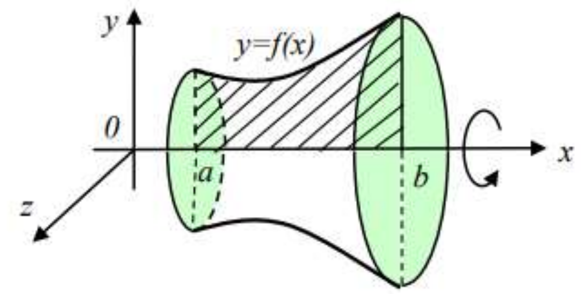
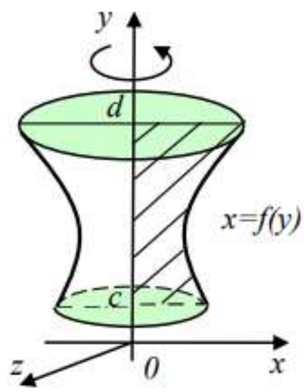
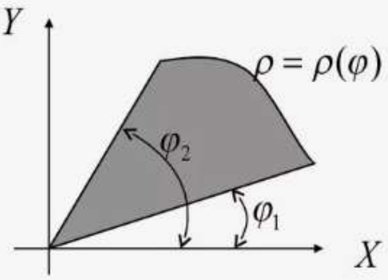
Индивидуальное домашнее задание №4
«Определенный интеграл и его применение»

Теория

Вычисление объёма тела вращения

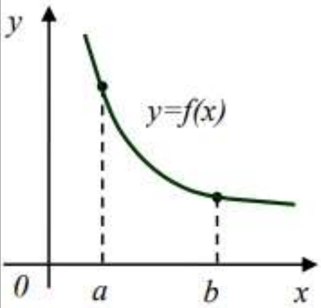
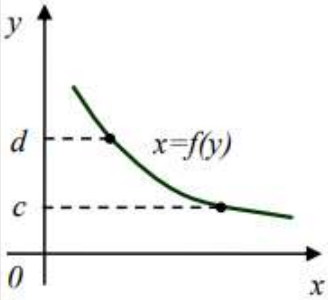
Рисунок	Формула
 Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx,}$ (9.32) *если* $f(x) \geq 0$
Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигурой, ограниченной сверху графиком функции $y = f_1(x)$, снизу графиком функции $y = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$\boxed{V = \pi\int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx,}$ (9.33) *если* $f_1(x) \geq f_2(x)$
 Тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $x = f(y)$, осью Oy, прямыми $y = c$ и $y = d$	$\boxed{V = \pi\int_c^d f^2(y)dy,}$ (9.34) *если* $f(y) \geq 0$

Вычисление площади криволинейного сектора в полярной системе координат



$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

Рисунок		Формула
	Кривая AB задается функцией $y = f(x)$, дифференцируемой на отрезке $[a, b]$	$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.}$ (9.29) $A(a, f(a))$ $B(b, f(b))$
	Кривая AB задается функцией $x = f(y)$, дифференцируемой на отрезке $[c, d]$	$\boxed{l = \int_c^d \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy.}$ (9.30)
Кривая задана в параметрической форме $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ причем для дуги AB: $\alpha \le t \le \beta$, а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции на $[\alpha; \beta]$		$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.}$ (9.31)

Пример выполнения типового задания

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y = 8x^2$, прямой $y = -6x + 14$ и осью Ox. Сделать рисунок фигуры вращения.

Решение

Построив линии, получим фигуру вращения (рис. 13).

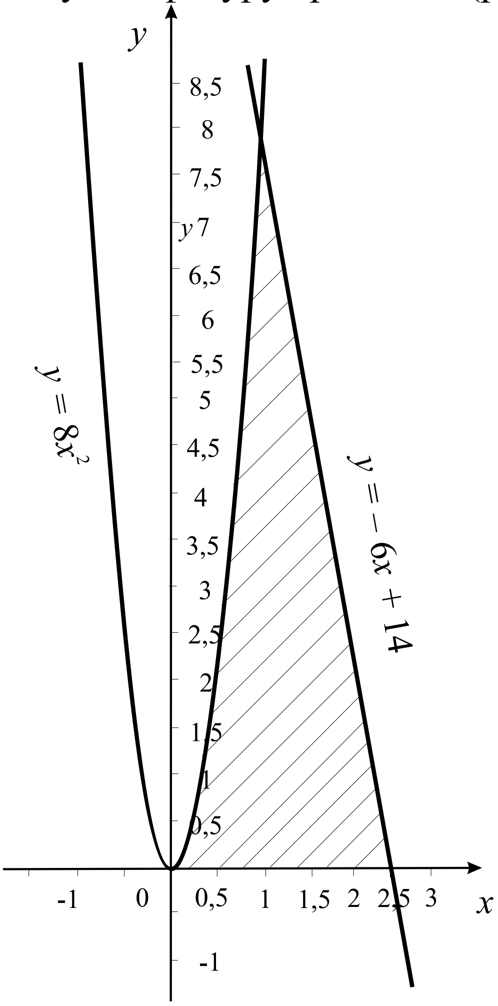


Рис. 13. Фигура вращения

Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$8x^2 = -6x + 14.$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$4x^2 + 3x - 7 = 0,$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot (-7) = 121,$$

$$x_1 = \frac{-3-11}{8} = -\frac{7}{4}, \qquad x_2 = \frac{-3+11}{8} = 1.$$

Первому квадранту соответствует корень $x_2 = 1$.

Найдем абсциссу точки пересечения прямой $y=-6x+14$ с осью Ox, решив уравнение $-6x+14=0$, откуда $x=\frac{7}{3}$.

Таким образом, тело ограничено при $0\le x\le 1$ поверхностью, образованной вращением параболы $y=8x^2$ вокруг оси Ox, а при $1\le x\le \frac{7}{3}$ — вращением прямой $y=-6x+14$.

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ — уравнения линий, ограничивающих криволинейную трапецию, которая вращается вокруг оси Ox.

Тогда искомый объем:

$$V=\pi\int_0^1\left(8x^2\right)^2dx+\pi\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2\,dx.$$

Для вычисления второго интеграла применим метод подведения под знак дифференциала:

$$V=64\pi\int_0^1 x^4dx-\frac{\pi}{6}\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2\,d(-6x+14)=$$

$$=64\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{(-6x+14)^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{3}}=\frac{64\pi}{5}+\frac{256\pi}{9}=\frac{1\,856}{45}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{1856}{45}\pi$ куб. ед.

Задание 5. Найти площадь, ограниченную линией $r = a\sin 3\varphi$.

Решение

Заданная линия — трехлепестковая роза (рис. 14).

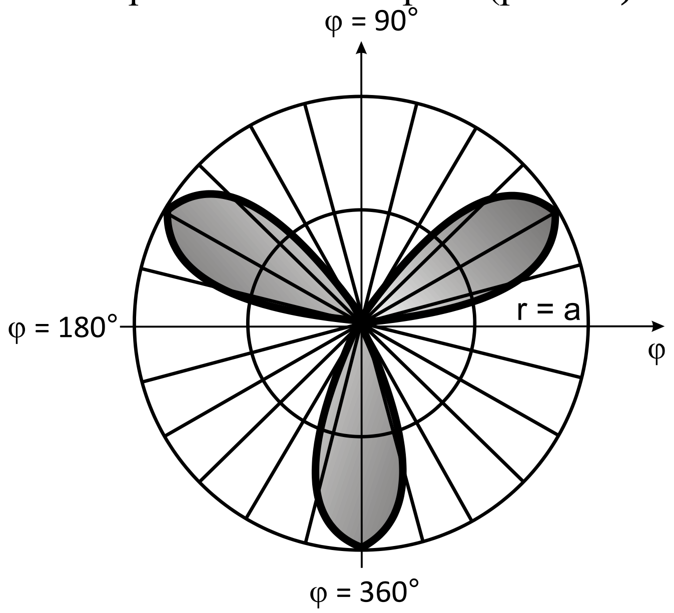


Рис. 14. Фигура

Для вычисления площади фигуры в полярных координатах используем формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi .$$

Найдем площадь половинки одного лепестка и умножим ее на 6:

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2(3\varphi)\,d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{3a^2}{2}\left(\varphi - \frac{1}{6}\cdot\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\sin\pi\right)-(0-0)\right) = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$ кв. ед.

Задание 6. Вычислить длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (t^2 - 2)\cos t - 2t\sin t \end{cases},$$

где $0 \le t \le \pi$.

Решение

Если уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где $t_1 \le t \le t_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Найдем $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = (t^2 - 2)'\sin t + (t^2 - 2)(\sin t)' + (2t)'\cos t + 2t(\cos t)' =$$

$$= 2t\sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$y'(t) = (t^2 - 2)'\cos t + (t^2 - 2)(\cos t)' - (2t)'\sin t - 2t(\sin t)' =$$

$$= 2t\cos t - (t^2 - 2)\sin t - 2\sin t - 2t\cos t = -t^2\sin t.$$

Тогда

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{(t^2\cos t)^2 + (-t^2\sin t)^2}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{t^4(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = \int_0^{\pi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \text{ (ед.).}$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{3}$ ед.