Формула Остроградского-Гаусса.
Формула Стокса.

Формула Остроградского-Гаусса связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Для вывода формулы Остроградского-Гаусса надо воспользоваться рассуждениями, подобными тем, которые использовались при нахождении формулы Грина–Остроградского.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место *формула Остроградского-Гаусса*:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \qquad (6.12)$$

где S – граница области V, и интегрирование по S производится по её внешней стороне.

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы второго рода с поверхностными интегралами второго рода.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности, то имеет место *формула Стокса*:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz =$$

$$= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \qquad (6.13)$$

где L – граница поверхности S, и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении.

Символическая запись формулы Стокса:

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (6.14)$$

6.2 Образцы решения примеров

6.2.3 Вычислить $\iint\limits_S (x+y)dydz+(y+z)dxdz+(x+z)dxdy$, где $S-$ внешняя сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x=0, y=0, z=0, x+2y+3z=6$.

Решение

Так как поверхность S замкнутая, то применим формулу Остроградского–Гаусса (6.12).

Имеем $P=x+y, \dfrac{\partial P}{\partial x}=1;\quad Q=y+z, \dfrac{\partial Q}{\partial y}=1;$ $R=x+z, \dfrac{\partial R}{\partial z}=1.$

Объём пирамиды находят по формуле $V=\dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot H$, тогда

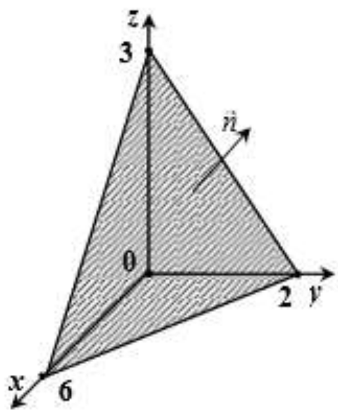

Рисунок 6.7

$$I=\iiint\limits_V (1+1+1)\,dxdydz=$$

$$=3\iiint\limits_V dxdydz=3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\right)\cdot 3=18.$$

6.2.4 Вычислить $\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz,$ где $L-$ окружность $x^2+y^2=1, z=0;$ $S-$ верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1\,(z>0)$, обход контура совершается в положительном направлении.

Решение

Применим формулу Стокса, используя её символическую запись (6.14). Имеем $P=x^2y^3, Q=1, R=z\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}=dydz\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial 1}{\partial z}\right)-dxdz\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x^2y^3}{\partial z}\right)-$$

$$-dxdy\left(\frac{\partial 1}{\partial x}-\frac{\partial x^2y^3}{\partial y}\right)=0-0+3x^2y^2dxdy\Rightarrow I=-3\iint\limits_S x^2y^2dxdy.$$

Так как проекция поверхности S на плоскость xOy представляет собой круг $x^2+y^2\le 1$, то перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}\Rightarrow\rho=1.\quad D'_{xy}:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le 1.\end{cases}$$

$$I=-3\iint\limits_{D'_{xy}}\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho\,d\varphi d\rho=-\frac{3}{4}\int\limits_0^1\rho^5d\rho\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{3}{4}\int\limits_0^1\rho^5d\rho\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\varphi}{2}d\varphi=-\frac{3}{4}\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^1\cdot\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{\pi}{8}.$$

Элементы теории поля.

28.1. Скалярное поле и его характеристики

28.1.1. Определение СП. Линии и поверхности уровня

Рассмотрим функцию $u(M)$, где $M(x,y)\in D\subseteq\mathbf{R}^2$ или $M(x,y,z)\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3$.

О: Множество D точек M пространства $\mathbf{R}^2$ (или $\mathbf{R}^3$) вместе с соответствующими этим точкам числами, которые определяются функцией $u(M)$, называется скалярным полем (СП), а функция $u(M)$ — функцией поля.

Если $D\subseteq\mathbf{R}^2$, то СП является плоским, если $\Omega\subseteq\mathbf{R}^3$ — пространственным.

Примерами СП являются поле распределения температуры в данном теле, поле распределения электрического потенциала в пространстве вокруг электрического заряда и т.п.

СП функции $u(M)$, $M\in D$, не зависит от времени t. Такое поле называется стационарным. Геометрически СП изображается на плоскости линиями уровня $u(M)=u(x,y,)=c$, где c — значение $u(x,y)$, в пространстве — поверхностями уровня $u(x,y,z)=c$.

Примеры: 1) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$, D: $x^2+y^2\geq1$, уравнения линий уровня: $x^2+y^2=1+c^2$, $\forall c\geq0$ (рис. 28.1).

2) $u(x,y,z)=x^2+y^2-z$, $D\subseteq\mathbf{R}^3$, уравнения поверхностей уровня: $x^2+y^2=z+c$, $\forall c\in\mathbf{R}$ — семейство параболоидов вращения с осью вращения OZ и вершинами, расположенными на OZ (рис. 28.2).

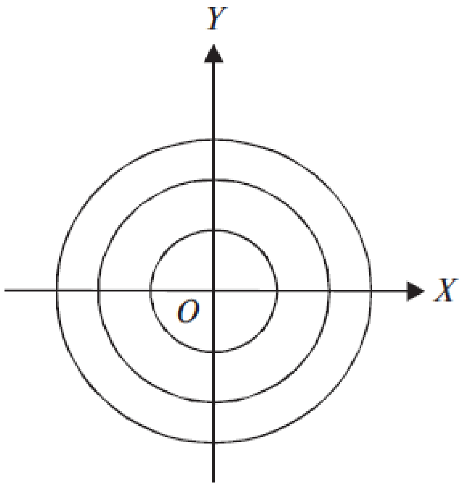

Рис. 28.1

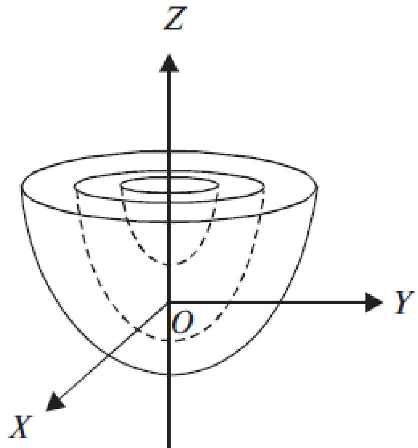

Рис. 28.2

28.1.2. Производная по направлению СП

Рассмотрим пространственное СП функции $u(x,y,z)$, $M(x,y,z) \in \Omega$. Определим величину, характеризующую скорость изменения этого поля в т. M в направлении единичного вектора $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, расположенного на прямой L. Пусть т. M_1 $(x_i, y_i, z_i) \in L$ (рис. 28.3).

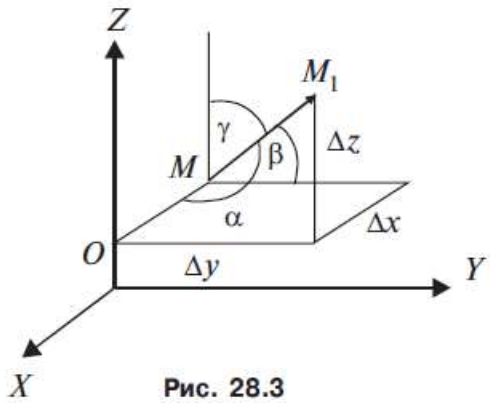

Рис. 28.3

О: Производной СП $u(x,y,z)$ в т. $M(x,y,z)$ по направлению $\vec{l}$ называется

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|}.$$

Обозначается производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$.

Т: Если функция СП $u(x,y,z)$ дифференцируема в Ω и $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \quad \blacksquare$$

Пример: Вычислить производную СП $u(M) = x^2y - xz^2 + 1$ в т. $M(1; -2; 1)$ в направлении $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

◀ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2xy - z^3)\big|_M = -5, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M = x^2\big|_M = 1,$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -3xz^2\big|_M = -3, \quad |\vec{a}| = 21,$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -5\frac{2}{\sqrt{21}} + 1\left(\frac{-4}{\sqrt{21}}\right) + \left(-3\frac{1}{\sqrt{21}}\right) = -\frac{17}{\sqrt{21}}.$$

Знак (–) указывает на то, что СП $u(M)$ в направлении вектора $\vec{a}$ убывает ▶

28.1.3. Градиент СП

Пусть функция СП $u(x,y,z)$ дифференцируема в Ω.

О: Градиентом поля $u(M)$ в т. $M \in \Omega$ называется вектор
$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Т: Пусть функция СП $u(x,y,z)$ дифференцируема в Ω. Тогда производная по данному направлению равна скалярному произведению grad u на единичный вектор $\vec{l}$ этого направления, т.е.
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l} \ \blacksquare \qquad (28.1)$$

Используем определение скалярного произведения, тогда из (28.1)
$\dfrac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| \cdot |\vec{l}| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi, \quad \varphi = (\widehat{\operatorname{grad} u, \vec{l}})$ (рис. 28.4).

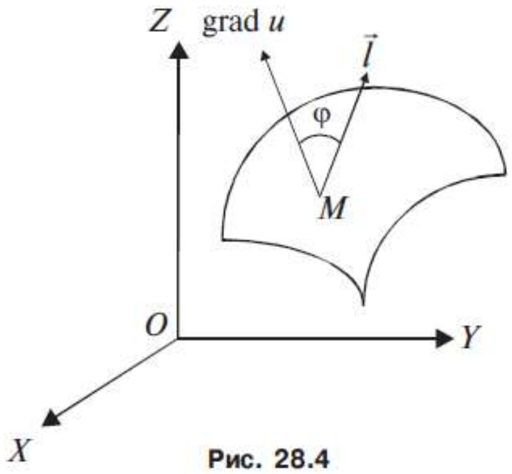

Рис. 28.4

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ имеет наибольшее значение в т. M, если

$\cos\varphi = 1,\ \varphi = 0$ и $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\text{grad}\, u|.$

Это значит, что grad u указывает направление наибольшего возрастания поля в т. M и имеет модуль, равный скорости этого возрастания.

Если рассматривается поверхность уровня G: $u(x,y,z) = c$, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in G$, то используя уравнение касательной к поверхности в точке M_0

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}(z - z_0) = 0,$$

выясняем, что $(\text{grad}\, u)_{M_0}$ направлен по нормали к поверхности уровня $u(x,y,z) = c$.

Пример: $u(M) = xy^2 + z^2$. Найти $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{наиб}}$ в т. $M(2;1;-1)$.

◄ $\text{grad}\, u = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + 2z\vec{k},\ (\text{grad}\, u)_{M_0} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k},$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\text{grad}\, u|_{M_0} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}\ ►$$

Для обозначения grad u применяется векторный дифференциальный оператор, называемый оператором Гамильтона (набла-оператор):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \text{grad}\, u = \nabla u.$$

28.2. Векторное поле и его характеристики

28.2.1. Определение ВП. Векторные линии

Пусть в каждой т. $M(x,y,z) \in \Omega$ задан вектор
$\vec{v} = v_x(M)\vec{i} + v_y(M)\vec{j} + v_z(M)\vec{k}.$

О: Векторным полем (ВП) функции $\vec{v}(M)$ называется множество Ω т. M пространства $\mathbf{R}^3$ вместе с соотнесенными к этим точкам векторами $\vec{v}(M)$. Если функция $\vec{v}(M)$ не зависит от времени, такое поле называется стационарным.

Примерами векторных полей являются:

1) стационарное гравитационное поле силы тяжести $\vec{F}(M)$;

2) стационарное поле скоростей $\vec{v}(M)$ жидкости, текущей в пространственной области Ω;

3) электрическое и электромагнитное поля на плоскости;

4) векторное поле grad u скалярного поля дифференцируемой функции $u(M)$, $M \in \Omega$.

> **О:** Векторными линиями поля $\vec{v}(M)$ называются такие кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с $\vec{v}(M)$ (рис. 28.5).

В силу определения вектор $\mathrm{d}\vec{r} = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$ коллинеарен в т. M вектору $\vec{v}(M) = \{v_x(M),\ v_y(M),\ v_z(M)\}$, т.е.

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(M)} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y(M)} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z(M)}. \tag{28.2}$$

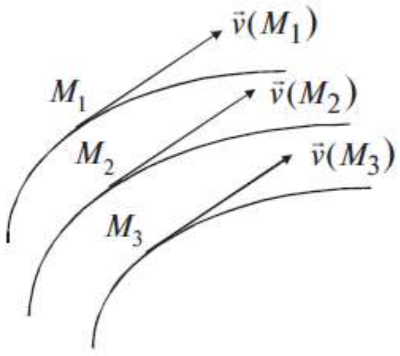

Рис. 28.5

Система (28.2) является системой двух дифференциальных уравнений для определения векторных линий поля $\vec{v}(M)$.

Векторные линии характеризуют ВП геометрически и дают информацию о структуре этого поля.

Пример: Найти векторные линии ВП $\vec{v}(M) = x\vec{i} - y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

◄ По формуле (28.2) получаем систему

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{-y} = \frac{\mathrm{d}z}{-2z} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{y}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{2z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = c_1, \\ y^2 = c_2 z, \end{cases}$$

это уравнения векторных линий, являющихся линиями пересечения гиперболических и параболических цилиндров ►

28.2.2. Поток и дивергенция ВП

Рассмотрим ВП функции $\vec{v}(M) = \{v_x(M),\ v_y(M),\ v_z(M)\}$, $M \in \Omega$. Пусть двусторонняя ориентированная поверхность $G \subset \Omega$, $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha(M),\ \cos\beta(M),\ \cos\gamma(M)\}$ — единичный вектор нормали в т. M.

О: Потоком ВП $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, через поверхность G называется

$$\Pi_G = \iint_G \vec{v}(M)\cdot\vec{n}(M)\mathrm{d}\sigma = \iint_G v_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + v_y \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + v_z \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (28.3)$$

Окружим т. $M \in \Omega$ замкнутой поверхностью $G \subset \Omega$, внутри которой заключен объем V (рис. 28.6).

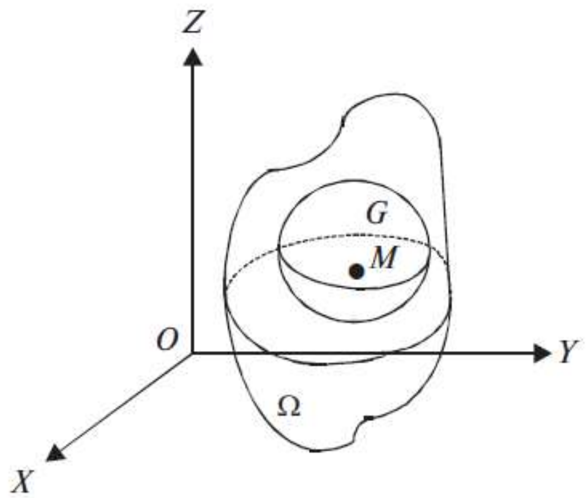

Рис. 28.6

О: Дивергенцией $\operatorname{div}\vec{v}(M)$, или расходимостью ВП $\vec{v}(M)$ в т. $M \in \Omega$ называется

$$\operatorname{div}\vec{v}(M) = \lim_{\substack{V\to 0\\ G\to M}} \frac{\Pi_G}{V}. \quad (28.4)$$

Рассмотрим гидродинамическую интерпретацию, т.е. будем считать, что $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, — стационарное поле скоростей несжимаемой жидкости. Течение жидкости может быть обусловлено существованием в Ω источников (точек, производящих жидкость) и стоков (точек, поглощающих жидкость). Для замкнутой повермаемой жидкости. Течение жидкости может быть обусловлено существованием в Ω источников (точек, производящих жидкость) и стоков (точек, поглощающих жидкость). Для замкнутой поверхности G величина Π_G характеризует количество жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны G на внешнюю (положительную) сторону, и равна суммарной мощности источников внутри G. Тогда (28.4) является формулой для плотности мощности источников в т. $M \in \Omega$. Если $\operatorname{div} \vec{v}(M) > 0$, то в т. M — источник, если $\operatorname{div} \vec{v}(M) < 0$, то в т. M — сток.

В электростатическом поле, созданном электрическими зарядами, распределенными в Ω, дивергенция является плотностью распределения зарядов в т. $M \in \Omega$.

Т: Если $v_x(M)$, $v_y(M)$, $v_z(M)$ непрерывны в Ω вместе со своими частными производными, то для ВП $\vec{v}(M) = \{v_x(M), v_y(M), v_z(M)\}$ в Ω справедлива формула

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \vec{v}(M) \;\blacksquare \qquad (28.5)$$

С помощью (28.3) и (28.5) формулу Остроградского–Гаусса можно переписать в векторной форме:

$$\Pi_G = \oiint\limits_G \vec{v}(M) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div} \vec{v}(M)\, dv, \; \partial\Omega = G.$$

Пример: Найти поток и дивергенцию ВП радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

◄ $\operatorname{div} \vec{r} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 3$,

$$\Pi_G = \iint\limits_G x\, dy\, dz + y\, dx\, dz + z\, dx\, dy = \iiint\limits_\Omega 3\, dx\, dy\, dz = 3V,$$

V — объем Ω, $G = \partial\Omega$ ►