Индивидуальное домашнее задание №4
«Определенный интеграл и его применение»

Теория

Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Построение понятия определенного интеграла от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a;b]$ состоит из трех этапов.

1. Разбиение отрезка $[a;b]$ на части.

Разобьем отрезок $[a;b]$ оси Ox на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ так что

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на n произвольных частичных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

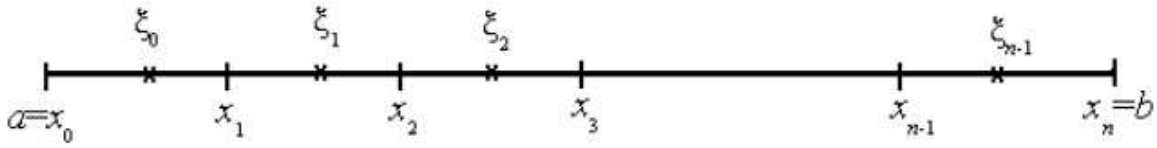


Рис. 9.1

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

2. Построение интегральной суммы.

Выберем в каждом из полученных частичных отрезков произвольную точку $\xi_i \; (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая называется **интегральной суммой Римана** для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Геометрически она представляет собой сумму площадей прямоугольников с основаниями в виде отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ и высотами $f(\xi_i)$ (см. рис. 9.2).

3.

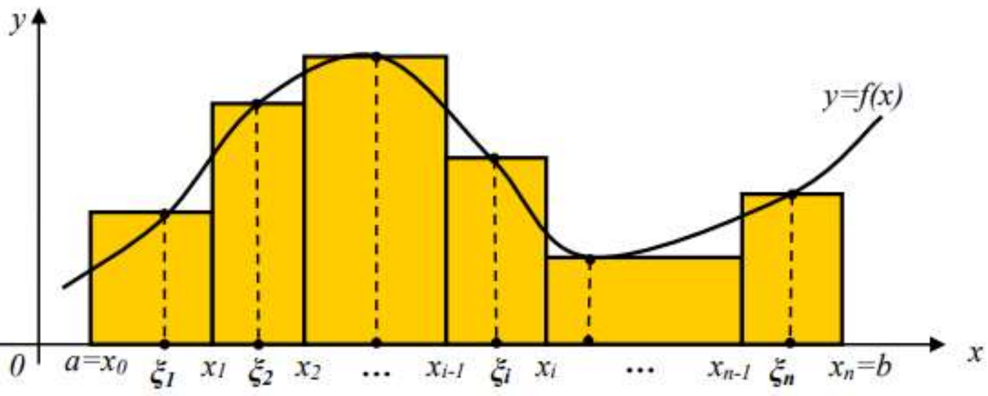


Рис. 9.2

3. Предельный переход.

Найдем предел $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Если такой предел существует и он не зависит:

– от способа разбиения отрезка $[a, b]$,

– выбора точек ξ_i внутри каждого отрезка,

то этот предел называют **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначают

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx.} \tag{9.15}$$

Функция $y = f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, числа a и b $(a < b)$ называются соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**, x – переменной интегрирования.

Теорема 9.4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.

– площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx.} \tag{9.16}$$

Формула (9.16) означает геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл обладает рядом свойств, аналогичных свойствам неопределенного интеграла, другие справедливы только для него.

Основные свойства определенного интеграла

1. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. $\int_a^b dx = b - a.$

3. При перестановке местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям, то есть имеет место равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ если $c \in (a;b).$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k$ – число.

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых, то есть (для двух функций):

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

7. **Теорема о среднем**. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такое число c: $a \le c \le b,$ что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$

8. **Теорема Барроу**[1]. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b].$ Тогда производная интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, вычисленной в точке верхнего предела: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$

9. Определенный интеграл зависит только от вида функции $y = f(x)$ и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы неудобно и трудоемко. Поэтому целесообразно указать более удобный и эффективный способ вычисления определенного интеграла. Основан он на связи неопределенного и определенного интеграла и выражается в формуле Ньютона[1] – Лейбница.

3. Формула Ньютона – Лейбница и основные методы нахождения определенного интеграла

Теорема 9.5. Если $F(x)$ есть первообразная для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),} \tag{9.17}$$

то есть определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений первообразной от верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Данное равенство называют **формулой Ньютона – Лейбница**.

Итак, задача вычисления определенного интеграла сводится в первую очередь к задаче нахождения неопределенного интеграла, а следовательно, основана на использовании свойств, таблиц и методов, приведенных для неопределенного интеграла.

Пример 9.15.

а) $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4};$

б) $\int_0^1 \left(5x^5 + 1\right)dx = \left(\frac{5x^6}{6} + x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{5 \cdot 1^6}{6} + 1\right) - \left(\frac{5 \cdot 0^6}{6} + 0\right) = 1\frac{5}{6};$

в) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

Тесная связь между определенным и неопределенным интегралом позволяет сделать вывод о том, что при вычислении определенного интеграла можно пользоваться теми же методами интегрирования. Однако существуют и особенности при использовании этих методов для определенных интегралов.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\boxed{\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.} \tag{9.18}$$

Она применяется в тех же случаях, что и соответствующая формула для неопределенного интеграла.

Пример 9.16. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{3}dx & v = -3\cos\frac{x}{3} \end{matrix} \right| = -3x\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} -3\cos\frac{x}{3}dx =$

$$= \left(-3\pi\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(-3\cdot 0\cdot\cos\frac{0}{3}\right) + 9\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{\pi} = -\frac{3\pi}{2} + 0 + \left(9\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(9\sin\frac{0}{3}\right) = -\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Метод замены переменной в определенном интеграле

Метод замены переменной в определенном интеграле основан на следующей теореме.

Теорема 9.6. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть:

1) функция $x = \varphi(t)$ монотонна, непрерывна и имеет непрерывную производную, когда t меняется от α до β;

2) $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$,

тогда справедлива формула

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.} \tag{9.19}$$

Даная формула называется **формулой замены переменной в определенном интеграле.**

Замечание. Выполняя замену переменной в определенном интеграле, в отличие от случая неопределенного интеграла:

1) следует пересчитать пределы интегрирования;

2) не нужно возвращаться к старой переменной.

Пример 9.17. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{10}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$

Решение. Введем новую переменную $\sqrt{x-1} = t$ (чтобы избавиться от корня):

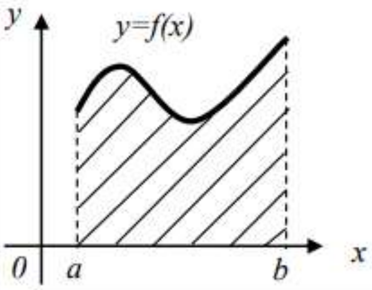
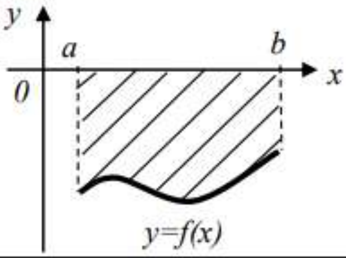
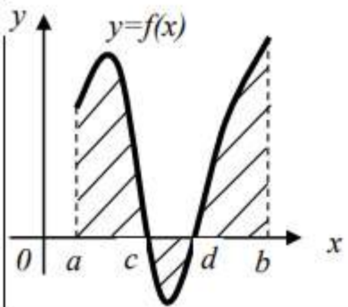
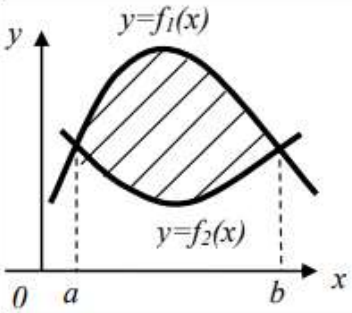
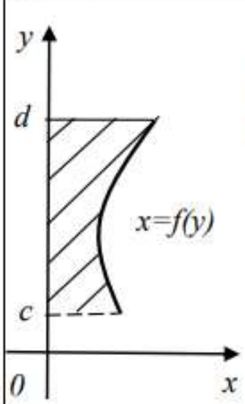
$$\int\limits_1^{10}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2+1 \Rightarrow dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 10 \\ \hline t & 0 & 3 \end{array} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^3 \frac{t}{t^2+1}2tdt = 2\int\limits_0^3 \frac{t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= 2\int\limits_0^3 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\left(\int\limits_0^3 \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - \int\limits_0^3 \frac{1}{t^2+1}dt\right) = 2\left(\int\limits_0^3 dt - \int\limits_0^3 \frac{dt}{t^2+1}\right) = 2\left(t\big|_0^3 - arctgt\big|_0^3\right) = 2(3 - arctg3).$$

3. *Приложения определенного интеграла*

Вычисление площади S плоской фигуры в декартовой системе координат

Таблица 9.3

Рисунок	Формула
 Криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$	$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx,}$ (9.24) *если* $f(x)\geq 0$
 Криволинейная трапеция ограничена снизу графиком функции $y=f(x)$, сверху осью Ox, слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$	$\boxed{S=-\int_a^b f(x)dx,}$ (9.25) *если* $f(x)\leq 0$
 Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=f(x)$, которая конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$	$\boxed{S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx}$ (9.26)
 Криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции $y=f_1(x)$, снизу графиком функции $y=f_2(x)$, слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$	$\boxed{S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx,}$ (9.27) *если* $f_1(x)\geq f_2(x)$
 Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $x=f(y)$, осью Oy, прямыми $y=c$ и $y=d$	$\boxed{S=\int_c^d f(y)dy,}$ (9.28) *если* $f(y)\geq 0$

Пример 9.21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = 2x - x^2$, $x = 3$, $y = 0$; б) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

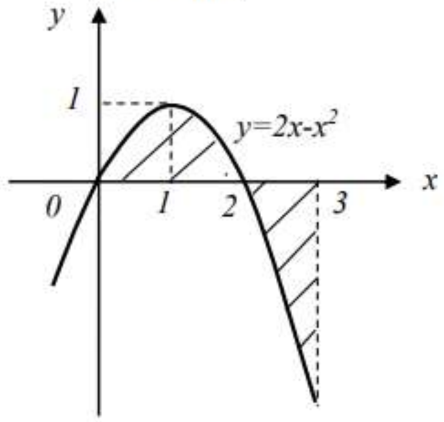


Рис. 9.5

а) Построим фигуру, площадь которой требуется найти (рис. 9.5).
Кривая $y = 2x - x^2$ является параболой с вершиной в точке $(1;1)$. Парабола пересекает ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 2$. Фигура состоит из двух частей, следовательно, по формуле (9.26):

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx + \left(-\int_2^3 \left(2x - x^2\right)dx\right) =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{8}{3}.$$

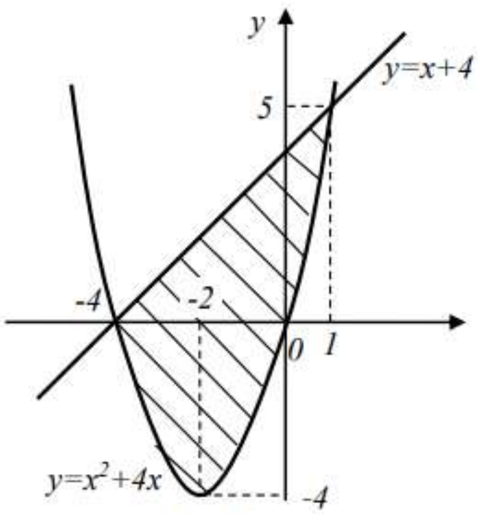


Рис. 9.6

б) Построим фигуру, площадь которой требуется вычислить: прямую $y = x + 4$ и параболу $y = x^2 + 4x$ с вершиной $(-2; -4)$ и точками пересечения оси Ox в $x = 0$ и $x = -4$ (рис. 9.6). Найдем точки пересечения параболы $y = x^2 + 4x$ и прямой $y = x + 4$, решив систему:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x = x + 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$

По формуле (9.27) имеем:

$$S = \int_{-4}^{1} \left[(x + 4) - \left(x^2 + 4x\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{3(-4)^2}{2} + 4(-4)\right) = 20\frac{5}{6}.$$

Пример выполнения типовых заданий

Задание 1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

Решение

Выполним замену переменной. Пусть $t=1+x^2$, тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx=\frac{1}{2}dt$. Находим новые пределы интегрирования. Если $x=0$, то $t=1$. Если $x=\sqrt{3}$, то $t=4$, что следует из зависимости $t=1+x^2$.

Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 t^{\frac{1}{3}}dt=$$

Применим формулу интеграла от степенной функции $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ и формулу Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}\Bigg|_1^4=\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}\Bigg|_1^4=\frac{3}{8}\sqrt[3]{4^4}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{1^4}=\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right).$$

Ответ: $\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right)$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx$.

Решение

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Пусть $u=\ln(x-1)$, $dv=xdx$. Находим $du=\frac{dx}{x-1}$, $v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$.

Тогда

$$\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x-1)\Bigg|_2^3-\frac{1}{2}\int\limits_2^3\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{9}{2}\ln 2-2\ln 1-\frac{1}{2}\int\limits_2^3\frac{x^2-1+1}{x-1}dx=$$

$$=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_2^3\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\int_2^3 xdx+\int_2^3 dx+\int_2^3\frac{d(x-1)}{x-1}\right)=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3+\left.x\right|_2^3+\left.\ln(x-1)\right|_2^3\right)=$$

$$=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-2+3-2+\ln 2-\ln 1\right)=4\ln 2-\frac{7}{4}.$$

Ответ: $4\ln 2-\frac{7}{4}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2-x-2$ и $y=-x^2+x-1$. Построить фигуру.

Решение

Построив линии, получим фигуру (рис. 12).

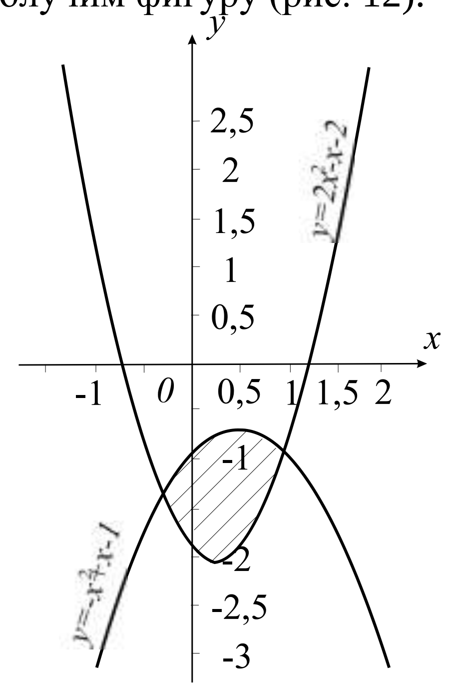


Рис. 12. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2-x-2=-x^2+x-1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2-2x-1=0,$$

$$D=4+4\cdot 3=16,$$

$$x_1=\frac{2+4}{6}=1,\qquad x_2=\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx,$$

где $y=f(x),\ y=g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x)\ge g(x)\right)$.

Тогда

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(\left(-x^2+x-1\right)-\left(2x^2-x-2\right)\right)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(-3x^2+2x+1\right)dx=$$

$$=\left(-3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1}=\left(x^3+x^2+x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1}=$$

$$=(-1+1+1)-\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)=\frac{34}{27}\ \text{(кв. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{34}{27}$ кв. ед.