

# Индивидуальное домашнее задание №4

## «Определенный интеграл и его применение»

### Теория

#### Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть на отрезке  $[a; b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$ . Построение понятия определенного интеграла от функции  $y = f(x)$  по отрезку  $[a; b]$  состоит из трех этапов.

#### 1. Разбиение отрезка $[a; b]$ на части.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  оси  $Ox$  на части точками  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  так что

$$a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

на  $n$  произвольных частичных отрезков  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

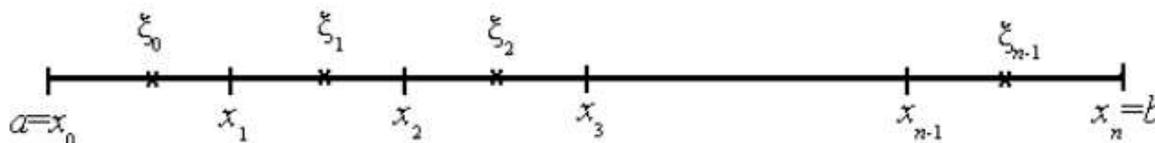


Рис. 9.1

Обозначим через  $\lambda$  длину наибольшего частичного отрезка разбиения:  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

#### 2. Построение интегральной суммы.

Выберем в каждом из полученных частичных отрезков произвольную точку  $\xi_i$  ( $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ) и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая называется **интегральной суммой Римана** для функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Геометрически она представляет собой сумму площадей прямоугольников с основаниями в виде отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  и высотами  $f(\xi_i)$  (см. рис. 9.2).

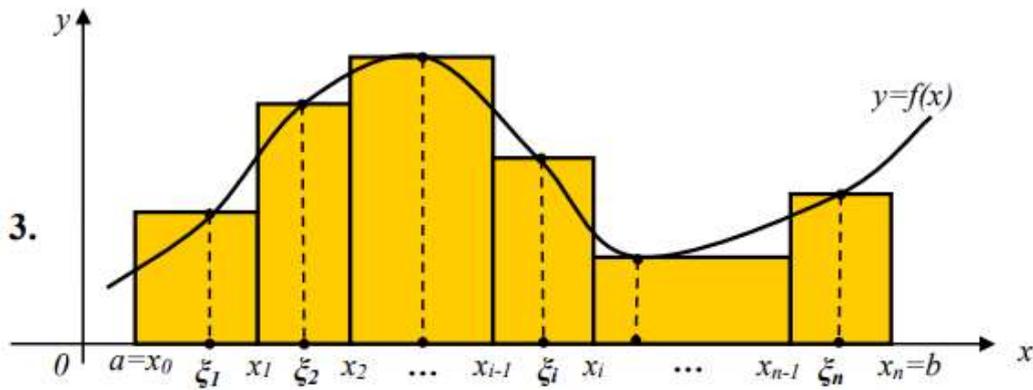


Рис. 9.2

### 3. Предельный переход.

Найдем предел  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ .

Если такой предел существует и он не зависит:

- от способа разбиения отрезка  $[a, b]$ ,
- выбора точек  $\xi_i$  внутри каждого отрезка,

то этот предел называют **определенным интегралом** от функции  $y = f(x)$  по отрезку  $[a, b]$  и обозначают

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.15)$$

Функция  $y = f(x)$  называется подынтегральной функцией, выражение  $f(x)dx$  – подынтегральным выражением, числа  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) называются соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**,  $x$  – переменной интегрирования.

**Теорема 9.4.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на нем.

– площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $x = a$ ,  $x = b$ , осью  $Ox$  и графиком функции  $y = f(x)$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.16)$$

Формула (9.16) означает геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл обладает рядом свойств, аналогичных свойствам неопределенного интеграла, другие справедливы только для него.

## Основные свойства определенного интеграла

1. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2.  $\int_a^b dx = b - a.$

3. При перестановке местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный:  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям, то есть имеет место равенство:  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$  если  $c \in (a; b).$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx,$   $k$  – число.

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых, то есть (для двух функций):

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

7. **Теорема о среднем.** Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b],$  то существует такое число  $c: a \leq c \leq b,$  что  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$

8. **Теорема Барроу<sup>1</sup>.** Пусть  $f(x)$  непрерывная функция на отрезке  $[a, b].$  Тогда производная интеграла с переменным верхним пределом равна подинтегральной функции, вычисленной в точке верхнего предела:  $\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$

9. Определенный интеграл зависит только от вида функции  $y = f(x)$  и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы неудобно и трудоемко. Поэтому целесообразно указать более удобный и эффективный способ вычисления определенного интеграла. Основан он на связи неопределенного и определенного интеграла и выражается в формуле Ньютона<sup>1</sup> – Лейбница.

### 3. Формула Ньютона – Лейбница и основные методы нахождения определенного интеграла

**Теорема 9.5.** Если  $F(x)$  есть первообразная для непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f(x)$ , то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (9.17)$$

то есть определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений первообразной от верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Данное равенство называют **формулой Ньютона – Лейбница**.

Итак, задача вычисления определенного интеграла сводится в первую очередь к задаче нахождения неопределенного интеграла, а следовательно, основана на использовании свойств, таблиц и методов, приведенных для неопределенного интеграла.

Пример 9.15.

$$\text{а) } \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4};$$

$$\text{б) } \int_0^1 (5x^5 + 1) dx = \left( \frac{5x^6}{6} + x \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{5 \cdot 1^6}{6} + 1 \right) - \left( \frac{5 \cdot 0^6}{6} + 0 \right) = 1\frac{5}{6};$$

$$\text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Тесная связь между определенным и неопределенным интегралом позволяет сделать вывод о том, что при вычислении определенного интеграла можно пользоваться теми же методами интегрирования. Однако существуют и особенности при использовании этих методов для определенных интегралов.

*Метод интегрирования по частям в определенном интеграле*

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (9.18)$$

Она применяется в тех же случаях, что и соответствующая формула для неопределенного интеграла.

Пример 9.16. Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{3} dx$ .

Решение.  $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{x}{3} dx \quad v = -3 \cos \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3x \cos \frac{x}{3} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -3 \cos \frac{x}{3} dx =$   
 $= \left( -3\pi \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left( -3 \cdot 0 \cdot \cos \frac{0}{3} \right) + 9 \sin \frac{x}{3} \Big|_0^{\pi} = -\frac{3\pi}{2} + 0 + \left( 9 \sin \frac{\pi}{3} \right) - \left( 9 \sin \frac{0}{3} \right) = -\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}.$

*Метод замены переменной в определенном интеграле*

Метод замены переменной в определенном интеграле основан на следующей теореме.

**Теорема 9.6.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и пусть:

1) функция  $x = \varphi(t)$  монотонна, непрерывна и имеет непрерывную производную, когда  $t$  меняется от  $\alpha$  до  $\beta$ ;

2)  $a = \varphi(\alpha)$  и  $b = \varphi(\beta)$ ,

тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (9.19)$$

Данная формула называется **формулой замены переменной в определенном интеграле**.

**Замечание.** Выполняя замену переменной в определенном интеграле, в отличие от случая неопределенного интеграла:

- 1) следует пересчитать пределы интегрирования;
- 2) не нужно возвращаться к старой переменной.

Пример 9.17. Вычислить интеграл  $\int_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ .

Решение. Введем новую переменную  $\sqrt{x-1} = t$  (чтобы избавиться от корня):

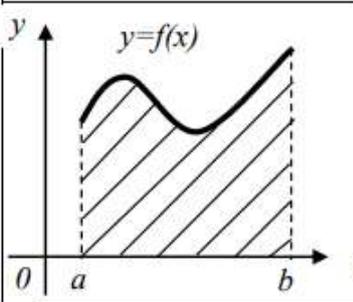
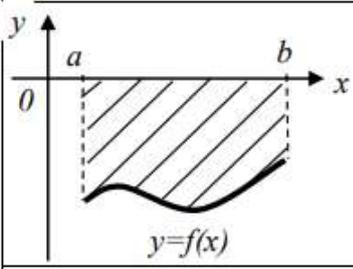
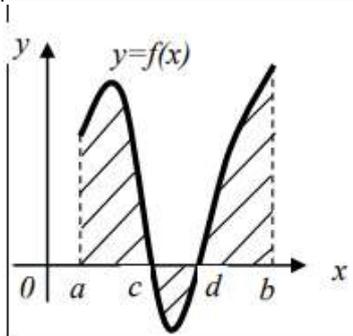
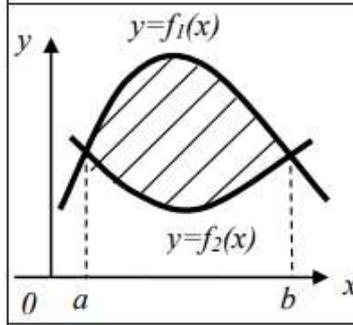
$$\int_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 10 \\ \hline t & 0 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2 \int_0^3 \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= 2 \int_0^3 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = 2 \left( \int_0^3 \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int_0^3 \frac{1}{t^2+1} dt \right) = 2 \left( \int_0^3 dt - \int_0^3 \frac{dt}{t^2+1} \right) = 2 \left( t \Big|_0^3 - \arctg t \Big|_0^3 \right) = 2(3 - \arctg 3).$$

### 3. Приложения определенного интеграла

Вычисление площади  $S$  плоской фигуры в декартовой системе координат

Таблица 9.3

Рисунок	Формула
	<p>Криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции <math>y = f(x)</math>, снизу осью <math>Ox</math>, слева и справа прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math></p> $S = \int_a^b f(x) dx, \quad (9.24)$ <p>если <math>f(x) \geq 0</math></p>
	<p>Криволинейная трапеция ограничена снизу графиком функции <math>y = f(x)</math>, сверху осью <math>Ox</math>, слева и справа прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math></p> $S = -\int_a^b f(x) dx, \quad (9.25)$ <p>если <math>f(x) \leq 0</math></p>
	<p>Криволинейная трапеция ограничена кривой <math>y = f(x)</math>, которая конечное число раз меняет знак на <math>[a; b]</math>, осью <math>Ox</math> и прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math></p> $S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \quad (9.26)$
	<p>Криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции <math>y = f_1(x)</math>, снизу графиком функции <math>y = f_2(x)</math>, слева и справа прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math></p> $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx, \quad (9.27)$ <p>если <math>f_1(x) \geq f_2(x)</math></p>
	<p>Криволинейная трапеция ограничена графиком функции <math>x = f(y)</math>, осью <math>Oy</math>, прямыми <math>y = c</math> и <math>y = d</math></p> $S = \int_c^d f(y) dy, \quad (9.28)$ <p>если <math>f(y) \geq 0</math></p>

Пример 9.21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ; б)  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = x + 4$ .

Решение.

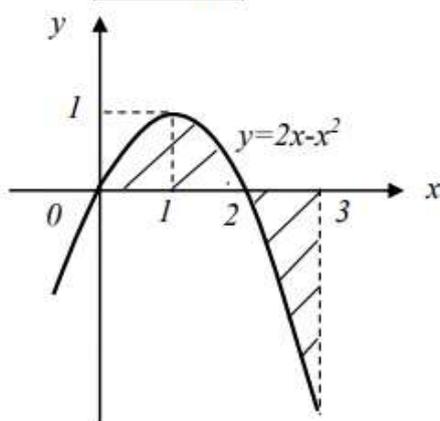


Рис. 9.5

а) Построим фигуру, площадь которой требуется найти (рис. 9.5).

Кривая  $y = 2x - x^2$  является параболой с вершиной в точке  $(1; 1)$ . Парабола пересекает ось  $Ox$  в точках  $x = 0$  и  $x = 2$ . Фигура состоит из двух частей, следовательно, по формуле (9.26):

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 (2x - x^2) dx + \left(-\int_2^3 (2x - x^2) dx\right) =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_2^3 = \frac{8}{3}.$$

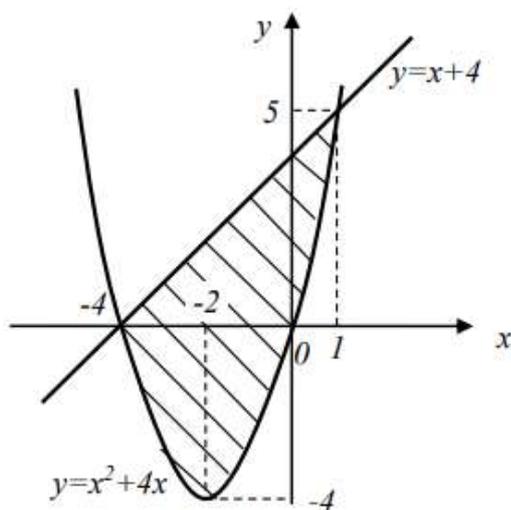


Рис. 9.6

б) Построим фигуру, площадь которой требуется вычислить: прямую  $y = x + 4$  и параболу  $y = x^2 + 4x$  с вершиной  $(-2; -4)$  и точками пересечения оси  $Ox$  в  $x = 0$  и  $x = -4$  (рис. 9.6). Найдем точки пересечения параболы  $y = x^2 + 4x$  и прямой  $y = x + 4$ , решив систему:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x = x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

По формуле (9.27) имеем:

$$S = \int_{-4}^1 [(x + 4) - (x^2 + 4x)] dx =$$

$$= \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right) \Big|_{-4}^1 =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{3(-4)^2}{2} + 4(-4)\right) = 20\frac{5}{6}.$$

## Пример выполнения типовых заданий

**Задание 1.** Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ .

*Решение*

Выполним замену переменной. Пусть  $t = 1 + x^2$ , тогда  $dt = 2x dx$ , откуда  $x dx = \frac{1}{2} dt$ . Находим новые пределы интегрирования. Если  $x = 0$ , то  $t = 1$ . Если  $x = \sqrt{3}$ , то  $t = 4$ , что следует из зависимости  $t = 1 + x^2$ .

Тогда

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 t^{\frac{1}{2}} dt =$$

Применим формулу интеграла от степенной функции

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$  и формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a):$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{3\sqrt{t^3}}{8} \Big|_1^4 = \frac{3}{8} \sqrt{4^3} - \frac{3}{8} \sqrt{1^3} = \frac{3}{8} (4\sqrt{4} - 1).$$

Ответ:  $\frac{3}{8} (4\sqrt{4} - 1)$ .

**Задание 2.** Вычислить определенный интеграл  $\int_2^3 x \ln(x-1) dx$ .

*Решение*

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пусть  $u = \ln(x-1)$ ,  $dv = x dx$ . Находим  $du = \frac{dx}{x-1}$ ,  $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ .

Тогда

$$\int_2^3 x \ln(x-1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-1) \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{9}{2} \ln 2 - 2 \ln 1 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} dx = \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_2^3 \left( x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\
&= \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left( \int_2^3 x dx + \int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1} \right) = \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 + x \Big|_2^3 + \ln(x-1) \Big|_2^3 \right) = \\
&= \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{9}{2} - 2 + 3 - 2 + \ln 2 - \ln 1 \right) = 4 \ln 2 - \frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $4 \ln 2 - \frac{7}{4}$ .

**Задание 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x^2 - x - 2$  и  $y = -x^2 + x - 1$ . Построить фигуру.

*Решение*

Построив линии, получим фигуру (рис. 12).

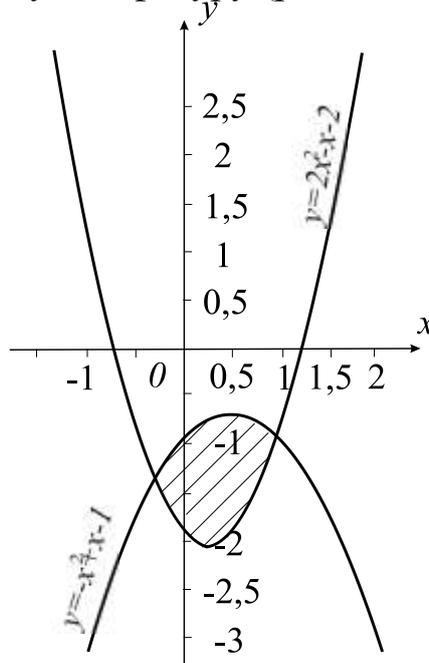


Рис. 12. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

где  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  — кривые, ограничивающие фигуру ( $f(x) \geq g(x)$ ).

Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 ((-x^2 + x - 1) - (2x^2 - x - 2)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx = \\ &= \left( -3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^1 = (x^3 + x^2 + x) \Big|_{-\frac{1}{3}}^1 = \\ &= (-1 + 1 + 1) - \left( \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) = \frac{34}{27} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{34}{27}$  кв. ед.