: $2p=8$, откуда $p=4$, $\frac{p}{2}=2$.

Директрисой служит прямая, параллельная оси Оx и отстоящая от последней на расстоянии $\frac{p}{2}=2$. Следовательно, уравнение директрисы параболы будет иметь вид $y=2$.

Фокус параболы находится на оси Оy, расстояние от фокуса до начала координат $\frac{p}{2}=2$, поэтому $F(0;-2)$ — фокус параболы.

Пример: Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно уравнение её директрисы $x=2$.

Решение.

Так как уравнение директрисы $x=2$, то каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=-2px$. Тогда $\frac{p}{2}=2$, $p=4$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2=-8x$.