# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

## Интегральное исчисление функций одной переменной

***На занятии рассматриваются вопросы:***

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования: подведением под знак дифференциала, замена переменной и интегрирование по частям.

### *1. Первообразная функции и неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла*

Ранее решалась задача: по данной функции $f(x)$ найти её производную или дифференциал. Рассмотрим обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x)=f(x)$ или дифференциал.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ для любого $x$ из области определения $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=x^2$ первообразной является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$. Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, где С — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество $F(x)+C$ первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную.

***Неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных $F(x)+C$ и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Например, $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$.

Достаточным условием существования неопределенного интеграла на некотором промежутке является непрерывность функции на этом промежутке.

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

***Свойства неопределённого интеграла:***

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

## ***2. Таблица основных интегралов***

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
2. $\int du = u + C$
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$
6. $\int \sin u du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u du = \sin u + C$
8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$
10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$

10.1. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$

12.1. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$

13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

## 3. Основные методы интегрирования

***1) Метод непосредственного интегрирования:*** данный интеграл путём простейших тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределённого интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

***Задание.*** Найти интегралы:

а) $\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx$;

б) $\int \left( \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx$;

*Решение (самоконтроль):*

а) $\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx = 5\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + 3\int x dx - 2\int dx =$

$$= 5\frac{x^{4+1}}{4+1} - 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + C =$$

$$= x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

б) $\int (\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x})dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3\arcsin\frac{x}{2} - 2\,tgx + C.$

***2) Метод подведения под знак дифференциала***

Метод основан на свойстве 6.

Следует помнить, что дифференциал функции $y = f(x)$ находится по формуле:

$$dy = y'dx.$$

***Задание.*** Найти интегралы:

а) $\int \cos 3x dx$;

б) $\int \frac{dx}{4-5x}$.

*Решение (самоконтроль):*

а) $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

б) $\int \frac{dx}{4-5x} = -\frac{1}{5}\int \frac{d(4-5x)}{4-5x} = -\frac{1}{5}\ln|4-5x| + C$.

***3) Метод замены переменной (метод подстановки):*** заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой–либо из основных формул интегрирования.

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)du \end{bmatrix} = \int f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)du = \int F(u)du$$

После нахождения интеграла через переменную *u* следует перейти к переменной *x*.

***Задание.*** Найти интегралы:

а) $\int (3x+2)^5 dx$;

б) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$;

*Решение (самоконтроль):*

а) $$\int (3x+2)^5 dx = \begin{bmatrix} 3x+2 = u \\ 3dx = du \\ dx = \frac{du}{3} \end{bmatrix} = \int u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{18}u^6 + C =$$

$$= \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C;$$

б) $$\int (2x^3+1)^4 x^2 dx = \begin{bmatrix} 2x^3+1 = u \\ 6x^2dx = du \\ x^2dx = \frac{du}{6} \end{bmatrix} = \int u^4 \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^4 du = \frac{1}{6}\frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{30}u^5 + C =$$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+1)^5 + C;$$

*4) Метод интегрирования по частям.*

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Определим дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При применении этой формулы надо:

1) подынтегральное выражение разбить на две части $u$ и $dv$, при этом за $u$ обычно принимается $x^n$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$,

2) по $u$ дифференцированием найти $du$,

3) по $dv$ интегрированием найти $v$, причем постоянную интегрирования опустить,

4) подставить в формулу, прийти к более простому интегралу.

***Задание.*** Найти интегралы:

а) $\int (x+5)e^x dx$;

б) $\int x^3 \ln x dx$.

*Решение (самоконтроль):*

а) Положим $u = x + 5$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int (x+5)e^x dx = (x+5)e^x - \int e^x dx = (x+5)e^x - e^x + C = e^x(x-4) + C.$$

б) Положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$