Лекция

Векторное пространство

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие n-мерного вектора и векторного пространства.
2. Базис и размерность линейного пространства.

1. Понятие *n*-мерного вектора и векторного пространства

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где x_i — i-я ***компонента*** вектора $\boldsymbol{x}$.

Понятие n-мерного вектора широко используется в экономике, например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, а соответствующие цены — вектором $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$.

Два n-мерных вектора ***равны*** тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i=y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Суммой двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ одинаковой размерности называется вектор $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых векторов, т.е. $z_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Произведением вектора x на действительное число λ называется вектор $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{x}$, компоненты u_i которого равны произведению λ *на соответствующие компоненты вектора* $\boldsymbol{x}$, т.е. $u_i = \lambda x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Свойства линейных операций над векторами

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ — коммутативное (переместительное) свойство суммы;

2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ — ассоциативное (сочетательное) свойство суммы;

3) $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ — ассоциативное относительно числового множителя свойство;

4) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ — дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство;

5) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ — дистрибутивное (распределительное) относительно суммы числовых множителей свойство;

6) существует нулевой вектор $\mathbf{0}=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ такой, что $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$;

7) для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует противоположный вектор $(-\boldsymbol{x})$ такой, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$;

8) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным восьми свойствам (аксиомам), называется ***векторным пространством***.

Если элементами множества являются объекты другой природы, то оно называется ***линейным пространством***.

Например:

R — множество действительных чисел является линейным пространством;

R^n — множество матриц-столбцов с n строками является линейным пространством;

N — множество натуральных чисел не является линейным пространством, т.к. нет нулевого вектора и противоположного вектора $\mathbf{0}$, $(-\boldsymbol{x})$.

2. Базис и размерность линейного пространства

Вектор $\boldsymbol{a}_n$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}$ линейного пространства R, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:

$$\boldsymbol{a}_n=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1},$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}$ — любые действительные числа.

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ линейного пространства R называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ линейного пространства R называются ***линейно независимыми***, если $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Пример. Выяснить, являются ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 3;\ 1;\ 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2;\ 1;\ 1;\ 2)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (3;\ -1;\ 1;\ 1)$ линейно зависимыми.

Решение

Составим векторное равенство $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Записывая векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ в виде векторов-столбцов, получим

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы

$$\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0,\\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0.\end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса (решите систему самостоятельно), получим ее общее решение (α; -2α; α), где $\alpha \in R$.

Итак, для данных векторов условие (1) выполняется не только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, но и при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одновременно не равных нулю. Например, если $\alpha = 1$, то условие (1) выполняется при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Следовательно, эти векторы — линейно зависимые.

Ответ: векторы линейно зависимые.

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ являются ***линейно зависимыми***, если определитель, составленный из компонент этих векторов, равен нулю.

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ являются ***линейно независимыми***, если определитель, составленный из компонент этих векторов, не равен нулю.

Пример. Выяснить, являются ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2;\ -2;\ -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1;\ 1;\ -1)$ линейно зависимыми.

Решение

Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot 1 +$$

$$+2\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot(-1) = 2 - 1 + 6 + 6 + 1 + 2 = 16.$$

Так как определитель не равен нулю, то векторы являются линейно независимыми.

Ответ: векторы линейно независимые.

Размерностью линейного пространства называется максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Линейное пространство R называется ***n-мерным***, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $(n + 1)$ векторов уже являются зависимыми.

Обозначение n-мерного линейного пространства — R^n.

Базисом n-мерного линейного пространства R называют совокупность n линейно независимых векторов.

Каждый вектор $\boldsymbol{x}$ линейного пространства R можно представить (и притом единственным способом) в виде линейной комбинации векторов базиса, т.е.:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \tag{2}$$

где $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n)$ — базис n-мерного пространства R,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа.

Равенство (2) называется ***разложением вектора*** $\boldsymbol{x}$ ***по базису*** $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n)$, а числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — ***координатами вектора*** $\boldsymbol{x}$ ***относительно этого базиса***.

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример. В базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ заданы векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;\ -1;\ 1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (-3;\ 5;\ -6)$. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис.

Решение

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы.

1-й способ.

Составим векторное равенство:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = 0.$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми и образуют базис.

2-й способ.

Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-6) + 1\cdot(-3)\cdot 1 +$$

$$+1\cdot 5\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-6) = 6 - 3 - 5 + 6 = 4.$$

Так как определитель не равен нулю, то векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми и образуют базис.