Контрольная работа №3
«Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

Теория

Понятие функции двух переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x;\ y)$.

Функцией двух переменных называется зависимость f, при которой каждой паре чисел $(x;\ y)\in D$ ставится в соответствие единственное значение переменной $z\in R$. Записывается в виде $z=f(x;y)$. При этом x и y называются **независимыми переменными** (аргументами), а $z-$ **зависимой переменной** (функцией); символ f означает **закон соответствия**.

Например, формула, выражающая объем цилиндра $V=\pi r^2 h$, является функцией двух переменных $V=f(r;h)$, где $r-$ радиус основания, $h-$ высота.

Областью определения D функции $z=f(x;y)$ называется множество пар $(x;\ y)$, при которых функция $z=f(x;y)$ определена.

Функция двух переменных допускает геометрическое изображение.

Графиком функции двух переменных $z=f(x;y)$ называется множество точек трехмерного пространства $Oxyz$, аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональной зависимостью $z=f(x;y)$. Совокупность всех таких точек представляет некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Понятие частных производных функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение.

1. Переменной x дадим приращение Δx, а y – сохраним неизменным.

Частным приращением функции $z=f(x;y)$ **по переменной** x называется соответствующее приращение функции $\Delta_x z=f(x+\Delta x;y)-f(x;y)$.

2. Переменной y дадим приращение Δy, а x – сохраним неизменным.

Частным приращением функции $z=f(x;y)$ **по переменной** y называется соответствующее приращение функции $\Delta_y z=f(x;y+\Delta y)-f(x;y)$.

3. Переменной x дадим приращение Δx, переменной y дадим приращение Δy. **Полное приращение функции** $z=f(x;y)$ определяется равенством $\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y)$.

Вспомнив определение производной функции одной переменной, можно ввести понятие частных производных функции двух переменных, заменяя обычное приращение функции частным приращением.

Частной производной функции $z = f(x;y)$ **по переменной** x называется предел отношения частного приращения функции z по переменной x к приращению соответствующей переменной, когда это приращение стремится к нулю и обозначается

$$\boxed{z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x}.} \quad (8.1)$$

Аналогично определяется **частная производная функции** $z = f(x;y)$ **по переменной** y:

$$\boxed{z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.} \quad (8.2)$$

Существуют и другие обозначения производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y.$$

Из определения частных производных следует правило их нахождения.

Правило вычисления частной производной функции $z = f(x;y)$
по переменной x

1. Считать переменную y постоянной величиной. 2. Вычислить z'_x, используя формулы и правила вычисления производных функции одной переменной x. Для нахождения z'_y постоянной предполагается переменная x.

__Пример 8.3.__ Найти частные производные функций:

а) $z = 3y^2 + 2xy + x^2$; б) $z = x^3 \cos y$.

__Решение__. Применяя правила, получим:

а) $z'_x = |y - const| = (3y^2 + 2xy + x^2)'_x = (3y^2)'_x + (2xy)'_x + (x^2)'_x = 0 + 2y(x)'_x + 2x = 2y + 2x;$

$z'_y = |x - const| = (3y^2 + 2xy + x^2)'_y = (3y^2)'_y + (2xy)'_y + (x^2)'_y = 6y + 2x(y)'_y + 0 = 6y + 2x.$

б) $z'_x = |y - const \Rightarrow \cos y - const| = (x^3 \cos y)'_x = \cos y (x^3)'_x = \cos y \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos y;$

$z'_y = |x - const \Rightarrow x^3 - const| = (x^3 \cos y)'_y = x^3 (\cos y)'_y = x^3 \cdot (-\sin y) = -x^3 \sin y.$

Частные производные второго порядка функции двух переменных

Пусть $z = f(x;y)$ – дифференцируемая функция двух переменных. Для нее можно найти z'_x и z'_y, которые называются частными производными первого порядка. В свою очередь они могут быть дифференцируемыми функциями своих переменных и также могут иметь частные производные по каждой их этих переменных.

Частными производными второго порядка от функции z называются производные от частных производных первого порядка.

Рассмотрим частную производную $z'_x(x;y)$. От этой производной возьмем производную по переменной x и по переменной y: $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ и $(z'_x)'_y = z''_{xy}$.

Аналогично получаем $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ и $(z'_y)'_y = z''_{yy}$.

Следовательно, частных производных второго порядка от функции $z = f(x;y)$ будет четыре: z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yx}; z''_{yy}. Иногда применяют обозначения:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\ z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};\ z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Производные z''_{xy}; z''_{yx} называют **смешанными производными.**

Пример 8.7. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 + 4x^2y^3 - y^6 + 3$.

Решение.

$$z'_x = (x^4)'_x + (4x^2y^3)'_x - (y^6)'_x + (3)'_x = 4x^3 + 4y^3 2x - 0 + 0 = 4x^3 + 8xy^3;$$

$$z'_y = (x^4)'_y + (4x^2y^3)'_y - (y^6)'_y + (3)'_y = 0 + 4x^2 3y^2 - 6y^5 + 0 = 12x^2y^2 - 6y^5;$$

$$z''_{xx} = (4x^3 + 8xy^3)'_x = 12x^2 + 8y^3;\ z''_{yy} = (12x^2y^2 - 6y^5)'_y = 24x^2y - 30y^4;$$

$$z''_{xy} = (4x^3 + 8xy^3)'_y = 24xy^2;$$

$$z''_{yx} = (12x^2y^2 - 6y^4)'_x = 24xy^2.$$

В примере оказалось, что смешанные частные производные равны, то есть $z''_{xy} = z''_{yx}$. Теорема Шварца утверждает, что это не простое совпадение.

Теорема 8.2 (_Шварца_[1]). Если частные производные n-го порядка непрерывны, то смешанные производные того же порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x;y)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Согласно этой теореме смешанные производные можно вычислять в любом порядке и нет необходимости находить обе смешанные производные.

Частные производные второго порядка используются при нахождении экстремальных значений функции двух переменных.

Пример выполнения типового задания

Задание 1. Дана функция $u = \frac{y}{x}$. Проверить, удовлетворяет ли она уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение

Находим частные производные первого порядка функции $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)_x' = \frac{y_x' \cdot x - y \cdot x_x'}{x^2} = \frac{0 - y \cdot 1}{x^2} = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)_y' = \frac{y_y' \cdot x - y \cdot x_y'}{x^2} = \frac{1 \cdot x - 0}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Находим частные производные второго порядка функции $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{y}{x^2}\right)_x' = -\frac{y_x' \cdot x^2 - y \cdot \left(x^2\right)_x'}{x^4} = -\frac{0 - y \cdot 2x}{x^4} = \frac{2y}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{y}{x^2}\right)_y' = -\frac{1}{x^2} \cdot y_y' = -\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x}\right)_y' = 0.$$

Подставляем частные производные в левую часть данного уравнения:

$$x^2 \cdot \frac{2y}{x^3} + 2xy\left(-\frac{1}{x^2}\right) + y^2 \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} = 0.$$

Поскольку левая часть равна правой, то функция $u = \frac{y}{x}$ удовлетворяет заданному уравнению.